АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

9824—11126

№ 9 1960

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология, Горное дело), профессор *С. М. Лисичкин* (Экономика промышленности), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *Ю. Г. Саушкин* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), профессор *Б. М. Тареев* (Электротехника), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика)

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 3
Преподавание математики 6
Основания математики и математическая логика —
Теория чисел 9
Алгебра 15
Многочлены и линейная алгебра 15
Группы 18
Поля, кольца и структуры 25
Алгебраическая теория схем связи и управления 39
Топология 42
Теория функций действительного переменного . . 49
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями 51
Теория функций комплексного переменного . . . 55
Дифференциальные уравнения 66
Обыкновенные дифференциальные уравнения 66
Уравнения в частных производных 77
Приложения к физике, технике и естественным наукам 91
Интегральные уравнения 105
Вариационное исчисление 108
Анализ (другие вопросы) 109
Числовые ряды 111
Специальные функции 114
Интегральные преобразования и операционное исчисление 117
Приложения общих методов математического анализа 118
Функциональный анализ 119
Теория вероятностей 132
Математическая статистика 142
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 146
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 151
Геометрия 156
Приложения геометрии 156
Элементарная геометрия 158
Аналитическая геометрия 160
Проективная и неевклидовы геометрии 161
Начертательная геометрия 162
Алгебраическая геометрия 163
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 166
Геометрия *n*-мерного пространства 170
Теория относительности 175
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 176
Метрические методы в геометрии 179
Выпуклые многообразия 181
Численные и графические методы 182
Таблицы 201
Вычислительные машины и математические приборы 203
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 216
Авторский указатель 221

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF SCIENTIFIC INFORMATION OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

CHIEF EDITORS OF THE SECTIONS: Corresponding Member of the A. S., USSR *N. V. Ageev* (Metallurgy), Candidate of Biological Sciences *V. P. Dobrokhvalov* (Biology), Professor *E. E. Zakharov* (Geology, Mining), Professor *S. M. Lisichkin* (Economics of Industry), Professor *S. M. Nikolsky* (Mathematics), Professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomy and Geodesy), Professor *Yu. G. Saushkin* (Geography), Academician *L. I. Sedov* (Mechanics), *V. V. Serpinsky* (Chemistry), Professor *B. M. Tareev* (Electrical Engineering), Candidate of Technical Sciences *V. Z. Freidberg* (Machine Building), Professor *I. A. Khvostikov* (Geophysics), Professor *E. V. Shpolsky* (Physics)

CONTENTS

General 1
History. Personalia 3
Teaching of mathematics 6
Foundations. Mathematical logic . . . . . —
Theory of numbers 9
Algebra 15
Polynomials, linear algebra 15
Groups 18
Fields, rings, lattices 25
Algebraic theory of communication and control circuits 39
Topology 42
Theory of functions of real variables 49
Theory of sets . . . . . —
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 51
Theory of functions of complex variables 55
Differential equations 66
Ordinary differential equations 66
Partial differential equations 77
Applications to physics, technology and natural sciences 91
Integral equations 105
Calculus of variations 108
Analysis (other aspects) 109
Numerical series 111
Special functions 114
Integral transforms, operational calculus . . 117
Applications of general methods of mathematical analysis 118
Functional analysis 119
Theory of probability 132
Mathematical statistics 142
Theory of games, operational research, mathematical economics 146
Applications of probabilities and statistical methods 151
Geometry 156
Applications of geometry 156
Elementary geometry 158
Analytical geometry 160
Projective and non-euclidean geometries. . . 161
Descriptive geometry 162
Algebraic geometry 163
Differential geometry of 3-dimensional space 166
Geometry of *n*-dimensional space 170
Theory of relativity 175
Global theory of differentiable manifolds . . 176
Metric methods in geometry 179
Convex manifolds 181
Numerical and graphical methods 182
Tables 201
Computers and mathematical devices 203
Application of computer devices 216
Author index 221

Editorial Office: Moscow, D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 9824—11126 № 9 Сентябрь 1960 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

9824. Ленинградское математическое общество. Малышев А. В., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 212 (Информация об учредительном собрании общества 29 сентября 1959 г.

9825. Ленинградский общеуниверситетский семинар по машинному переводу, 28 ноября—3 дек. 1957 г. В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. 2. М., Физматгиз, 1959, 303—305

9826. Всесоюзная конференция по машинному переводу, Москва, 15-21 мая 1958 г. В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. 2. М., Физматгиз, 1959, 305—311

9827. Вторая Республиканская конференция по математике и механике, Алма-Ата, окт. 1959 г. Булабаев Т., КазССР Ғылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1959, № 12, 94—95

9828. XVI научная сессия Киевского государственного университета (секция математики), посвященная XXI съезду КПСС и 125-летию университета, 11-12 марта 1959 г. Грацианская Л., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 3, 339—340

9829. Накануне 2-го математического конгресса в Венгрии. [24—31 авг. 1960 г.]. Алпар (A II. Magyar Matematikai Kongresszus elé. Alpár László), Magyar tud., 1959, **66**, № 9, 490—491 (венг.)

9830. Отчет о международной конференции по информационному процессу в Париже 15-20 июня 1959 г. (Bericht über die International Conference on Information Processing (ICIP) in Paris vom 15. bis 20.6.1959 (нем.)

9831. Обзорный отчет об исследовательском центре Центрального статистического Бюро Швеции. Далениус (The survey research centre of the Central Bureau of Statistics, Sweden. Dalenius Tore), Sankhyā, Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 3, 225—244 (англ.)

9832. 6-ой биометрический коллоквиум немецкой секции международного биометрического общества, Лейпциг, 22-23 января 1959 г. Штауде, Эндерлейн (6. Biometrisches Colloquium der Deutschen Region der Internationalen Biometrischen Gesellschaft in Leipzig vom 23-25.1.1959. Staude H., Enderlein G.), Biometr. Z., 1959, **1**, № 4, 284—286 (нем.)

9833. 1-й съезд Общества чехословацких математиков и физиков, Прага, 1-2 апреля 1959 г. (I. Sjezd Jednoty čs. matematiků a fysiků, 1-2. dubna 1959, Praha.), Pokroky mat., fys. a astron., 1959, **4**, № 5, 633—640 (чешск.)

9834. Вступительный доклад председателя Общества чехословацких математиков и физиков, тов. д-ра Франтишка Кагуды, министра просвещения и культуры, на 1-ом съезде Общества чехословацких математиков и физиков. (Úvodní projev předsedy Jednoty československých matematiků a fysiků, soudruha dr. Františka Kahudy, ministra školství a kultury, na I. sjezdu Jednoty československých matematiků a fysiků), Pokroky matematiky, fysiky a astronomie, 1959, **4**, No 4, 385—393 (чешск.)

1-го и 2-го апреля 1959 г. состоялся первый съезд Общества чехословацких математиков и физиков (ОЧМФ) в Праге. Съезд происходил после реорганизации Общества. Во вступительном докладе приводятся: а) некоторые замечания по поводу деятельности ОЧМФ за истекшие три года; б) перспективный план деятельности ОЧМФ в будущем, подготовленный с целью решения двух главных задач: 1) развития математических и физических наук и научной жизни в ЧСР; 2) активной помощи членов ОЧМФ при решении школьных проблем, касающихся преподавания математики и физики в школах всех типов. J. Holubář

9835. Задачи и направленность математических и физических научных дисциплин. Новак (Úkoly a zaměření matematických a fysikálních vědních oborů. Novák Josef), Věstník ČSAV, 1959, **68**, No. 4, 450—456 (чешск.)

В мае 1959 г. состоялось заседание пленума ЧСАН. В дискуссии выступил с докладом председатель 1-й секции (математико-физической) академик Новак; он докладывал о задачах перспективного плана чехословацких научных работников следующих дисциплин: математики, физики, астрономии, геофизики, а также геодезии и метеорологии. В организационном плане он развил мысль об учреждении общегосударственного научного совета и общегосударственных комиссий для отдельных научных дисциплин. J. Holubář

9836. Наука и классификация. Бет (Science and classification. Beth E. W.), Synthese, 1959, **11**, № 3, 231—244 (англ.)

Предлагается схема классификации наук, в которой в рубрику формальных наук входит математика — абстрактная онтология и логика — формальная методология. Считается, что дисциплиной, изучающей в общем виде проблему классификации наук, является наука, которую можно назвать как логикой, так и математикой. Чистая логика (или математика) рассматривает системы лишь абстрактно, отвлекаясь от их конкретных приложений. Простейшей шкалой классификации является ли-

нейная шкала. Комбинированием двух или многих линейных шкал получаются многомерные шкалы. В бесконечной дихотомии классификация основывается на бесконечной последовательности характеристик C_1, C_2..., C_K,...; наличие характеристики выражается числом 1, отсутствие — числом 0. Тот или иной случай отмечается бесконечной дробью, написанной по двоичной системе. Однако для полного соблюдения однозначности предпочтительнее троичная система, при использовании которой наличие данной характеристики будет отмечено знаком 2, а отсутствие — знаком 0. Рассматривается случай зависимости друг от друга различных характеристик. Вопрос связывается с использованием булевой алгебры, с гёделевским доказательством теоремы о полноте элементарной логики. В заключение рассматривается вопрос относительно классификации в рамках предметов, принадлежащих к высшим типам вдоль «иерархии типов». Л. П. Гокиели

9837. Относительно метафизики в математике. Вейль (De la métaphysique aux mathématiques. Weil André), Sciences (France), 1959, **1**, № 1, 52—56 (франц.)

Автор называет метафизикой в математике совокупность смутных аналогий, трудно формулируемых, но играющих тем не менее значительную роль в математических исследованиях и открытиях. В этом смысле трактуются выражения «метафизика исчисления бесконечномалых», «метафизика теории уравнений» и т. д., употребляемые математиками XVIII в. Ничто, по мнению автора, не является более плодотворным и доставляющим радость познания, чем подобные аналогии, хотя неписанный закон современной математики и запрещает явно высказывать подобного рода метафизические предположения. Приводятся примеры указанных аналогий из истории математики. Там, где Лагранж видел аналогии, мы видим теоремы, которые могут быть выражены с помощью понятий и «структуры». Например, математические объекты, фигурирующие в виде осмысленных понятий: групп, тел, изоморфизма, автоморфизма и т. п.— Лагранжем лишь предчувствовались. У Галуа это уже делается математическими средствами. Указывается на аналогии между исчислением конечных разностей и дифференциальным исчислением, алгебраическими числами и алгебраическими функциями одной переменной и т. д., а также на роль аналогий в преподавании математики. Л. П. Гокиели

9838. Математика и будущее науки. Стоун (Mathematics and future of science. Stone Marshall H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **63**, № 2, 61—76 (англ.)

9839. Кибернетика и ее математические основы (La cibernetica e i suoi fondamenti matematici), Tecn. ital., 1957, **22**, № 8, 549—560 (итал.)

9840. Кибернетика и ее математические основы. Теория информации и теория регулирования. Ч. I, II (La cibernetica e i suoi fondamenti matematici. Teoria delle informazioni e teoria della regolazione. I, II Parte), Quaderni studi e notizie, 1957, **13**, № 252, 709—714; № 253, 747—754 (итал.)

9841. Основы кибернетики. Корреа-ди-Маттус (Fundamentos de cibernética. Corrêa de Mattos Hatoldo), Engen., miner. e metalurgia, 1958, **27**, № 159, 141—146 (порт.)

9842. Типы и среды. Хиж (Types and environments. Hiž H.), Philos. Sci., 1957, **24**, № 3, 215—220 (англ.)

Попытка построения алгебры типов и алгебры сред (окружения). Тип, в понимании автора, очень широкое понятие. Например, типами являются и революция в исторической науке и звук в лингвистике. Введены символы и их свойства. Примеры только лингвистические, содержание их элементарно. Л. Е. Майстров

9843. Заметка о геометризации биологии. Рашевский (A note on the geometrization of biology. Rashevsky N.), Bull. Math. Biophys., 1957, **19**, № 3, 201—204 (англ.)

Автор предложил некоторый класс топологических моделей живого организма, так называемого Λ-пространства (Rashevsky N., Bull. Math. Biophys., 1956, **18**, 31—56). Подпространство M пространства S называется Λ-пространством, если имеется предписание, по которому удаление некоторого множества точек N из M влечет разделение $S - M$ на какие-то два класса точек K_1 и K_2. Приводился пример (S — плоскость, M — граф в форме буквы «Н»), в котором $(M—N)$ UK_1 гомеоморфно M. В настоящей заметке показано, что в данном примере свойство M быть Λ-пространством зависит от выбора S, подпространством которого M является. Биологическая интерпретация: M — организм, S — среда, N — части организма, теряемые им (например клетки, которые разрушаются, освобождая энергию, необходимую для существования организма), а K_1 — элементы окружения, ассимилируемые живым организмом. В. К. Детлов

9844. Заметка об интересной проблеме в топологической биологии. Рашевский (Remark on an interesting problem in topological biology. Rashevsky N.), Bull. Math. Biophys., 1957, **19**, № 3, 205—208 (англ.)

Автор предложил ранее (Rashevsky N., Bull. Math. Biophys., 1954, **16**, 317—348) схематическое описание взаимной связи различных биологических функций живого организма при помощи направленного графа. Например, от вершины, соответствующей процессу еды, идет ребро к вершине, соответствующей пищеварению. Рассматривалось некоторое естественное с биологической точки зрения отображение графов высших организмов на немногочисленные графы самых примитивных организмов. Если при этом биологические функции (вершины графа) f_i и f_j отображаются на функцию f, то считается, что орган или клетка примитивного организма, выполняющие f_0, в процессе развития приобрели способность выполнить f_i и f_j (например, f_0 — восприятие света, f_i — различение цвета, f_j — зрительное распознавание формы). В настоящей заметке отмечается, что иногда функцию f_k в одном высшем организме выполняет орган, возникший из одного праоргана f_0, примитивного организма, а в другом — орган, возникший из другого праоргана $f_0' \neq f_0$. Но, вероятно, не всякий праорган может «освоить» любую функцию. Высказывается гипотеза, что клетка или орган, выполняющие в высшем организме функцию f_1, могут приспосабливаться для выполнения другой функции f_2 в точности тогда, когда существует два гомотопных отображения графа высшего организма на граф примитивного организма таких, что в одном f_1 отображается в f_0: $(f_1 \to f_{01})$ и $f_2 \to f_{02}$, а в другом либо f_1, $f_2 - f_{01}$, либо f_1, $f_2 \to f_{02}$, либо $f_1 \to f_{02}$ и $f_2 \to f_{01}$. Конкретные примеры не приводятся. В. К. Детлов

9845. Наука и технический прогресс. Федорченко И. М., Вестн. АН СССР, 1959, № 11, 58—64

9846 К. Библиографические источники по математике и механике, изданные в СССР за 1917—1952 гг. Сост. Лукомская А. М., М.-Л., АН СССР, 1957, 354 стр., 11 р. 10 к.

9847 К. Математика и опыт. Фреше (Las matemáticas y lo concreto. Fréchet Mauricio. Trad. Mexico, Univ. nac. autónoma México, 1958, 488 p., 50 pesos) (исп.)

9848 К. Избранные мемуары по геометрии, опубликованные при содействии Национальной Академии. Т. 2. 1899—1910 гг. Энрикес (Memorie scelte di geometria, pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei. Vol. 2. 1899-1910. Enriques Federigo. Bologna, N. Zanichelli, 1959, 535 p., 8000 L.) (итал.)

9849 К. Сборник статей по прикладной математике. Численный анализ. (Symposia in applied mathematics. Numerical analysis. McGraw Hill, 1956, 9.75 doll.) (англ.)

9850 К. Математические методы в технике высоких частот. Пёшль (Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik. Pöschl Klaus. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1956, VIII, 331 S., 36.00 DM) (нем.)

9851 К. Применение финансовой математики для изучения смет и сельскохозяйственной экономики. Микьели (Applicazioni di matematica finanziaria per lo studio dell'estimo e dell'economia agraria. Michieli Igino. Bologna, Ed. agric., 1959, 142 p., ill., 1000 L.) (итал.)

9852 К. Кибернетика или контроль и связь в животном и машине. Винер (Cybernetics or control and communication in the animal and the machine. Wiener Norbert (Actual. scient. et industr., № 1053). Paris, Hermann, 1958, 195 p., ill., 1200 fr.) (англ.)

9853 К. Масштабы и пределы математического мышления. Беккер (Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise. Becker Oskar. Freiburg-München, Alber, 1959, 174 S., 12.80 DM) (нем.)

9854 К. Гармоническая теория. Логика простоты. Ламуш (La théorie harmonique. Logique de la simplicité. Lamouche André. Paris, Dunod, 1959, XXXV, 536 p., ill., 3800 fr.) (франц.)

9855 Ж. Эс-Ай-Эй-Эм ривью (SIAM Review (SIAM Rev.). Ed. Wisner Robert J. Philadelphia, Pa, Soc. Industr. and Appl. Math., semiannual, subscription price 5.00 doll. per year) (англ.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

9856. Семинар по истории математических наук продолжает свою работу. Пясковский (Семінар з історії математичних наук продовжує свою роботу. Пясковський Б. В.), Доповіді АН УРСР, 1960, № 1, 119—121 (укр.)

Семинар работает при институте математики АН УССР уже 4 года. Руководит им. акад. И. З. Штокало. В нем активно работают математики из различных городов УССР. Установлены научные связи с научным семинаром Московского университета. Вышел 1-й выпуск «Историко-математического сборника», подготовленного семинаром. К. А. Рыбников

9857. История распространения арабских цифр в Китае. Янь Дунь-цзе, Шусюэ тунбао, 1957, № 10, 1—4 (кит.)

В VIII в. в Китае было напечатано сочинение «Кай юань дянь цзин», в котором содержался индийский календарь с индийскими цифрами. Их изображения в ныне существующем издании не сохранились, однако из текста понятно, что нуль изображался точкой. Индийские цифры в старинном Китае не привились. Арабские цифры проникли в Китай в XIII—XIV вв., когда литература на арабском языке была в Китае широко распространена. Недавно была обнаружена железная доска того времени с выгравированным на ней магическим квадратом, содержащим восточно-арабские цифры, но нуль обозначался не точкой, а кружком (китайское обозначение нуля), цифра 5 имела отличное от обычного написание. В то же время китайцы заимствовали у арабов счет на абаке, но употребляли при этом китайские цифры. Современные индо-арабские цифры начали входить в обиход в Китае лишь в конце XIX — начале XX вв., когда в большом количестве появилась переводная литература по математике. Э. И. Березкина

9858. Развитие математики в Китае. Ли Янь, Шусюэ тунбао, 1959, № 10, 5—11 (кит.)

Очерк истории математики в Китае с древних времен до наших дней. Говоря о XII в., автор приводит список греческих сочинений по математике, которые переводились на китайский язык (среди них имена Евклида, Архимеда, Аристотеля, Менелая, Паппа, Герона). Дан обзор математической литературы XVIII—XIX вв., написанной как китайскими учеными, так и совместно с миссионерами. Сообщается о деятельности Китайского народного правительства в области математики после 1949 г. Э. И. Березкина

9859. Новое издание книги Ли Яня «История китайской математики». Симидзу, J. History Sci. Japan, Кагакуси кэнкю, 1956, № 38, 33—35 (японск.)

9860. Некоторые этапы в истории математики. Маруяма, J. History Sci. Japan, Кагакуси кэнкю, 1956, № 38, 1—9 (японск.)

9861. Арифметика индейских племен Чокто и Чероки. Брэдли (Choctaw and Cherokee arithmetics. Bradley A. Day), Scripta Math., 1957, 22, № 3-4, 275—280 (англ.)

9862. История математических символов. Кишш (A matematikai szimbólumok története. Kiss László), Mat. tanítása, 1959, № 3, 75—82 (венг.)

Продолжение статьи (РЖМат, 1959, 6469). В сжатой форме приведены данные (часто в виде цитат из работ и писем древних и средневековых математиков, а также математиков новой эры: до середины прошлого века) о развитии символов: возвышения в степень, корней, логарифма, тригонометрических функций, о пользовании буквами в алгебре и в геометрии и др. К. С. Спилард

9863. Математика вавилонян. Агостини (La matematica dei Babilonesi. Agostini Amedeo), Period. mat., 1959, 37, № 4, 201—212 (исп., рез. англ.)

Автор отрицает наличие у вавилонян теории квадратных уравнений. Он считает, что абстрактная наука, которая была высоко развита у сумерийцев, вообще пришла в упадок после покорения их аккадянами. Отмечаются заслуги вавилонян в развитии астрономии и их искусство счета. Геометрия вавилонян была построена на понятии прямоугольника. А. Е. Раик

9864. Памяти Амедея Агостини. Кизини (In memoria di Amedeo Agostini. Chisini Oscar), Period. mat., 1959, 37, № 4, 245—251 (исп.)

«Математика вавилонян» — первая глава книги Агостини (1892—1958) «История античной математики», которая осталась неизданной. Краткое описание жизни и деятельности Агостини. Библ. 75 назв. по истории математики и 9 назв. публикаций. А. Е. Раик

9865. Греческая и наглядная геометрия. Бляшке В. (Blaschke W.), Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 111—130

Эти лекции, читанные В. Бляшке в 1952 г. в Гамбургском университете, ни в коей мере не являются курсом, хотя бы и кратким, истории античной математики. Основная цель лекций сформулирована автором в предисловии: «Отправляясь от основополагающих вопросов, поставленных древнегреческими геометрами, я стараюсь показать, насколько эти проблемы оказались плодотворными в последующие века». В первой части автор в основном останавливается на истории проблем, связанных с «Началами» Евклида. Определения Евклида такие, как «точка есть то, что не имеет частей», «линия есть длина без ширины» и т. д., он рассматривает как первую попытку математического определения размерности. Следующий шаг в этом направлении был сделан только в XX в. Следует отметить, что автор говорит о

теории размерности Л. Брауэра и Э. Шпернера и не упоминает о П. С. Урысоне, теория которого, как отмечает в примечании редактор, наиболее близка к Евклиду. Автор предлагает интересное толкование аксиомы Евклида «совмещающиеся друг с другом равны между собой», как попытки ввести понятие равенства, инвариантное относительно движения. Развитие этих идей Евклида можно усмотреть в работах Ф. Клейна и С. Ли. Наконец, автор подробно останавливается на истории трех проблем наглядной геометрии, связанных с «Началами»: 1) проблемы определения правильных многоугольников, которые могут быть построены циркулем и линейкой, 2) так называемой теоремы Декарта — Эйлера, устанавливающей связь между числом вершин, ребер и граней многогранников, которая была замечена Евклидом для пяти правильных тел, 3) предложения Евклида о том, что «две поверхности конгруэнтны, если они ограничены конгруэнтными гранями». Доказательство этой последней теоремы, верной только для выпуклых многогранников, принадлежит Коши. Автор отмечает, что аналогичные предложения, относящиеся к выпуклым поверхностям, были недавно получены А. Д. Александровым и А. В. Погореловым. Автор подчеркивает, что «здесь перед нами пример идеи Евклида, которая вплоть до настоящего времени двигала геометрию». И. Г. Башмакова

9866. Греческая и наглядная геометрия. §§ 6—13. Бляшке В., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 101—138

Начало статьи см. реф. 9865. В настоящей части дано обозрение ряда геометрических трудов Архимеда, Аполлония, Зенодора, Паппа и некоторых других древнегреческих математиков. Изложение связано с развитием рассматриваемых идей в математике нового времени. Ю. М. Гайдук

9867. Развитие теории отношений Насирэддином. Мамедбейли Г. Д., Физ. вә рijазијјат инст. әсәрләри АзәрбССР Елмләр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 194—208 (рез. азерб.)

Работа почти дословно совпадает с III главой книги автора «Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных линий и теории отношений» (Баку, 1959). Рассматривается теория отношений Насирэддина Туси (1201—1274) в его «Изложении Евклида» и «Трактате о полном четырехугольнике». Развивая идеи Омара Хайяма, Насирэддин сделал важный шаг вперед в деле внедрения понятия вещественного числа, что, в свою очередь, оказало существенное влияние на математиков Западной Европы. По ряду вопросов автор полемизирует с Ф. А. Касумхановым (Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1954, 1, 128—145). Неверно утверждается, что в странах Ближнего и Среднего Востока арифметика дробей стала развиваться только после появления работ Насирэддина: на самом деле арифметика дробей подробно излагалась еще в арифметическом трактате Абу-ал-Вафы (X в.).

В работе много опечаток. Б. А. Розенфельд

9868. Вызовы на математические состязания Лудовико Феррари и контрвызовы Николо Тартальи. Дипаскуале (I cartelli di matematica disfida di Ludovico Ferrari e i controcartelli di Nicolò Tartaglia. Di Pasquale Luigi), Period. mat., 1957, 35, № 5, 253—278; 1958, 36, № 3, 175—198 (итал.)

Описываются шесть вызовов на соревнование по решению задач между Н. Тартальей и Л. Феррари в 1547 и 1548 гг. Кроме описания обстановки соревнований, в статье приводится целый ряд предлагавшихся с обеих сторон задач и в отдельных случаях указывается способ решения их. Интерес представляют геометрические задачи, решаемые одним фиксированным раствором циркуля. Вопроса об оценке поведения спорящих сторон, о чем обычно говорится в исторических обзорах этих событий, автор не касается, ограничиваясь, согласно его заявлению, великим вкладом, который упомянутые математики внесли в науку. И. Я. Депман

9869. Из истории двоичной системы счисления. Бирман (Aus der Geschichte der Dyadik. Biermann Kurt.-R.), Techn. Rundschau, 1959, 51, № 49, 27, 29 (нем.)

Автор отмечает, что высказывания о двоичной системе встречаются у Гарриота (1560—1621), у Ф. ван Штукена (1615—1660) и др. Лейбниц первый в 1707 г. обратил внимание широких кругов ученых на применение двоичной системы. Лейбниц придавал большое значение своему открытию и признавал преимущества двоичной системы по сравнению с другими системами в теоретических исследованиях. Автор, используя примеры Лейбница, дает простую схему для выполнения арифметических операций над числами в двоичной системе методом «дополнения». А. Е. Раик

9870. Арифметики Силобода и Зоричича. Дадич (Silobodova i Zoričičeva aritmetika. Povodom dvjestogodišnjice prve hrvatske aritmetike. Dadić Žarko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, 13, № 4, 281—286 (серб-хорв., рез. англ.)

Двести лет назад, в 1758 г., М. Силобод Большич написал первый в Кроатии учебник по арифметике. Через 8 лет, в 1766 г., М. Зоричич опубликовал другой учебник арифметики. Эти книги содержали: элементарные операции с целыми числами и с дробями, тройное правило и другие вычисления практического характера. В них начала формироваться кроатская математическая терминология. Автор утверждает, что оба учебника были оригинальными и отличались от современных им однотипных книг бо́льшей простотой изложения и систематичностью. Библ. 15 назв. К. А. Рыбников

9871. Об изданной алгебре и об алгебре в манускрипте Г. Асаки. Кымпан (Despre algebra tipărită şi cea în manuscris a lui Gh. Asachi. Cîmpan Fl.), Rev. Univ. «Al. I. Cuza» şi Inst. politehn. Iaşi, 1955, 2, № 1-2, 317—324 (рум.)

9872. Исторические основы инфинитезимального исчисления. Вреденде́йн (Historische achtergronden van de infinitesimaalrekening. Vredenduin P. G. J.), Faraday, 1958, 28, № 2, 22—36 (гол.)

Обстоятельный обзор истории вопроса. Излагается трактовка анализа бесконечных у Кавальери, Кеплера, Ферма, Паскаля, Барроу, Лейбница и Ньютона. И. Я. Депман

9873. О понятии, методе, изложении и источниках математического анализа. Куэста (Sobre concepto, método, enseñanza y fuentes del análisis matemático. Cuesta N.), Rev. mat. hisp.-amer., 1958, 18, № 3, 87—98 (исп.)

Очерк развития перечисленных понятий, доведенный до наших дней. Упоминаются некоторые достижения испанских математиков (Кахаль). И. Я. Депман

9874. Исследования Леонарда Эйлера по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. Симонов Н. И., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1959, 28, 138—187

В соответствии с объемом работы автор ограничивается рассмотрением лишь основных направлений в исследованиях Эйлера по теории дифференциальных уравнений и отдельных, наиболее интересных его результатов. Статья состоит из трех частей. В первой кратко характеризуются новые задачи анализа, возникшие на рубеже XVII и XVIII вв. в связи с развитием естествознания и техники; выделяются в качестве основных направлений теории обыкновенных дифференциальных уравнений в XVIII в.: интегрирование нелинейных уравнений 2-го порядка и их систем; теория линейных дифференциальных уравнений, преимущественно 2-го

порядка, и систем таких уравнений как с постоянными, так и с переменными коэффициентами; разработка численных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений; изучение особых решений. Автор останавливается на начальном периоде теории уравнений математической физики и показывает, что вклад Эйлера в теорию дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, еще не полностью освещен и является более значительным, чем это представлялось до последнего времени.

Вторая часть работы об исследованиях Эйлера по теории обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из четырех параграфов, в соответствии с указанными выше основными направлениями в этой области. Отметим здесь рассмотрение проблемы единственности решения по начальным условиям у Эйлера; некоторых малоизвестных применений у Эйлера метода интегрирующего множителя; условия обрыва степенных рядов, дающих решение линейных дифференциальных уравнений; анализ приближенных методов Эйлера.

В третьей части работы рассматриваются исследования Эйлера по уравнениям с частными производными. Показано, как применявшиеся здесь методы возникали из методов теории обыкновенных уравнений и видоизменялись в силу новых постановок задач. Доказывается, что работы Лагранжа в этой области теснее примыкают к исследованиям Эйлера, чем это считали до сих пор. Автор в заключение указывает, что вопрос о дальнейшем развитии эйлеровых результатов затронут им очень кратко и что этот вопрос представляет большую самостоятельную тему. И. Б. Погребысский

9875. Леонард Эйлер и принцип наименьшего действия. Полак Л. С., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1957, **17**, 320—362

9876. Первые руководства и монографии по теории множеств. Медведев Ф. А., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1959, **28**, 237—249

Статья начинается краткой характеристикой начального периода теории множеств — ее становления как отдельной математической дисциплины. Подчеркивается различие между абстрактной теорией множеств и теорией точечных множеств и то, что они быстро отделились и приобрели самостоятельное значение. Дальнейшее изложение целиком посвящено теме, указанной в заглавии, и доведено, примерно, до 1908 г., когда «с работ Цермело по аксиоматизации теории множеств начинается новый период ее развития». Анализируются монографии и обзоры рассматриваемого периода, полностью или частично трактующие теорию множеств, в том числе книга Gessenberg G., Grundbegriffe der Mengenlehre, 1906; и оставшаяся фактически незамеченной монография В. Л. Некрасова «Строение и мера линейных точечных множеств» (Томск, 1907).

И. Б. Погребысский

9877. Математика в Казахстане за советские годы. Жаутыков О. А., Тр. Сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, 1, 5—24

9878. Развитие физико-математических наук в Узбекистане за годы Советской власти (1917—1957 гг.) УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, № 4, 5—14

9879. Ведущие американские статистики в XIX столетии. I, II. Фиц-Патрик (Leading american statisticians in the nineteenth century. I, II. Fitz Patrick Paul J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 279, 301—321; 1958, **53**, № 283, 689—701 (англ.)

В кратком введении указаны основные источники. Затем освещена научная деятельность в области статистики следующих лиц: Шеттак (1793—1859), Джервиз (1803—1884), Дебоу (1820—1867), Уокер (1840—1897), Майо-Смит (1854—1901), Райт (1840—1909), Пиджин (1844—1923). Библ. 63 назв.

Во II-й части рассматривается научно-статистическая деятельность следующих лиц: Такер (1775——1861), Менсфильд (1801—1880), Кенеди (1813—1887), Ситон (1831—1885), Портер (1852—1917), Фолкнер (1866—1940). Библ. 37 назв.

9880. Заметки о некоторых средневековых латинских астрономических, астрологических и математических рукописях в Ватикане. I. Торндайк (Notes upon some medieval Latin astronomical, astrological and mathematical manuscripts at the Vatican. Part I. Thorndike Lynn), Isis, 1956, **47**, № 4, 391—404 (англ.)

Описаны преимущественно астрономические рукописи. Заметка является одним из дополнений к сводному перечню, изданному автором вместе с П. Кибр (Kibre) в 1937 г. В. П. Зубов

9881. Заметки о некоторых средневековых латинских астрономических, астрологических и математических рукописях во Флоренции, Милане, Болонье и Венеции. Торндайк (Notes upon some medieval astronomical, astrological and mathematical manuscripts at Florence, Milan, Bologna and Venice. Thorndike Lynn), Isis, 1959, **50**, № 1, 33—50 (англ.)

Продолжение (реф. 9880).

9882. Дирихле. Давенпорт (Dirichlet. Davenport H.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 346, 268—269 (англ.)

Статья в память 100-летия со дня смерти Г. П. Л. Дирихле (1805—1859).

9883. Иоганн Генрих Ламберт. Его значение в естествознании XVIII в. Бергер (Johann Heinrich Lamberts. Bedeutung in der Naturwissenschaft des 18. Jahrhunderts. Berger Peter), Centaurus, 1959, **6**, № 2, 157—254 (нем.)

Обстоятельное исследование научного наследия Ламберта (1728—1777) по опубликованным и архивным источникам. Основное внимание уделено характеристике натурфилософских воззрений и методов Ламберта. Математические открытия Ламберта: доказательство иррациональности числа π, работы по теории перспективы, сферической тригонометрии, алгебраическим уравнениям, употребление гиперболической функции — не освещены. Рассмотрены лишь его высказывания по теории параллельных линий. К. А. Рыбников

9884. Избранные труды Джузеппе Пеано. Сегре (Le opere scelte di Giuseppe Peano. Segre Beniamino), Archimede, 1958, **10**, № 1, 38—40 (итал.)

9885. Вильям Роуэн Гамильтон. Мак-Коннелл (William Rowan Hamilton. McConnell A. J.), Advancement Sci., 1958, **14**, № 56, 323—332 (англ.)

9886. Льюис Карл Силбак. 1884—1958. (Lewis Carl Seelbach. 1884—1958), Duodecimal Bull., 1958, **12**, № 2, 39—40 (англ.)

Некролог одного из поборников 12-ричной системы.

9887. Памяти Витольда Гуревича (1904—1956). Лефшец (Witold Hurewicz, in memoriam. Lefschetz Solomon), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **63**, № 2, 77—82 (англ.)

9888. Жорж Дармуа (1888—1959). (Некролог). Данжон (Notice nécrologique sur Georges Darmois. Danjon André), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 2, 241—245 (франц.)

9889 К. Краткая история математики. Стройк (A matematika rövid törnénete. Struik Dirk J. Angolból ford. Budapest, Gondolat kiadó, 1958, 219 ol., ill.) (венг.)

Перевод с английского (РЖМат, 1956, 1908), дополненный письменными сообщениями автора, основанными на замечаниях А. П. Юшкевича и других. Библиография также дополнена трудами русских и советских авторов. P. Medgyessy

9890 К. Фигурные числа в арифметике пифагорейцев. Мишель (Les nombres figurés dans l'arithmétique pythagoricienne. Michel P.-H. Conf. Palais découv. Univ. Paris, 1958, D, № 56, 23 p., ill.) (франц.)

Очерк, в котором разъясняется часть математических исследований древних греков, связывающая последовательности целых чисел с точечными решетками различных конфигураций как плоских, так и пространственных. Брошюра входит в серию популярных изданий по логическим и историческим основам науки, выпускаемую Парижским университетом. К. А. Рыбников

9891 К. Наследие греков. Данциг (The bequest of the Greeks. Dantzig Tobias. New York, Charles Scribner's Sons, 1955, 191 pp., 3.95 doll.) (англ.)

9892 К. Математическая школа Бернулли в Базеле на заре XVIII века. Флеккенштейн (L'école mathématique baloise des Bernoulli à l'aube du XVIIIe siècle. Fleckenstein J. O. Conf. Palais découv. Univ. Paris, 1959, D, № 62, 21 p., ill.) (франц.)

Обзор научной деятельности нескольких талантливых математиков — членов семейства Бернулли,— охватывающий 4 поколения (от середины XVII в. до середины XIX в.) К. А. Рыбников

9893 К. Приятные и занимательные задачи. Баше, Лабон (Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Bachet Claude-Gaspar. 5ème ed. rev., Simpl. et augm. par A. Labosne. Paris, Libr. scient. et techn. Albert Blanchard, 1959, VIII, 243 p.) (франц.)

Пятое издание известного трактата Баше де Мезириака (1581—1638) по теории чисел (впервые вышел в свет в 1612 г.), где трудные задачи облечены в изящную форму. В этом сочинении Баше дал впервые общую теорию неопределенных уравнений 1-й степени, а также решил много задач о магических квадратах и др. К. А. Рыбников

9894 К. Программы конгрессов и коллективные труды, имеющиеся в библиотеке Института им. Анри Пуанкаре (Кабинет отделения математических наук). Эстев (Répertoire des congrès et des ouvrages collectifs figurant à la bibliothèque de l'institut Henri Poincaré (Cabinet du département des sciences mathématiques). Estève Madeleine. Docum. math., 1956, № 34, 94 p.) (франц.)

9895 К. Собрание сочинений. Лузин Н. Н. Т. 3. Работы по различным вопросам математики. Отв. ред. Сретенский Л. Н. М., АН СССР, 1959, 507 стр., илл., 25 р. 25 к.

Часть тома составляют статьи Н. Н. Лузина по математическому анализу, дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений. Другая часть включает в себя работы автора по истории математики, в большинстве посвященные анализу математических работ И. Ньютона. Сопроводительные статьи включают в себя биографию Н. М. Лузина, написанную Н. К. Бари и В. В. Голубевым, статьи, в которых разобраны математические исследования Н. Н. Лузина, а также список проблем, поставленных им в период подготовки диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд». В конце — список научных трудов Н. Н. Лузина. К. А. Рыбников

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

9896. Итоги сорокалетнего развития математического образования в СССР. Андронов И. К., Матем. в школе, 1957, № 5, 6—21

9897. Выше уровень математической подготовки учащихся в общеобразовательной школе. Матем. в школе, 1958, № 4, 1—4

9898. Развитие высшего технического образования в Молдавии. Калистру, Келэреску, Корлэцяну, Фэркаш, Манжерон, Унгуряну (Dezvoltarea învăţămîntului tehnic superior din Moldova. Calistru C., Chelărescu Al., Corlăţeanu V., Fărcaş Toma, Mangeron D., Ungureanu Gh.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1955, 1, № 1-2, 547—555 (рум.)

9899. В объединенном научно-методическом семинаре кафедр математики московских втузов. Цлаф Л. Я., Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 227—231

О предыдущих сообщениях см. РЖМат, 1959, 1146.

9900. Построение геометрии при преподавании ее в высших школах. Фладт (Der Aufbau der Geometrie im Unterricht der hoheren Schule. Fladt K.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957—1958, 10, № 4, 155—159 (нем.)

9901. О преподавании математики в педагогических институтах. Юсупов А., Ягудаев Б. (Педагогика институтларида математикани ўқитиш ҳақида. Юсупов А., Ягудаев Б.), Совет мактаби, 1957, № 12, 39—43 (узб.)

9902. О преподавании элементарной математики в педагогических институтах. Хацет Б. И., Шмульян Ю. Л., Матем. в школе, 1958, № 2, 20—24

9903. Заключительный курс математики. Мозер (A terminal course in mathematics. Moser Leo), Canad.Math. Bull., 1958, 1, № 2, 129—133 (англ.)

В университете Альберта (Канада) введен на 1-м семестре курс математики (по 3 часа в неделю) для студентов не математиков. Курс этот имеет целью помочь составить более правильное представление о математике. Начинается курс с основных понятий топологии для показа того, что математика рассматривает не только те вопросы, которые входят в программу средней школы. Учащиеся знакомятся при этом с формулой Эйлера о многогранниках, задачей четырех красок, кривой Жордана, ориентируемостью поверхностей, односторонними поверхностями и т. д. Затем рассматриваются основные законы арифметики, метод математической индукции, проблемы простых чисел, некоторые знаменитые задачи теории чисел, понятие группы и поля на целых числах, биномиальную теорему, некоторые вопросы комбинаторики, одно-однозначную зависимость. Второй семестр начинается с пересмотра и дополнения школьных сведений об евклидовой геометрии, включая проблему Дэна (имя В. Ф. Кагана не упоминается — *Реф.*) и основные сведения о конических сечениях. Следующий раздел составляют экстремальные задачи, геодезические линии, изопериметрическая проблема, включая теорему Штейнера. Рассмотрение проблем аналитической геометрии в пространстве дает возможность коснуться вопросов об n-мерной геометрии. Заканчивается этот раздел курса аксиоматическим подходом к геометрии и некоторыми идеями финитной проективной геометрии. Заключительный раздел всего курса автор посвящает понятиям анализа бесконечных, ограничиваясь при дифференцировании и интегрировании полиномами.

Программа меняется из года в год, главным образом в связи с запросами студентов. Основным руководством служила книга Куранта и Роббинса «Что такое математика?». Студенты считают ее слишком трудной, поэтому предполагалось заменить ее аналогичной книгой Ричардсона (РЖМат, 1959, 8674К). Указывается еще 27 пособий. И. Я. Депман

9904. XX школьная математическая олимпиада в Москве. Олейник О. А., Кириллов А. А., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 221—227

Отчет о работе механико-математического факультета Московского университета и Московского математического общества со школьниками в 1956/57 гг. (кружки, лекции, олимпиада). В. И. Арнольд

9905. VIII математическая олимпиада. Задачи, данные в 3-м туре (VIII olimpiada matematyczna. Zadania na zawody III stopnia), Matematyka, 1957, **10**, № 3, 44—45

9906. Псевдологарифмы. Ларсен (Pseudo logarithms. Larsen Harold D.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 1, 2—6 (англ.)

Псевдологарифмами автор называет числа (отличные от логарифмов), дающие возможность при вычислениях заменять умножение сложением, а деление — вычитанием. Приведены четыре примера псевдологарифмов:

1. Простафереттический метод. Основан на тождестве $\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\sin P - \sin Q)$, где $P = 90° - (A - B)$; $Q = 90° - (A + B)$. Вычисление произведения сводится к четырехкратному использованию таблицы синусов. Показано, как применять этот метод в случае, когда множители выходят за пределы интервала от 0 до 1.

2. Квадраты натуральных чисел. Используется формула $mn = x^2 - y^2$, где $x = \frac{1}{2}(m + n)$; $y = \frac{1}{2}(m - n)$.

3. Треугольные числа. Треугольные числа задаются равенством $T_n = n(n + 1)/2$. Основное соотношение $mn = T(m + n) - T(m) - T(n)$.

4. „Четверти квадратов". „Четвертью квадрата" здесь называется число Q, определяемое формулой

$$Q = Q(N) = \begin{cases} a^2 & (N = 2a), \\ a^2 + a & (N = 2a + 1). \end{cases}$$

Имеют место равенства: $Q(2k) - Q(2k-1) = Q(2k+1) - Q(2k) = k$. Основное соотношение: $mn = Q(m + n) - Q(m - n)$. Приведены таблицы треугольных чисел и «четвертей квадратов», соответствующих целым значениям n от 0 до 199. Показано, как применять методы 2, 3, 4 при дробных значениях сомножителей. Приведены краткие и неполные исторические справки.

А. Я. Маргулис

9907. О попытках доказательства V постулата Евклида в курсе «Основания геометрии». Брыков А. И., Уч. зап. Чечено-Ингушск. гос. пед. ин-та, 1958, № 8, 65—98

Краткое изложение истории V постулата Евклида и попыток его доказательства по различным источникам на русском языке (26 назв.). Рекомендуется излагать историю V постулата в начале курса «Основания геометрии» в педагогических институтах. Б. А. Розенфельд

9908. Конкретная база абстрактного. Сойер (The concrete basis of the abstract. Sawyer W. W.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 4, 272—277 (англ.)

Для современной промышленности и науки требуется большое число математиков. Ввиду практической важности математики встает вопрос об улучшении обучения и об изменении содержания программ по математике. Комиссия математиков рекомендует введение постулатов на первом году обучения алгебре. Автор поднимает вопрос: как вводятся аксиомы в алгебре? По мнению автора, нужно следовать пути: от наблюдения к аксиомам.

Н. П. Бибикова

9909. О некоторых вопросах методики преподавания обыкновенных дифференциальных уравнений. Санин А. И., Научн. зап. Львовск. с.-х. ин-та, 1958, 8, 248—258

Общие указания и распределение материала по лекциям в курсе дифференциальных уравнений первого и выше первого порядка. Рассматриваются уравнения 1 порядка, не разрешенные относительно производной, и системы линейных уравнений, которые решаются методом интегрируемых комбинаций. А. Г. Школьник

9910. Методика преподавания темы «Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений». Санин А. И., Научн. зап. Львовск. с.-х. ин-та, 1958, 8, 235—247

Указанной теме предлагается посвятить во втузе 2 лекции и 2 практических занятия следующего содержания: I) метод Эйлера и метод последовательных приближений; II) интегрирование с помощью степенных рядов; простейшая граничная задача для уравнения 2-го порядка; понятие о методе Чаплыгина. Дается изложение этого материала. А. Г. Школьник

9911. Об изложении линейных однородных дифференциальных уравнений. Санин А. И., Научн. зап. Львовск. с.-х. ин-та, 1958, 8, 314—323

Речь идет о преподавании, применительно к втузовской программе, общей теории линейных однородных дифференциальных уравнений и линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

А. Г. Школьник

9912. Математика для нашей эпохи. Сантало (Matematica para nuestra época. Santaló Marcelo), Rev. mat., 1959, № 5, 53—62 (исп.)

Автор исходит из того, что средняя школа не дает желательной для университетских преподавателей подготовки и что ученики проявляют мало интереса к точным наукам и особенно к математике. Чтобы обновить преподавание математики в средней школе и сделать его соответствующим требованиям нашего времени, надо учитывать тройное назначение математических дисциплин: как средства умственного развития, общекультурное и для непосредственного применения.

Автор приходит к выводам: а) в полной общеобразовательной средней школе надо считать обязательными для всех учеников только те разделы математики, которые имеют воспитательное и общекультурное значение; б) «математическую технику» надо отрабатывать только с учениками, имеющими к этому склонность, так как только они в будущем смогут ее использовать; в) необходимо отобрать те пункты в классической и современной математике, которые надо считать необходимыми во всех трех указанных выше отношениях; г) нужно ввести темы из истории науки, показывая, какие различные склады ума требуются для трактовки различных проблем. Что касается практического осуществления, указывается лишь на необходимость достаточно свободного подхода учителя к программному материалу и на то, что учитель, осознавший необходимость такой перестройки преподавания математики, сумеет найти адекватную дидактику.

Примечание референта. Автор не касается социальных корней кризиса преподавания в школе капиталистических стран. И. Б. Погребысский

9913. Новый взгляд на содержание и распределение материала по элементарной математике. Ханнон (A new look at content and its placement in elementary mathematics. Hannon Herbert), School Sci. and Math., 1959, **59**, № 8, 614—623 (англ.)

Автор рекомендует, за счет исключения менее важного материала, включить в программу 6—8 классов средней школы США: 1) Числовые системы с различными основаниями; 2) «Часовую» арифметику (т. е. арифметику классов вычетов); 3) Некоторые иллюстрации при изучении дробей, способствующие более глубокому их пониманию; 4) Введение аксиом для решения условных равенств с употреблением «если»; 5) Решение неравенств, имеющих практические приложения; 6) Отношения и пропорции; 7) Понятие предела, встречающееся в элементарной арифметике.

А. Е. Раик

9914. Полуправильные многогранники. Норкин С. Б., Матем. в школе, 1958, № 2, 1—7

Полуправильным многогранником здесь называется многогранник, гранями которого служат равные правильные многоугольники и по крайней мере один его

многогранный угол — правильный. Доказывается, что существует всего 8 типов выпуклых правильных многогранников: 5 правильных многогранников, треугольная и пятиугольная бипирамиды и многогранник с 16 треугольными гранями. Приводятся примеры полуправильных многогранников рода $\neq 0$. В доказательстве пропущен 9-й случай выпуклого полуправильного многогранника (см. поправку в реф. 9915). Б. А. Розенфельд

9915. Письмо в редакцию. Норкин С. Б., Матем. в школе, 1958, № 6, 20

Поправка к реф. 9914 с описанием 9-го выпуклого полуправильного многогранника, указанного Т. С. Удинцевым (Оренбург). Для построения этого многогранника следует заменить квадратные боковые грани правильной треугольной призмы боковыми поверхностями правильной 4-угольной пирамиды. Вносятся исправления в доказательство теоремы о числе выпуклых полуправильных многогранников. Б. А. Розенфельд

9916 К. О профессии математика. (Изд. 3-е, доп.). Колмогоров А. Н. М., Моск. ун-т, 1959, 30 стр., 55 к.

9917 К. Древо математики. Джеймс (The tree on mathematics. Ed. James Glenn. London, Holborn Publ. Co., 1959, XVII, 403 pp., ill., 42 sh.) (англ.)

9918 К. Введение в векторный анализ. Трайдос-Врубель (Wstęp do analizy wektorowej. Trajdos-Wróbel Tadeusz. Warszawa, PWN, 1959, 196 s., il., 17 zł.) (польск.)

9919 К. Как строить графики. Шилов Г. Е. М., Физматгиз, 1959, 23 стр., илл., 35 л.

Популярная лекция.

9920 К. Векторное исчисление. Брикар (Cálculo vetorial. Bricard Raoul. Trad. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1958, 184 p., il., 160,00 cruz) (порт.)

9921 К. Элементы дифференциального и интегрального исчисления. Силва—Фильо (Elementos de cálculo. Vol. I. Silva Filho M. Rio de Janeiro, Ed. Brand, 1959, 175 p., il., 120,00 cruz. Mimeogr.) (порт.)

9922 К. Курс высшей математики. [Для механ.-матем. и физ.-матем. фак. ун-тов]. Т. 5. Смирнов В. И. М., Физматгиз, 1959, 655 стр., 14 р. 50 к.

9923 К. Избранные статьи по математике. Введение в теорию множеств. Интеграл Лебега. Ряды Фурье. Кароус (Vybrané statě z matematiky. Úvod do teorie množin. Lebesgueův integrál. Fourierovy řady. Korous Josef. Praha, SNTL, 1958, 330 s., 24,60 Kčs.) (чешск.)

9924 К. Математика. Учебник для очных строительных политехникумов. Отто (Matematyka. Podręcznik dla wydziałów budowlanych politechniki. Otto Edward. Warszawa, PWN, 1959, 500 s., il., 36 zł.) (польск.)

9925 К. Практическое руководство по математике для инженеров торгового флота первого и второго класса. Дейш, Эмблтон, Сорд (Reed's practical mathematics for marine engineers, first and second class. 11th ed. Daish Herbert Henry Roberton, Embleton William, Sword Joseph H. Sunderland, Reed, 1959, IV, 1249 pp., ill., 63 sh.) (англ.)

9926 К. Технические расчеты и анализ. Райс, Найт (Technical calculus and analysis. Rice Harold Spencer, Knight Raymond M. New York—London, McGraw—Hill Publ. Co., 1959, IX, 460 pp., ill., 52sh. 6d.) (англ.)

9927 К. Краткий курс высшей математики. [Для биол.-почв., геол. и геогр. фак. ун-тов]. Изд. 2-е, переработ. и доп. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. М., Физматгиз, 1959, 432 стр., илл., 8 р. 35 к.

9928 К. Математика в финансовом деле. 5-е изд. Полидори (Matematica finanziaria, 5a ed. Polidori Ciro. Firenze, F. Le Monnier, 1959, XI, 403 p., 1500 L.) (итал.)

9929 К. Начертательная геометрия. Пособие для студ. пед. ин-тов. Панкратов А. А. М., Учпедгиз, 1959, 204 стр., илл., 4 р. 65 к.

9930 К. Лекции по высшей математике. Якоб (Lecții de matematici superioare. Iacob Caius. București, Ed. tehn., 1959, 664 p., il.) (рум.)

9931 К. Руководство для приемных экзаменов по математике на технические факультеты. Четкович (Priručnik za prijemne ispite iz matematike na tehničkim fakultetima. Red. Četković Simon. Beograd, Zavod izd. udžbenika NRS, 1959, 115 s., il., 300 din.) (сербо-хорв.)

9932 К. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Для пед. ин-тов. Изд. 2-е, переработ. Давыдов А. К. М., Учпедгиз, 1959, 152 стр., 4 р.

9933 К. Задачник по алгебре. 3 изд. Кречмар В. А. М., Физматгиз, 1959, 428 стр., 8 р. 25 к.

9934 К. Математические задачи. Экзаменационные задачи для математических институтов. (Сент. 1933—сент. 1956). Ломхольт (Matematiske opgaver. B. Eksamensopgaver fra matematisk artium: (Sept. 1933—sept. 1956). 28. udg. Lomholt A. Viborg, (Haase), 1956, 48 s., 1.75 kr.) (датск.)

9935 К. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. (Учебное пособие для вузов). Моденов П. С. М., «Сов. наука», 1957, 666 стр., илл., 21 р. 5 к.

9936 К. Сборник решенных задач из математического анализа и алгебры. I. Бертолино (Zbirka resenih zadataka iz matematicke analize s algebrom. I. Bertolino M. Beograd, Savez studenata Prirodno-matem. fak., 1959, 162 s., il.) (сербо-хорв.)

В книге имеется 102 задачи с их решениями. Большинство этих задач посвящено исследованию функций и построению их графиков. Имеется несколько элементарных задач из матричного исчисления. Некоторые из задач были использованы на приемных экзаменах на физико-математический факультет в Белграде. Приведены источники, из которых заимствовано небольшое число задач (Митринович, Станкович, Демидович, Гюнтер и Кузьмин, Берман). D. S. Mitrinović

9937 К. Решенные и нерешенные проблемы математики. Видав (Rešeni in nerešeni problemi matematike Vidav Ivan. Ljubljana, «Mlad. knjiga», 1959, 121 s., il.) (словенск.)

9938 К. Математический практикум по моделированию. Учебно-метод. пособие для студ. заочн. физ.-матем. фак. пед. ин-тов. Каченовский М. И. М., Учпедгиз, 1959, 191 стр., илл., 4 р. 30 к.

9939 К. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. Изд. 8-е, стереотип. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. М., Физматгиз, 1959, 608 стр., илл., 14 р. 30 к.

9940 К. Сборник математических формул. Фогель (Mathematische Formelsammlung. Vogel Alfred. Stuttgart, Wittwer, 1959, 24 S., ill., 1.40 DM) (нем.)

9941 К. Сборник математических формул для физиков и инженеров. VII. Уравнения в частных производных. Фреше (Formulaire de mathématiques à l'usage des physiciens et des ingénieurs. VII. Équations aux dérivées partielles. Fréchet Maurice. Paris, Centre nat. rech., scient., 1956, 116 p., 800 fr.) (франц.)

См. также: 10780 К, 10783 К — 10788 К, 10795 К, 10797 К—10801 К, 10810 К, 10812, 10815 К, 10816 К, 10820 К.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор Ю. В. Линник

9942. Некоторые замечания об оценках тригонометрических сумм. Линник Ю. В., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 3, 153—160

1. Пусть p — простое, $p_1 \leqslant p$, $\alpha_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — любые действительные числа, $P(x)$ — целочисленный полином, имеющий степень $\nu > n$ по модулю p. Автор показывает, что

$$\left|\sum_{x=0}^{p_1} \exp 2\pi i\,(\alpha_n(x) + p^{-1}P(x))\right| \leqslant c_1 c_2^n p^{1-2^{-1}}\,\nu^{\rho}\lg p,$$

где c_1, c_2 — абсолютные постоянные, $\rho = 2^{-n}$. Доказательство основано на синтезе метода И. М. Виноградова с оценками Вейля (Weil A., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1948, **34**, 204—207).

2. Пусть $p_1 \leqslant p-1$, функция $f(x, y)$ принимает целые значения для натуральных x, $y \in [1, p-1]$; $f(x, y_1) - f(x, y)$ — полином по модулю p, степени $\nu = \nu(y, y_1) \geqslant 2$ за возможным исключением числа значений y_1, не превышающего $\delta > 0$ при всяком заданном y_1, $\xi(x)$ и $\eta(x)$ — функции, принимающие, вообще говоря, комплексные значения, α — действительное число; $\sum_{x=0}^{p-1} |\xi(x)|^2 = X$;

$\sum_{y=0}^{p-1} |\eta(y)| = Y$, $|\eta(y)| \leqslant H$.

Тогда имеет место оценка:

$$\left|\sum_{x=0}^{p_1}\sum_{x=0}^{p_1} \xi(x)\,\eta(x) \exp 2\pi i\,(p^{-1}f(x, y) + \alpha xy)\right| \leqslant$$

$$\leqslant Y\sqrt{pX}\,(\delta^{1/2}\,p^{-1/2} + H^{1/2}Y^{-1/2} + (2\nu)^{1/4}\,p^{-1/4}).$$

(Левая часть тривиально не превосходит $Y\sqrt{pX}$). Полученное неравенство используется для доказательства теоремы: Пусть

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + \ldots + x_g^n &= N_n \pmod{p^\lambda} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_g &= N_1 \pmod{p^\lambda}, \end{aligned} \tag{1}$$

где простое $p > n$; $\lambda \geqslant 1$, целые $N_1, \ldots, N_n$ заданы. Система (1) разрешима для $g \geqslant c_0 n^2 \lg n$.

Н. Г. Чудаков

9943. Проблема Варинга для $g(5)$. Чэнь Цзинжунь (Waring's problem for $g(5)$. Chen Jing-jun), Sci. Rec., 1959, **3**, № 8, 327—330 (англ.)

Методом Хуа Ло-гэна устанавливается неравенство $g(5) \leqslant 40$, улучшающее результат Диксона: $37 \leqslant g(5) \leqslant 54$. Пусть N — целое $\geqslant 10^{1510}$, $P = [N^{1/5}]$, $\tau = P^{4+1/64}$,

$$T_\alpha = \sum_{x=1}^{P} \exp 2\pi i\alpha x^5,\quad I(N) = \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} T_\alpha^{16} \sum_u \sum_{u'} \exp \times$$

$\times 2\pi i\,(u + u')\exp\{-2\pi i N\alpha\}\,d\alpha$, где u и u' пробегают независимо друг от друга одну и ту же последовательность чисел, каждая из которых $< N/4$ и может быть представлена в виде $u = x_1^5 + \ldots + x_{12}^5$ с натуральными x_l. Промежуток интегрирования делится на интервалы трех родов. Основными называются интервалы, включающие все α с условиями: $\alpha = a/q + z$, $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$, $-1/q\tau \leqslant z \leqslant 1/q\tau$; $0 < q \leqslant P^{1,2}$. Интервалы, остающиеся после выделения из интервала $-\tau^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1 - \tau^{-1}$ основных интервалов, называются первыми дополнительными, если они включают α с условиями: $\alpha = a/q + z$, $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$, $-1/q\tau \leqslant z \leqslant 1/q\tau$, $P^{1/4} < q \leqslant P^{1-1/64}$. Интервалы, остающиеся после выделения из интервала $-1/\tau \leqslant \alpha \leqslant 1 - 1/\tau$ основных и первых дополнительных интервалов называются вторыми дополнительными интервалами. Положительность интеграла $I(N)$ устанавливается так: часть интеграла $I(N)$, соответствующая основным интервалам, оценивается снизу, а остальные части сверху. При этом используются леммы, приводимые без доказательства. Без доказательства приводится и утверждение, что любое натуральное число $\leqslant 10^{1520}$ может быть представлено суммой сорока пятых степеней натуральных чисел.

В. И. Нечаев

9944. Модулярные формы степени n и представления квадратическими формами. Рагхаван (Modular forms of degree n and representation by quadratic forms. Raghavan S.), Ann. Math., 1959, **70**, № 3, 446—447 (англ.)

Доказывается асимптотическая формула для $A(S, T)$-числа представлений целочисленной положительной (положительно определенной и симметричной) матрицы T n-го порядка с помощью матрицы S m-го порядка ($m > 2n+2$):

$$A(S, T) =$$

$$= \frac{\pi^{n(2m-n+1)}\,|S|^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}\,|T|^{\frac{m-n-1}{2}} \prod_{p>2} \alpha_p(S, T) +$$

$$+ O\left(|T|^{\frac{(m(2n-1)-2(n^2-1))}{4n}}\right) \tag{1}$$

при $|T| \to \infty$, четном $m > 2n+2$,

$$\alpha_p(S, T) = \lim_{\lambda\to\infty} p^{-\lambda\left(mn - \frac{n(n+1)}{2}\right)} A_p\lambda(S, T).$$

$A_p\lambda(S, T)$ — число несравнимых друг с другом целых матриц G, удовлетворяющих сравнению $G'SG \equiv T \pmod{p^\lambda}$ для $\lambda \geqslant 1$. $\alpha_p(S, T)$ — неотрицательное число. Для вывода этой формулы строятся и исследуются аналоги рядов Эйзенштейна, тэта-функций и изучаются их коэффициенты Фурье. При $n = 1$ из (1) получается асимптотическая формула Гекке для числа представлений натуральных чисел в форме $\sum_{i,j} s_{ij}x_ix_j$, где s_{ij} — элементы матрицы S.

Б. В. Левин

9945. Линейные соотношения для некоторых модулярных форм. Линт (Linear relations for certain modular forms. Lint J. H. van), Math. Nachr., 1959, **20**, № 1—2, 123—126 (англ.)

Доказывается теорема: Единственными модулярными формами типа $\{\Gamma_\vartheta, -r, v\}$, где v не является системой мультипликаторов для $\Gamma(1)$, для которых можно определить сингулярный оператор Гекке для всех p таких, что $(p, N) = 1$ (N — ступень модулярной формы) являются ϑ, η, ϑ^{12}, η^{32}, ϑ^{-12}, $\eta^{12}\vartheta^{52}$, $\eta^{32}\vartheta^{32}$, $\eta^{48}\vartheta^{-1}$. Здесь ϑ — тэта-функция Якоби $\vartheta_3(\tau)$, η — модулярная форма Римана — Дедекинда.

Б. В. Левин

9946. Исследование обобщенной тэта-функции. Субханкулов М. А., Уч. зап. Тадж. ун-та, 1958, **18**, 27—38

Автор утверждает, что при $k \leqslant n^{1/\nu}$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-y m^{\nu} + \pi i \frac{a}{k} m^{\nu}\right) =$$

$$= 2k^{-1} y^{-1/\nu}\, \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \sum_{l=1}^{k} \exp 2\pi i a k^{-1} l^{\nu} + R, \quad (1)$$

где n — любое натуральное; положительное τ зависит от n; целые a и k таковы, что $(a, k) = 1$, $a \leqslant k \leqslant \tau$, $y = n^{-1} - \pi i z$, $|\alpha| \leqslant \Theta (k\tau)^{-1}$, $|\Theta| \leqslant 1$, ν — натуральное четное, фиксировано. Остаточный член R в работе остался неоцененным, т. е. зависимость этой оценки от n не выяснена. Частный случай оценки для (1) при $\nu = 2$ автор использует при выводе асимптотических формул, выражающих $I(n)$ — число представлений натурального n в форме $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — целые. Однако полученные в работе представления для числа $I(n)$ слабее известных формул Якоби.

Н. Г. Чудаков

9947. О представлении целого числа в виде суммы простого и двух квадратов. Хули (в подлиннике Холли К.) (Hooley C.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 4, 3—22

Перевод с английского (РЖМат, 1958, 5456).

9948. О новых разбиениях чисел. II. Датта, Дебнатх (On new partitions of numbers. II. Dutta Mahadev, Debnath Lokenath), Bull. Calcutta Math. Soc., 1959, **51**, № 2, 77—78 (англ.)

Пусть ${}_dp(n)$ — число разбиений n на слагаемые, среди которых имеется не более d повторяющихся, $p_d(n)$ определяется равенством $\sum p_d(n) z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^d$. Доказывается, что ${}_dp(n) \equiv p_d(n) \pmod{d+1}$, если $d+1$ — нечетное, простое. На основании известных сравнений для $p_d(n)$ находятся новые сравнения для ${}_dp(n)$.

Б. В. Левин

9949. Распределение квадратичных вычетов и невычетов. Берджесс Д. А. (Burgess D. A.). Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 6, 3—9.

Перевод с английского (РЖМат, 1958, 8534)

9950. Несуществование некоторых эйлеровых произведений. Апостол, Човла (On the non-existence of certain Euler products. Apostol T. M., Chowla S. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1959, **32**, № 11, pp. 65—67) (англ.)

Пусть k — натуральное, $\mathrm{Re}\, s > 1$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} (kn+1)^{-s} =$$

$$= \prod_p (1 + p^{-s} f_1(p) + p^{-2s} f_2(p) + \ldots), \quad (1)$$

где p пробегает все простые числа; доказывается, что тождество (1) имеет место только для $k = 1$ и 2.

Н. Г. Чудаков

9951. Теоретико-числовые свойства полиномов. Аналог теоремы Дирихле. Грумми х (Zur Zahlentheorie der Polynome. Ein Analogen zum Dirichlet'schen Satz. Grummich Friedrich), Math. Nachr., 1959, **17**, № 3—6, 330—357 (нем.)

В работах Шпехта (РЖМат, 1954, 2862) находится число неприводимых целочисленных полиномов с нормой $\leqslant x$. В реферируемой работе выводится функциональный аналог для теоремы Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях. Пусть даны: натуральное число $m \geqslant 1$ и целочисленные, взаимно простые полиномы $B(z) = z^s + b_1 z^{s-1} + \ldots + b_s$, $C(z) = c_1 z^{s-1} + \ldots + c_s$ с фиксированным s $(1 \leqslant s \leqslant m-1)$.

Рассмотрим целочисленные полиномы $f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$ и $g(z) = z^r + t_1 z^{r-1} + \ldots + t_r$, $r = m - s$, удовлетворяющие условиям:

$$f(z) = B(z)\, g(z) + C(z), \quad (1)$$

$$N(g) = (1 + t_1^2 + \ldots + t_r^2)^{1/2} \leqslant x. \quad (2)$$

Пусть $K_{ms}(x)$ — число всех полиномов, $R_{ms}(x)$ — число приводимых и $I_{ms}(x)$ — число неприводимых над полем рациональных чисел полиномов $f(z)$, удовлетворяющих условиям (1) и (2). Асимптотические оценки для $R_{ms}(x)$ получаются при помощи рассмотрения множества пар целочисленных полиномов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ (степени $\geqslant 1$), для которых $f(z) = f_1(z) f_2(z)$. Оценки для $I_{ms}(x)$ следуют из формулы $I_{ms}(x) + R_{ms}(x) = K_{ms}(x)$, где $K_{ms}(x) = \alpha_r x^r + O(\psi_r(x))$ — число целых точек внутри и на поверхности r-мерного шара радиуса $(x^2 - 1)^{1/2}$. Общие оценки получаются в случае, если s относительно мало по сравнению с m. Частные оценки получаются при специальных предположениях относительно $B(z)$. Например, оценки

$$R_{ms}(x) = \alpha_{r-1} \beta_{r-1} (B, C)\, x^{r-1} + O(x^{r-2}),$$

$$I_{ms}(x) = \alpha_r x^r - \alpha_{r-1} \beta_{r-1} (B, C)\, x^{r-1} + O(\psi_r(x))$$

справедливы в следующих случаях: 1) $s \leqslant (m-3)/2$; 2) $s = 2$, $m \geqslant 4$; $B(z) = z^2 + b_1 z + b_2$ с $b_1^2 - 4b_2 \neq 0$; 3) $s \leqslant \min\{(m+3)/2,\ m-4\}$, $B(z) = (z-b)^s$.

Б. М. Бредихин

9952. Заметки о теории чисел. II. Несколько проблем относительно σ-функции. Эрдёш (Remarks on number theory. II. Some problems on the σ-function. Erdös P.), Acta arithm., 1959, **5**, № 2, 171—177 (англ.)

Продолжение (РЖМат, 1960, 1284). Доказываются три теоремы:

1. Число различных чисел формы $\sigma(n)/n$, $1 \leqslant n \leqslant x$ равно $c_1 x + o(x)$, где $6/\pi^2 < c_1 < 1$.

2. Число решений уравнения $\sigma(a)/a = \sigma(b)/b$, $a < b \leqslant x$ равно $c_2 x + o(x)$, $0 < c_2 < \infty$.

3. Число решений уравнения $\sigma(n)/n = a$, $1 \leqslant n \leqslant x$, при $1 \leqslant a < \infty$ меньше $c_3 x^{1/2 - c_4}$, где c_3 и c_4 не зависят от a.

Автор указывает три нерешенные проблемы: 1. Имеет ли уравнение $\sigma(n) = \varphi(m)$ бесконечно много решений? 2. Существуют ли бесконечные последовательности целых чисел n_k и m_k, $n_k \neq m_k$ такие, что $\sigma(n_k) = \sigma(m_k)$ и $m_k/n_k \to c$? 3) Пусть $g(x)$ есть число решений уравнений $\sigma(a) = \sigma(b)$, $(a, b) = 1$. Верно ли, что $g(x)/x \to \infty$?

Э. И. Вилкас

9953. Об одном свойстве аппроксимационной теоремы Дирихле. Хартман (A feature of Dirichlet's approximation theorem. Hartman S.), Acta arithm., 1959, **5**, № 3, 261—263 (англ.)

Доказываются:

Теорема 1. Для любого простого p существует действительное число α такое, что, какова бы ни была постоянная $c > 0$, $|\alpha x - y| \geqslant 1/t$ для некоторого $t > 1$ и для каждого $x \leqslant ct$, не делящегося на p.

Теорема 2. Какова бы ни была постоянная $c > 0$, почти для всех α существует $t > 1$ такое, что $|\alpha x - y| \geqslant 1/t$ для каждого нечетного положительного целого $x \leqslant ct$.

А. М. Полосуев

9954. Некоторые результаты о диофантовом приближении. Эрдёш (Some results on diophantine approximation. Erdös P.), Acta arithm., 1959, **5**, № 4, 359—369 (англ.)

Пусть $\varphi(n, \varepsilon, C)$ — множество в α $(0 < \alpha < 1)$, для которого не решается неравенство $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q^2}$, $n < q < Cn$, $(p, q) = 1$.

В 1958 г. Сюс, Туран и автор получили различные неравенства для $m[\varphi(n, \varepsilon, C)]$, где $m(\varphi)$ обозначает меру Лебега для φ, и предположили, что для каждых ε и C существует $\lim_{n\to\infty} m[\varphi(n, \varepsilon, C)]$. Доказываются теоремы: 1. Для каждых ε и η существует $C = C(\varepsilon, \eta)$ такое, что для каждого n $m[\varphi(n, \varepsilon, C)] < \eta$. 3. Пусть $l(n) > 0$ — неубывающая функция и $\sum_{n=1}^{\infty}(1/l(n))$ расходится. Обозначим через $N(l, \alpha, n)$ число решений уравнения $m\alpha - [m\alpha] < 1/l(m)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда почти для всех α $\lim N(l, \alpha, n)\left(\sum_{m=1}^{n} 1/l(m)\right)^{-1} = 1$.

В. А. Голубев

9955. О мере Хаусдорфа некоторых точечных множеств в теории цифр. Гирль (Über das Hausdorffsche Maß gewisser Punktmengen in der Zifferntheorie. Gierl Anton), J. reine und angew. Math., 1959, **202**, № 3-4, 183—195 (нем.)

Обозначения: k, g, s_i — целые числа, $g \geqslant 3$, $1 \leqslant k < g-1$, $0 \leqslant s_i < g$; $\rho = \sum_{i=1}^{\infty} e_i/g^i$ — любое действительное число, $\rho \in (0, 1]$; $E^g_{s_1, s_2, \ldots, s_k}$ — множество всех ρ, разложения которых не содержат цифр $s_1, s_2 \ldots, s_k$; $\dim M$ — размерность Хаусдорфа множества M, $\{M\}^\alpha$ — мера Хаусдорфа множества M размерности α.

Было известно равенство $\dim E^3_1 = \log 2/\log 3$ и его обобщение

$$\alpha = \dim E^g_{s_1, s_2, \ldots, s_k} = \log(g-k)/\log g. \qquad (1)$$

В случае $k = 1$ была найдена оценка (Best E., Proc. London Math. Soc., 1942, **47**, № 2, 436—454)

$$\left(\frac{g-2}{g-1}\right)^\alpha \leqslant \{E^g_s\}^\alpha \leqslant \frac{(g^2-g-s-1)^\alpha}{g^2-2g-s+1}. \qquad (2)$$

В реферируемой работе дается как улучшение правой части оценки ( ), так и ее обобщение на $k \geqslant 1$; оценка эта имеет вид:

$$\{E^g_{s_1, s_2, \ldots, s_k}\}^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(g(d_\lambda - 1) + s_\tau - s_{\tau-1} - 1 - \frac{\varphi}{g-1}\right)^\alpha}{d_\lambda(g-k) - (g-k-s_\tau + s_{\tau-1} - \tau + \bar{\tau} + 1)},$$

где символы d_λ, φ, τ, $\bar{\tau}$ имеют вполне определенные значения.

П. Г. Когония

9956. О множествах, которые измеряются кратными иррациональных чисел. Эрдёш, Урбаник (On sets which are measured by multiples of irrational numbers. Erdös P., Urbanik K.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 12, 743—748 (англ.; рез. русск.)

Плотность натуральных n, удовлетворяющих условию Φ, определяется как предел

$$\text{пл.}\{n{:}n \text{ удовлетворяет } \Phi\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \overline{\{n{:}n \text{ удовлетворяет } \Phi,\ n \leqslant N\}},$$

если этот предел существует. Класс $\sum$ определяется как класс всех таких подмножеств A из $[0, 1]$, для которых пл. $\{n{:}n\xi \in A \pmod 1\}$ существует для каждого иррационального ξ и не зависит от выбора ξ. Говорят, что $\sum_0$ есть базис $\sum$, если для каждого $A \in \sum$ существует $B \in \sum_0$ такое, что пл. $\{n{:}n\xi \in A \dotplus B \pmod 1\} = 0$ для любого иррационального ξ, где $A \dotplus B$ обозначает симметричную разность множеств A и B. Говорят, что $\sum_1$ есть слабый базис $\sum$, если для любого $A \in \sum$ существует $B \in \sum_1$ такое, что пл. $\{n{:}n\xi \in A \dotplus B \pmod 1\} = 0$ для почти всех ξ. Используя аксиому выбора, авторы доказывают следующие теоремы: 1) Любой базис $\sum_0$ класса $\sum$ содержит $2^{2^{\aleph_0}}$ неизмеримых лебеговых множеств. 2) Любой слабый базис $\sum_1$ класса $\sum$ содержит $2^{\aleph_1}$ неизмеримых лебеговых множеств.

A. Hajnal

9957. Заметка о правильно распределенных последовательностях. Лотон (A note on well distributed sequences. Lawton B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 6, 891—893 (англ.)

Последовательность s_n вещественных чисел называется правильно распределенной по модулю 1, если для любого отрезка $[a, b]$ $(0 \leqslant a < b \leqslant 1)$ имеем равномерно по n

$$\lim t^{-1} \sum_{\substack{k=n+1 \\ \{s_k\} \in [a,b]}}^{n+t} 1 = b - a$$

($\{x\}$ обозначает дробную часть от x). Некоторые теоремы о правильно распределенных последовательностях были доказаны Питерсеном (РЖМат, 1957, 7104). Автор доказывает: 1) если для любого натурального числа m последовательность $s_{n+m} - s_n$ правильно распределена по модулю 1, то такую же является s_n;) последовательность значений многочлена $s_n = f(n)$, имеющего по крайней мере один иррациональный коэффициент (не считая свободного члена), являет я правильно распределенной по модулю 1.

9958. Построение вполне равномерно распределенной последовательности. Старченко Л. П., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 3, 519—521

Последовательность вещественных чисел, лежащих на отрезке $[0, 1]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ называется вполне равномерно распределенной, если для любого натурального s и любого параллелепипеда, лежащего в единичном кубе s-мерного пространства Δ, количество точек последовательности

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s),\ (\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{s+1}), \ldots$$

$$\ldots,\ (\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+s-1}), \ldots,$$

попавших в Δ_s, эквивалентно при $k \to \infty$ $k \operatorname{mes} \Delta_s$ ($\operatorname{mes} \Delta_s$ — объем Δ_s). Дается новый способ построения вполне равномерно распределенной последовательности. Доказательство того, что построенная последовательность является вполне равномерно распределенной, использует теорему о трансцендентных числах Малера (РЖМат, 1953, 49).

А. Г. Постников

9959. Арифметическое моделирование броуновского движения. Кубилюс И. П., Линник Ю. В., Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1959, № 6, 88—95

Формулируется теорема: Пусть P пробегает любую возрастающую бесконечную последовательность нечетных бесквадратных чисел такую, что $\prod_{p|P}(1 - c/p) \to 1$ при любом c, $P \to \infty$ $h = h(P) \to \infty$, $\log h/\log P \to \infty$. Пусть (m/P) — символ Якоби

$$S_P(m, s, t, h) = (1/\sqrt{h}) \sum_{hs < n < ht} ((m+n)/P),$$

$$0 \leqslant s < t,$$

$N_P\{\ldots\}$ — количество чисел m, не превосходящих P,

для которых выполнены утверждения, написанные в скобках. Тогда

$$\frac{1}{P}N_P\{S_P(m,\ s,\ t,\ h)<x\}\to$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{4^2}{2(t-s)}\right)du$$

и для любого набора непересекающихся интервалов $(s_1,\ t_1),\ldots,(s_k,\ t_k)$, $0\leqslant s_j<t_j$ $(j=1,\ 2,\ldots,k)$,

$$\frac{1}{P}N_P\{S_P(m,\ s_1,\ t_1;\ h)<x_1,\ldots,S_P(m,\ s_k,\ t_k;\ h)<x_k\}$$

$$\to\prod_{j=1}^{k}\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}N_P\{S_P\ (m,\ s_j,\ t_j;\ h)<x_j\}.$$

Доказывается аналогичная теорема для характеров высших степеней. Работа является обобщением исследования Давенпорта и Эрдёша (Davenport H., Erdös P., Publs. Math., Soc. Japan, 1952, 2, № 3-4, 252—265) и опирается на метод моментов А. А. Маркова.

Примечание референта. Есть опечатки: стр. 89: (m/P); стр. 9 , 5 строка сверху, верхние индексы суммирования $p_1,\ldots,p_l$; 1 строка сверху: степень многочлена $\sqrt[g]{f(m)}$. А. Г. Постников

9960. К имитации простейших марковских процессов. Шахов Ю. Н., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 6, 815—822

Пусть множество E_n состоит из τ n-значных чисел q-й системы счисления со знаками β_ν. Говорят, что на E_n возможны нормальные периодические системы ρ_n, если существует такая последовательность знаков $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots\beta_\tau\beta_1\ldots\beta_{n-1}$, что множество систем из n рядом стоящих знаков совпадает с E_n. Система имитирует данный однородный марковский процесс с дискретным временем и q состояниями, если каждая комбинация из n знаков встречается в этой системе пропорционально вероятности ее появления

$$\mu\Delta_n=p_{\beta_1}p_{\beta_1\beta_2}p_{\beta_2\beta_3}\ldots p_{\beta_{n-1}\beta_n},$$

где $\{p_i\}$ $(i=1,\ 2,\ldots,q)$ — начальное распределение вероятностей, а p_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ldots,q)$ — вероятности перехода. Пусть E_n' получается из E_n повторением каждого элемента некоторое число раз. Для существования системы ρ_n на E_n' автор дает необходимые и достаточные условия, выраженные в терминах упомянутых вероятностей p_i, p_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ldots,q)$. Вторая теорема утверждает, что при $p_i>0$, $p_{ij}>0$ $(i,\ j=1,\ 2,\ldots,q)$ $N_T(\Delta_n)=T\mu\Delta_n+o(T)$, где $N_T(\Delta_n)$ означает число, сколько раз встречается $\Delta_n=\beta_1,\ \beta_2\ldots\beta_n$ среди первых T n-значных чисел некоторой последовательности, полученной из системы ρ_n. Теорема дает конструкцию нормальной по Маркову последовательности знаков. Э. И. Вилкас

9961. Метрика Лобачевского и метрика Вороного в геометрии чисел. Венков Б. А., Тр. 3-го Всес. съезда, 1956, Т. 3, М., АН СССР, 1958, 14—21

Обзор ряда работ в основном ленинградских математиков, посвященных вопросам заполнения пространства многогранниками, прикладываемыми друг к другу по некоторому закону. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство. Выпуклый ограниченный n-мерный многогранник Q в R^n называют параллелоэдром, если существует система многогранников, заполняющих R^n, не имеющих общих внутренних точек и получающихся из Q параллельным переносом на некоторый вектор. Первые строгие математические исследования о параллелоэдрах принадлежат Г. Минковскому и Г. Ф. Вороному. В последние годы возникло другое направление изучения свойств параллелоэдров, связанное с работами Б. Н. Делоне и О. К. Житомирского. Параллелоэдрам посвящены исследования А. Д. Александрова и Б. А. Венкова. А. Д. Александров изучал параллелоэдры в сферическом пространстве и в пространстве Лобачевского. Глубокое применение метрики Лобачевского дано в докторской диссертации Д. С. Горшкова, посвященной геометрическому решению проблемы Маркова о минимуме неопределенной бинарной квадратичной формы. Метрике Вороного посвящены работы Б. А. Венкова. Е. П. Ожигова

9962. Теория меры в геометрии чисел. Шмидт (Masstheorie in der Geometrie der Zahlen. Schmidt Wolfgang), Acta math., 1959, 102, № 3-4, 159—224 (нем.)

Пусть μ — инвариантная мера в пространстве решеток определителя 1, расположенных в n-мерном евклидовом пространстве R_n, нормированная так, что $\int d\mu=1$. Зигелем (Siegel C. L., Ann. Math., 1945, 46, 340—347) было доказано равенство

$$\int\sum_{\substack{g\in\Lambda\\ g\neq 0}}\rho(g)\,d\mu=\int\rho(X)\,dX, \qquad (1)$$

где суммирование слева распространяется на все отличные от нулевой точки решетки Λ, а $\rho(X)=\rho(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0$, интегрируемая по Риману функция. Формула (1) обобщалась рядом авторов (РЖМат., 1957, 63; 1958, 11; 1227). Дается новое обобщение (1), содержащее ряд ранее известных (Предложение 14). В гл. I дается формула для

$$\int\sum_{\left[\substack{g_1,\ldots,g_k\subset\Lambda\\ \dim(g_1,\ldots,g_k)=n}\right]}\rho(g_1,\ldots,g_k)\,d\mu,$$

где $k\geqslant n$. Ранее она была известна лишь в случае $k=n$. Пусть, S — некоторое измеримое по Борелю множество в R_n. Решетка Λ называется S-допустимой, если S не содержит точек решетки кроме, возможно, 0. Пусть $A(S)$ — множество S-допустимых решеток определителя 1, $m(A(S))$ — инвариантная мера этого множества. В гл. II устанавливается формула для $m(A(S))$ в виде некоторого бесконечного ряда. Главную трудность представляет исследование сходимости возникающих здесь рядов. Этому вопросу посвящена гл. III. В гл. IV даются применения этих формул. Доказывается, что в известном неравенстве (Hlawka E., Math. Z., 1944, 49, 285—312) $Q(S)=\dfrac{V(S)}{\Delta(S)}\geqslant 1$, где $V(S)$ — борелева мера S, $\Delta(S)$ — критический детерминант, знак $\geqslant$ можно заменить знаком $>$. Доказывается оценка для $m(A(S))$ через $V=V(S)$.

Пусть $n>n_0$ и S обладает тем свойством, что векторы X и $X-$ни при каком X одновременно в S не содержатся. Тогда $m(A(S))=e^{-V}(1-R)$, где

$$|R|<6\left(\frac{3}{4}\right)^{n/2}e^{4V}+V^{n-1}n^{-n+1}e^{V+n}.$$

В гл. V доказывается, что если $n>n_0(\varepsilon)$ и $V\leqslant n-1$, то $|R|<V^{n-1}n^{n+1}e^{V+n}(1+\varepsilon)+\varepsilon$, откуда следует, что для $n>n_0$ $Q(S)\geqslant nr-2$, $r=0{,}273\ldots$ В гл. VI рассматриваются решетки, имеющие в S бесконечное число точек. Доказывается, что если $n\geqslant m+1$, $V(S)=\infty$, то почти во всех решетках существует бесконечное число наборов из m точек $g_1,\ldots,g_m\in S$, которые можно дополнить до базиса решетки. Вопрос о том,

верна ли эта теорема для $m \geqslant n$, до сих пор открыт. В гл. VII дается формула для $M(S) = \int \varepsilon(S, \Lambda)\, d\mu$, где $\varepsilon(S, \Lambda)$ — плотность множества тех точек решетки Λ, которые не принадлежат к множеству $S + g$, $g \in \Lambda$.
А. Н. Андрианов

9963. О распределении двумерных подрешеток в евклидовой решетке. **Масс** (Über die Verteilung der zweidimensionalen Untergitter in einem euklidischen Gitter. Maass Hans), Math. Ann., 1959, **137**, № 4, 319—327 (нем.)

Линейные подпространства размерности n линейного векторного пространства $\mathfrak{B}$ размерности $m\,(>n)$ образуют компактное многообразие. Для каждого дискретного модуля (решетки) $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{B}$ найдется однозначно определенное линейное подпространство наименьшего измерения $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$, содержащее $\mathfrak{T}$. Пусть в векторном пространстве $\mathfrak{B}$ введена метрика и пусть $\langle\mathfrak{T}\rangle$ — класс решеток, подобных $\mathfrak{T}$. Пусть $\mathfrak{G}_0$ — n-мерное многообразие, образованное решетками класса и $|\mathfrak{T}|$-мерный евклидовый объем отверстия решетки $\mathfrak{T}$. Ставится задача: Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{Q}$ — заданные части $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{Q}_0$. Определить асимптотическое поведение $\alpha_q(\mathfrak{S}; \mathfrak{R}, \mathfrak{Q})$ — числа n-мерных подрешеток, заданной m-мерной решетки $\mathfrak{S}$ со свойствами $\mathfrak{L}(\mathfrak{T}) \in \mathfrak{R}$, $\langle\mathfrak{T}\rangle \in \mathfrak{G}$, $|\mathfrak{T}| \leqslant q$ при $q \to \infty$. При $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ для случая $n =$ эта задача была решена Ролькe (РЖМат, 1957, 4090). Без ограничения $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ при $n =$ автор получает

$$\alpha_q(\mathfrak{S}; \mathfrak{R}, \mathfrak{Q}) \sim \frac{I(\mathfrak{R})\, I(\mathfrak{Q})\, (\pi q)^m}{I(\mathfrak{R}_0) I(\mathfrak{Q}) 24\, |\mathfrak{S}|^2 m\Gamma(m-1)}$$

в предположении, что множества $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{Q}$ измеримы в смысле Римана. Здесь

$$I(\mathfrak{R}) = \int_{X \in \mathfrak{R}^*,\ XX' = E} d\omega,\quad d\omega = |Y|^{(n+1-m)/2}\, [dX]/[dY],$$

$Y = X'X$, X — матрица множества матриц $\mathfrak{R}^*$, соответствующего $\mathfrak{R}$, X' — транспонированная матрица, E — единичная матрица. Аналогично определяется $I(\mathfrak{Q})$. Исследование проводится с помощью специальной дзета-функции и тауберовой теоремы Харди—Литлвуда.
Б. В. Левин

9964. О рациональных полиэдрах n-измерений. **Эрхарт** (Sur les polyèdres rationnels à n dimensions. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 2, 272—274 (франц.)

Полиэдр называется рациональным, если он целый в решетке R^n, ассоциированной фундаментальной решетке R. Если n — наименьший индекс из возможных, то P называется $(1/n)$-целым. Подсчет целых точек внутри и на рациональном полиэдре дает внутренний и внешний объем полиэдра. Доказано несколько утверждений о $(1/m)$-целых полиэдрах и полигонах, подсчитывается число целых точек для различных случаев.
Е. П. Ожигова

9965. О произведении $(ax+by+c)(dx+ey)$ **Канагасабапатхи** (On the product $(ax + by + c)(dx+ey)$. Kanagasabapathy P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1959, **51**, № 1, 1—7 (англ.)

Пусть a, b, c, d, e — вещественные числа, а формы $ax + by$ и $dx + ey$ дискриминанта 1 не представляют нуль при целых x, y таких, что $|x| + |y| \neq 0$. Используя одну теорему Давенпорта (Davenport H., Quart. J. Math., 195 , 2, № 3, 19), автор, уточняя свои прежние исследования, доказывает, что существуют целые x и y с $|x| + |y| \neq 0$ такие, что $|(ax+by+c)(dx+ey)| < (4{,}25777)^{-1}$.
И. Ш. Славутский

9966. Одно арифметическое свойство квадратичных форм. **Ледерман** (An arithmetical property of quadratic forms. Lederman Walter), Comment. math. helv., 1959, **33**, № 1, 34—37 (англ.)

Через Q_2 обозначим кольцо рациональных чисел, в знаменатель которых не входит 2. Тогда доказывается утверждение: Для любой квадратичной формы с коэффициентами из Q_2 и нечетным детерминантом Δ существует вектор $w \in Q_2$ такой, что $f(w, w) \equiv \tau \pmod 4$. Доказательство элементарно и основано на применении одного приема Минковского. Этот вопрос возник в связи с рассмотрением односвязных 4-мерных многообразий. Интересные утверждения, относящиеся и к квадратичным формам, представляющим такие многообразия, можно найти у Хирцебруха и Хопфа (Math. Ann., 1959, **136**, 156—172) и у Милнора (РЖМат, 1960, 1140 К, стр. 122—128).
В. К. Белов

9967. Инвариант квадратических форм по mod 8. **Блей** (An invariant of quadratic forms mod 8. Blij F. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A 62**, № 3, 291—293 (англ.)

Указывается обобщение теоремы Ледермана (реф. 9966). Пусть $f(u, w)$ — положительно определенная квадратичная форма, $G_0 = \sum_{x \in M'/M} \exp 4\pi i f(x, x)$ — сумма Гаусса, M состоит из всех целых векторов, M' состоит из таких векторов z, что $f(z, a)$ целое для всех $a \in M$, τ — сигнатура квадратичной формы, D — ее дискриминант, тогда $\exp\left(\frac{1}{4}\pi i (f(w, w) - \tau)\right) = |D|^{1/2} G_0^{-1}$, отсюда, в частности, получается, что $f(w, w) \equiv |D| + \tau - 1 \pmod 4$, т. е. теорема Ледермана. Рассматривается также другой пример соотношения между локальными инвариантами квадратичных форм.
Б. В. Левин

9968. Заметка о целых решениях кубического уравнения Морделла $ax^3+by^3=z^2-k^2$. **Чандра** (A note on the integer solutions of Mordell's cubic $ax^3+by^3=z^2-k^2$. Chandra K. R.), J. London Math. Soc., 1960, **35**, № 1, 78—80 (англ.)

Морделл доказал, что уравнение

$$ax^3 + by^3 = z^2 - k^2 \tag{1}$$

при $k = 4abc^3$ имеет бесконечно много целых решений (РЖМат, 1953, 10). Для данного k уравнение (1) преобразуется к виду

$$a(x^3 + y^3) + z^3 = 1. \tag{2}$$

Уравнение (2) имеет бесконечное множество решений, получаемых по формулам

$$x = 3t(1 - 3at^3);\quad y = 9at^4;\quad z = 1 - 3at^2(x + y). \tag{3}$$

Далее из формул (3) может быть получено бесконечное множество новых формул, как это сделано в работе Лемера (РЖМат, 1957, 6311). Кроме того, доказано, что уравнение (1) при $k = b^2c^3$ также имеет бесконечное множество целых решений, некоторые из которых получаются по формулам:

$$x = 6ab^4c^2t^2(6a^2b^4t^3 + 1),$$
$$y = 36a^4b^7c^2t^6 - bc^2,$$
$$z = b^2c^3(6a^2b^4t^3 + 1)^3 - b^2c^3.$$

В. Д. Подсыпанин

9969. О диофантовом уравнении $x^m-y^n=1$, $|x-y|<$ 250400 **Кэ Чжао** (Ko Chao), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Вестн. Сычуаньск. ун-та (Сер. естеств. н.) Acta scient. natur. Univ. szechuan, 1959, № 4, 1—14 (кит.; рез. англ.)

Указывается, что доказательство Честари (РЖМат, 1959, 3488) теоремы Каталана некорректно, и показы-

вается, что диофантово уравнение $x^m - y^n = 1$, $x > 1$, $y > 1$, $m > 1$, $n > 1$, не имеет целочисленных решений, кроме $x = 3$, $y = $, $m = 2$, $n = 3$, если выполнено одно из следующих условий: $| x - y | \leqslant .50400$; $m > n$, $(x, n) = 1$; $m < n$, $(y, m) = 1$ и $4/m$. В. А. Голубев

9970. Целые и положительные решения уравнения $a^b = b^a$. Гийотен, Тебо (Solutions entières et positives de $a^b = b^a$. Guillotin R., Thébault V.), Mathesis, 1959, **68**, № 10, 370—372 (франц.)

9971. Об уравнении $x^z - y^t = 1$. Кэ Чжао (Ke Chao), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Вестн. Сычуаньск. ун-та (Сер. естеств. н.), Acta scient. natur. Univ. szechuan, 1959, № 4, 15—18 (кит.; рез. англ.)

Методом, аналогичным указанному в предыдущей статье (РЖМат, 1960, 7193), кратко доказывается, что уравнение $y^2 + 1 = x^m$ не имеет целочисленных решений, кроме тривиального $y = 0$, $x = 1$, если целое $m > 1$. В. А. Голубев

9972. О системах четверок. Ханани (On quadruple systems. Hanani Haim), Canad. J. Math., 1960, **12**, № 1, 145—157 (англ.)

Дано множество E из n элементов. Назовем $S(l, m, n)$ $(l \leqslant m \leqslant n)$ систему подмножеств из E, имеющих каждое по m элементов таких, что каждое подмножество из E, состоящее из l элементов, содержит в точности одно подмножество системы $S(l, m, n)$. Необходимым, но не всегда достаточным условием существования $S(l, m, n)$ является: $\binom{n-h}{l-h} \Big/ \binom{m-h}{l-h}$ = целому. Частным случаем является проблема Штейнера (1852 г.): Для каких целых N возможно образовать тройки из N данных элементов так, что в каждой тройке каждая пара элементов появляется один раз? То же — для четверок, пятерок и т. д. Эта проблема эквивалентна системе $S(m-1, m, n)$. Рейс (1859) доказал, что необходимым и достаточным условием существования $S(2, 3, n)$ (троек Штейнера) является $n \equiv 1$ или $n \equiv 3 \pmod 6$. Доказывается, что необходимое и достаточное условие существования системы $S(3, 4, n)$ (четверок) есть $n \equiv 2$, $n \equiv 4 \pmod 6$. В. А. Голубев

9973. О проблеме Лангфорда. I. Прайди (On Langford's problem. I. Friday C. J.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 346, 250—253 (англ.)

Проблема состоит в том, чтобы разместить числа $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ в последовательность так, что каждые два одинаковые числа r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ были отделены друг от друга r промежуточными числами, например, 41312432. Такую последовательность автор называет «совершенной». Может получиться и последовательность с брешью перед концом, например, 121 · 2. Доказывается, что для любого натурального n можно получить или «совершенную» последовательность или последовательность с брешью перед концом. В. А. Голубев

9974. О проблеме Лангфорда. II. Дейвис (On Langford's problem. II. Davies Roy O.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 346, 253—255 (англ.)

Дается полное решение проблемы Лангфорда (реф. 9973). Доказывается, что размещение чисел $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ в «совершенную» последовательность возможно, если $n = 4m - 1$ или $n = 4m$. Если же $n = 4m - 3$ или $4m - 2$, то можно получить лишь последовательность с брешью перед концом. Указан способ размещения чисел при любом n. В. А. Голубев

9975. О запасе значений дедекиндовых сумм. Салие (Zum Wertevorrat der Dedekindschen Summen. Salié Hans), Math. Z., 1959, **72**, № 1, 61—75 (нем.)

Дедекиндовой суммой называется сумма $S(m, n) = \sum_{\nu \pmod n} \left(\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\left(\left(\frac{m\nu}{n}\right)\right)$, где $(m, n) = 1$ и $n > 0$, причем $((a)) = \begin{cases} 0 & \text{для целого } a, \\ a - [a] - \frac{1}{2} & \text{в других случаях.} \end{cases}$ Для изучения свойств $S(m, n)$ вводится число $D(m, n) = 12nS(m, n)$. Тогда, как известно, справедливы соотношения

$$mD(m, n) + nD(n, m) = m^2 + n^2 - 3mn + 1,$$

$$D(m', n) = D(m, n), \text{ где } m' \equiv m \pmod n.$$

Рассматриваются некоторые свойства $D(m, n)$. В частности, доказывается, что $D(m, n)$ принимает бесконечное множество значений в каждом из классов $0, \pm 2, \pm 6 \pmod{18}$. Вместе с тем в этих классах содержатся такие исключительные числа $W > 0$, для которых уравнение $| D(m, n) | = W$ неразрешимо относительно m и n. Арифметический признак этих исключительных чисел W пока неизвестен. Н. В. Гордеев

9976. Автоморфные числа в некоторой общей системе счисления. Гудстейн (Automorphic numbers in a general scale. Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 346, 270—272 (англ.)

Число a называется автоморфным с индексом k в системе счисления n, если $a^2 \equiv a \pmod{n^k}$. Отсюда и $a^m \equiv a \pmod{n^k}$, m — натуральное (РЖМат, 1959, 4437). Доказывается, что существуют автоморфные числа с любым индексом в системе n, если n может быть выражено в виде произведения двух взаимно простых чисел. В. А. Голубев

9977. Некоторые теоретико-числовые исследования и диофантова проблема. Мёснер (Einige zahlentheoretische Untersuchungen und diophantische Probleme. Moessner Alfred), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1959, **14**, № 3, 177—182 (нем.; рез. сербо-хорв.)

9978. Одна диофантова задача. Мёснер (Ein diophantisches Problem. Moesner Alfred), Bol. mat., 1959, **32**, № 5—8, 17—19 (нем.)

9979. Последовательность Фибоначчи. Ванстоун (Fibonacci sequence. Vanstone J.), Nucleon, 1959, **1**, Oct., 20—23 (англ.)

9980. О линейных рекуррентных последовательностях с постоянными коэффициентами. Нагелль (On linear recurrences with constant coefficients. Nagell Trygve), Arkiv mat., 1958, **3**, № 5, 395—401 (англ.)

Элементарным, по-видимому, новым путем устанавливаются некоторые известные результаты. Н. Н. Воробьев

9981. Функция Эйлера и числа Ферма. Делькурт (Indicateur d'Euler et nombres de Fermat. Delcourte M.), Mathesis, 1959, **68**, № 10, 350—356 (франц.)

9982. К распознаванию простоты циклических чисел Сильвестра. Уорд (Tests for primality based on Sylvesters cyclotomic numbers. Ward Morgan), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 4, 1269—1272 (англ.)

Для выяснения простоты чисел Ферма и Мерсенна — Лука, Кармихаэль и др. используют свойства последовательности

$$(U): U_0, U_1, \ldots, U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \ldots,$$

где α, β — корни некоторого квадратного уравнения $x^2 - Px + Q$, $(P, Q) = 1$. В статье при тех же условиях рассматриваются свойства последовательности

(Q): $Q_0=0,\ Q_1=1, Q_2,\ldots, Q_n=\prod_{\substack{1<r<n\\(r,n)=1}}(\alpha-e^{2\pi i r/n}\beta),\ldots$

П. Н. Реморов

9983. Заметка о формуле Эрмита. Карлиц (Note on a formula of Hermite. Carlitz L.), Math. Mag., 1959, **33**, № 1, 7—11 (англ.)

Эрмит доказал, что

$$\sum_{0<r(p-1)<n}\binom{n}{r(p-1)}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p),\qquad(1)$$

где p — простое, n — нечетное. Бахман показал, что (1) справедливо для любого натурального n. Дается очень короткое доказательство для (1) и выводится значение суммы $S=\sum_{0<rm<n}(-1)^{n-rm}\binom{n}{rm}$, где $p=2m+1$ — любое нечетное простое число. В. А. Голубев

9984. Теорема о десятичном представлении рациональных чисел. Шиллер (A theorem in the decimal representation of rationals. Schiller James K.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 9, 797—798 (англ.)

Доказывается теорема о числе повторений любой цифры в различных десятичных дробях, выражающих дроби m/n, где $(10\ m,\ n)=1$, $m=1,\ldots,n-1$.

В. А. Голубев

9985. Обобщение одной теоремы из теории чисел. Хертер (Verallgemeinerung eines Satzes aus der Zahlentheorie. Härtter E.), Math. und naturwiss. Unterr., 1959—1960, **12**, № 8, 366—368 (нем.)

Известно следующее предложение: Пусть $N=\overline{abc}$, где $a,\ b,\ c$ — цифры трехзначного числа, $a>c$; пусть $N_1=\overline{cba}$, $N_2=N-N_1=\overline{def}$, $N_3=\overline{fed}$. Тогда $N_2+N_3=1089$. Доказывается аналогичное предложение для любого m-значного числа при любом основании системы счисления $b>1$. В. А. Голубев

9986. Семейства простых чисел. Цеккендорф (Familles de nombres premiers. Résumé. Zeckendorf E.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1960, **29**, № 1-2, 15—27 (англ.)

9987. О некоторых неопределенных уравнениях. Монковский (Sur quelques équations indéterminées. Mąkowski A.), Mathesis, 1959, **68**, № 10, 368 (франц.)

9988. Целые уравнения. Ризель (Équations entières. Riesel H.), Mathesis, 1959, **68**, № 10, 370 (франц.)

9989. О составных числах n, которые делят $a^{n-1}-b^{n-1}$. Роткевич (Sur les nombres composés n qui divisent $a^{n-1}-b^{n-1}$. Rotkiewicz A.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1959, **8**, № 1, 115—116 (франц.)

Доказывается теорема: Если $a,\ b$ — натуральные числа, где $a>b$, $(a,\ b)=1$, то существует бесконечное множество натуральных чисел n, являющихся произведением s различных простых чисел и делящих $a^{n-1}-b^{n-1}$.

В. А. Голубев

9990. Признак делимости чисел на 19. Гай (In legătură cu divizibilitatea numerelor prin 19. Gaiu Emanoil), Gaz. mat. şi fiz., 1960, **B11**, № 1, 13—17 (рум.)

9991. Об одной теореме Обрешкова. Судан (Sur un théorème de Obrechkoff. Sudan Gabriel), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 25, 2700—2701 (франц.)

При помощи свойств ряда Фарея Обрешков доказал теорему: Пусть ω — действительное число, a и n — натуральные числа такие, что $0<\omega\leqslant a<n$. Существуют по меньшей мере два целых, неотрицательных числа x и y, для которых $|\omega x-y|\leqslant\left(\left[\frac{n-a}{a+1}\right]+2\right)^{-1}$ и $0<x+y\leqslant n$. Дается геометрическое доказательство теоремы Обрешкова. В. А. Голубев

9992 К. Арифметика с цветными числами. Гаттеньо. 4. Числа до 1000, свойства и операции. 5. Дроби простые и десятичные, проценты. (L'arithmétique avec les nombres en couleurs. Gattegno Caleb. Neuchâtel—Paris, Delachaux et Niestlé. 4. Les nombres jusqu'à 1000, propriétés et opérations, 1958, 59 p., 300 fr. 5. Fractions ordinaires et décimales, pourcentages, s. a., 72 p., 300 fr.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 51, 1344 (франц.)

См. также: 10947.

АЛГЕБРА

Редакторы *Л. А. Скорняков, В. И. Шестаков*

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

9993. Метризация множества подмножеств с помощью комбинаторного анализа. Силверман (A metrization for power-sets with applications to combinatorial analysis. Silverman Robert), Canad. J. Math., 1960, **12**, № 1, 158—176 (англ.)

Пусть E — множество подмножеств конечного множества S. Если $x\in E$, то через $|x|$ будем обозначать количество элементов в x. Если положить $\delta(x,y)=|(x\,|\,y)\setminus(x\,|\,y)|/2$, то E превращается в метрическое пространство. Этот факт используется для исследования латинских квадратов, $(v,\ k,\ \lambda)$ — систем (РЖМат, 1956, 4070) и т. п. Доказывается, например, такая теорема: Если $|S|=b$, $E_r=\{x;\ x\in E,\ |x|=r\}$ и $r^2-\lambda b>0$, то для всякого $x\in E_r$, в котором расстояние между любыми двумя точками больше $r-\lambda-1$, имеет место $|x|\leqslant(r-\lambda)\,b/r^2-\lambda b$. Равенство имеет место в том и только в том случае, если в E_r существуют такие элементы $x_1,\ldots,x_v$, что $d(x_i,x_j)=r-\lambda$ для всех $i\neq j$. В последнем параграфе исследуется множество $S_1\times\ldots\times S_m$, где за $d((x_1,\ldots,x_m),(y_1,\ldots,y_m))$ принимается число индексов i, для которых $x_i\neq y_i$.

Л. А. Скорняков

9994. О подмножествах произведений множеств. Адам (On subsets of set products. Adám A.), Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math., 1959, **2**, 147—149 (англ.)

Пусть G — прямое произведение множества G_λ, где λ пробегают множество Λ. Элементы из G мы можем записывать в виде строк с координатами из G_λ. Если $x\in G$, то через x_λ обозначается его координата из G_λ. Пусть H — такое подмножество в G, что каждый элемент любого G_λ встречается в записи какого-либо элемента из H. Если $M\subset\Lambda$, то будем писать $x\equiv y\,(M)$, если $x_\lambda=y_\lambda$ для всех $\lambda\in\Lambda$. Через $(x\rhd_\lambda y)$ обозначим такой элемент $z\in G$, что $z_\lambda=x_\lambda$ и $z_\mu=y_\mu$ для всех $\mu\neq\lambda$. Рассматриваются следующие свойства множества H: A. Множество $\bigcup_\Lambda G_\lambda$ можно разбить на попарно непересекающиеся классы так, что строка принадлежит H тогда и только тогда, когда ее координаты принадлежат одному и тому же классу; B. Если $x,y,z\in H$, $x_\lambda=y_\lambda$ и $y_\mu=z_\mu$ для некоторых $\lambda,\mu\in\Lambda$, то $(x\rhd_\mu z)\in H$; C. Если $x,y\in H$ и $x_\mu=y_\mu$ для некоторого $\mu\in\Lambda$, то $(x\rhd_\mu y)\in H$ для

всех $\lambda \in \Lambda$; D. Если $x \in G$ таков, что существует индекс λ, обладающий свойствами: 1) если $\mu, \nu \neq \lambda$, то $\rho(x_\mu, x_\nu)$ (запись $\rho(x_\mu, x_\nu)$ означает, что в H существует такой элемент y, что $y_\mu = x_\mu$ и $y_\nu = x_\nu$ для некоторых $\mu, \nu \in \Lambda$);) если для подходящего $\nu \neq \lambda$ имеет место $\rho(x_\lambda, x_\nu)$, то $x \in H$; E. Если $x \in G$ таков, что существует такой индекс μ, что $\rho(x_\mu, x_\lambda)$ справедливо для всех $\lambda \in \Lambda$, то $x \in H$. Доказано, что для конечного Λ свойства A и B эквивалентны. Если Λ содержит не менее трех элементов, то свойство B оказывается эквивалентным свойству C, а свойство A — каждому из свойств D и E. На примерах показывается, что ограничения, наложенные на H, существенны. Л. А. Скорняков

9995. Построение некоторого множества попарно ортогональных латинских квадратов. Паркер (Construction of some sets of mutually orthogonal Latin squares. Parker E. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 6, 946—949 (англ.)

Если $m > 3$ и является простым числом Мерсенна или $m+1$ — простое число Ферма, то существует m попарно ортогональных квадратов порядка m^2+m+1. Этот результат выводится из более сложно формулируемой теоремы, доказанной в реферируемой работе. Л. А. Скорняков

9996. Новое рассмотрение неразрешимости уравнения 5-й степени. Хелман (The insolvability of the quintic re-examined. Hellman Morton J.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 5, 410 (англ.)

Показано, что общий метод для решения (в радикалах) уравнений квадратного, кубического и 4-й степени, основывающийся на соотношениях между корнями и коэффициентами (РЖМат, 1959, 1246), приводит в случае уравнения 5-й степени к соотношению выше 5-й степени. А. Г. Школьник

9997. Исключительность приводимых многочленов. Кноблох (Die Seltenheit der reduziblen Polynome. Knobloch Hans-Wilhelm), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1956, 59, № 1, 1. Abt., 12—19 (нем.)

Пусть $F(x,t) = F(x_1, \ldots, x_k; t_1, \ldots, t_s)$ — неприводимый многочлен от $k+s$ неизвестных x_i, t_j с целыми коэффициентами; пусть $R(N)$ — количество целочисленных s-мерных векторов $\tau_1, \ldots, \tau_s$ с $|\tau_i| \leqslant N$ таких, что многочлен $F(x_1, \ldots, x_k; \tau_1, \ldots, \tau_s)$ приводим. В предыдущей статье (РЖМат, 1956, 43.5) автор показал, что справедливо соотношение

$$(2N+1)^{-s} R(N) = O(N^{-\alpha}), \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$. Теперь этот результат улучшен следующим образом. Пусть многочлен $F(x,t)$ нормализован и имеет степень n относительно одного из x_i и степень $\leqslant l_j$ относительно t_j, где $l_j \leqslant l_s$ для $j < s$. Тогда α в (1) удовлетворяет неравенству $\alpha \geqslant \frac{1}{9(n-1)} \left\{ \sum_1^s l_j + 2 l_s \sum_1^{s-1} l_j \right\}^{-1}$.

Наконец, если $R_1(N)$ обозначает число нормализованных многочленов фиксированной степени m с коэффициентами, заключенными между $-N$ и $+N$, и с группой Галуа порядка $< m$, то доказано, что $\frac{R_1(N)}{(2N+1)^m} = O(N^{-\beta})$, $\beta = \frac{1}{18m\,(m!)^3}$. L. Carlitz

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 2, 185.

9998. Об одновременном представлении нуля парой квадратичных форм от четырех переменных. Башмаков М. И., Фаддеев Д. К., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 19, 43—46 (рез. англ.)

Доказана теорема: Пара квадратичных форм $f_1 = \sum_1^4 a_i x_i^2$, $f_2 = \sum_1^4 b_i x_i^2$ над полем k характеристики $p \neq 2,3$ одновременно представляет нуль над k в том и только в том случае, если форма $\sum_{i=1}^4 (a_i + b_i t) x_i^2$ представляет нуль над полем $k(t, \sqrt{d})$, где t — трансцендентная величина над полем k, а $d = \prod_{i=1}^4 (a_i + b_i t)$. Необходимость условия тривиальна. Для доказательства достаточности представимость нуля формой $\sum_{i=1}^4 (a_i + b_i t) x_i^2$ интерпретируется как распадение некоторой алгебры обобщенных кватернионов. Следствием этого является распадение определенного одномерного цикла группы Галуа некоторого расширения поля k со значениями в группе классов дивизоров нулевой степени поля функций на кривой $s^2 = d$. Прямой подсчет и применение одного критерия И. Р. Шафаревича показывают, что в этом случае кривая $s^2 = d$ k-бирационально эквивалентна кривой, заданной уравнениями $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. Тем самым на этой последней кривой есть рациональная точка, что доказывает теорему. Ю. И. Манин

9999. К теории идеалов бинарных форм. Розенкноп И. З., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 257—268

Исследуется алгебра Картана для системы форм от двух неизвестных (РЖМат, 1958, 7512; там же можно найти необходимые определения). Доказано, что ядро $Z(F_1, \ldots, F_n)$ отображения Δ изоморфно тензорному произведению исходной алгебры многочленов R на внешнюю алгебру, порожденную базисными элементами (соотношениями в R между $F_1, \ldots, F_n$) $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ компоненты $Z^{(1)}(F_1, \ldots, F_n)$ внешней степени 1. В явном виде найдена функция $H(u,t) = \sum u^s H^{(s)}(t)$, записанная в терминах $\deg x_i = l_i$, $\deg z_i = k_i$ и $\deg \mu_i = q_i$. Функция $H(1,t)$ совпадает с рядом Пуанкаре для алгебры гомологий $H(F_1, \ldots F_n)$. Указан редукционный процесс, дающий возможность, при заданных конкретных многочленах $F_1, \ldots, F_n$, провести эффективное вычисление степеней q_i, а тем самым и рядов Пуанкаре. А. И. Кострикин

10000. О кубических формах, допускающих композицию. Шафер (On cubic forms permitting composition. Schafer R. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 6, 917—925 (англ.)

Пусть V — векторное пространство над полем F характеристики $\neq 2,3$. Отображение $x \to N(x)$ пространства V в поле F называется кубической формой, если $N(\alpha x) = \alpha^3 N(x)$, а форма $(x,y,z) = \frac{1}{6}[N(x+y+z) - N(x+y) - N(x+z) - N(y+z) + N(x) + N(y) + N(z)]$ трилинейна ($\alpha \in F$, $x, y, z \in V$). Скажем, что N невырожденная, если из $(a,y,z) = 0$ для всех $y, z \in V$ вытекает, что $a = 0$. Пусть A — конечномерная алгебра с единицей 1 (не обязательно ассоциативная) над полем F характеристики $\neq 2,3$. Если A допускает такую невырожденную кубическую форму N, что $N(xy) = N(x)N(y)$ для любых $x, y \in A$, то имеет место одна из следующих возможностей: 1) $A = F1$, причем $N(\alpha 1) = \alpha^3$; 2) A — центральная простая ассоциативная алгебра ранга 9; 3) $A = Fe_1 + Fe_2$, причем $N(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha + \beta^2$; 4) A — кубическое поле над F; 5) $A = Fe_1 + Fe_2 + Fe_3$; 6) $A = Fe + Z$, где Z — квадратичное поле над F; 7) $A = Fe + Q$, где Q — алгебра кватернионов над F; 8) $A = Fe + C$, где C — алгебра Кэли-Диксона над F. Л. А. Скорняков

10001. Теорема о линейных формах в кольце полиномов. Эйхлер (Ein Satz über Linearformen in Po-

lynombereichen. Eichler Martin), Arch. Math., 1959, 10, № 2-3, 81—84 (нем.)

усть $M=(m_{ik})$ — квадратная матрица порядка n с ненулевым определителем, элементы которой — степенные ряды от неопределенной x^{-1} с коэффициентами из произвольного поля k, $\widetilde{M}=(\widetilde{m}_{ik})$ — контраградиентная матрица, $\gamma_k (k=1,\ldots,n)$ — целые рациональные числа, а $l(M,\gamma)$ и $l(\widetilde{M},\widetilde{\gamma})$ — числа линейно независимых решений из кольца полиномов $k[x]$ для систем $g(\Sigma_i x_i m_{ik}) \leqslant \gamma_k$ и $g(\Sigma_i \widetilde{x}_i \widetilde{m}_{ik}) \leqslant \widetilde{\gamma}_k = -2-\gamma_k$ соответственно, где $g(a)$ — степень функции a относительно x. Доказывается, что $l(M,\gamma)=l(\widetilde{M},\widetilde{\gamma})-g(\det M)-\Sigma_i \gamma_i + n$. Отсюда, в силу $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) \geqslant 0$ получается оценка для числа решений первой системы (аналог теоремы Минковского). В качестве приложения дается доказательство теоремы Римана — Роха для поля алгебраических функций одной переменной. В. В. Морозов

10002. Некоторые проблемы для определителя с комплексными элементами. Чжан Бао-линь, Шаньси шифань сюэюань сюэбао, Shanxi shifan xueyu an xuebao, 1959, № 2, 132—140 (кит.)

10003. О теореме Перрона — Фробениуса. Самельсон (On the Perron—Frobenius theorem. Samelson Hans), Michigan Math. J., 1957, 4, № 1, 57—59 (англ.)

Факт, что положительная $n\times n$-матрица T имеет в точности один собственный вектор, может быть очень коротко доказан следующим путем: Плоскость $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$ пересекает первый координатный угол по $(n-1)$-мерному симплексу с внутренней областью S. При этом T индуцирует отображение $\widetilde{T}$ области S на себя, при котором точке $X \in S$ ставится в соответствие точка $T(OX) \cap S$. Это отображение сокращает расстояния гильбертовой геометрии области S (РЖМат, 1957, 6668 К). Отсюда следует, что $\bigcap_1^\infty \widetilde{T}^i(S)$ состоит в точности из одной точки, которая и дает собственный вектор. H. Busemann Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 2, 114

10004. О вопросе устойчивости в задачах собственных значений. Боттема (Zur Stabilitätsfrage bei Eigenwertproblemen. Bottema O.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1958, **A61**, № 5, 501—504 Indagationes math., 1958, 20, № 5, 501—504 (нем.)

Приводится простое доказательство следующего утверждения, впервые доказанного Шварцем: Пусть (a_{ij}) — квадратная матрица порядка n, для которой $a_{i+1,i}=-1$, $\mathrm{Re}\, a_{ii}=0$, если $i<n$, $\mathrm{Im}\, a_{ii+1}=0$ и $b_i \neq 0$, где $b_1=\mathrm{Re}\, a_{nn}$, $b_i=\mathrm{Re}\, a_{n-i+1,\,n-i+2}$, $i=2,\ldots,n$, тогда число ее характеристических корней, имеющих положительную действительную часть, равно числу положительных членов в ряду $b_1, b_1, b_2, \ldots, b_1, b_2 \ldots b_{n-1}$. Указывается, что, как показал Шварц, любую матрицу можно перевести в матрицу рассматриваемого вида, так что доказанная теорема имеет по существу универсальную применимость. М. М. Постников

10005. μ-матрицы. Маратхе (μ-matrices. Marathe C. R.), Ganita, 1954, 5, №2, 153—173 (англ.)

Пусть A, U — $m\times n$-матрицы с действительными элементами, каждый элемент матрицы U равен 1. Назовем A «μ-матрицей», если каждый столбец и каждая строка матрицы $A-\mu U$ полностью состоят из неотрицательных или неположительных элементов (РЖМат, 1954, 3237). Даны некоторые очень элементарные результаты относительно μ-матриц.

Примечание референта. 1) Авторское определение «μ-матрицы» неясно, он употребляет то определение, которое дано выше. 2) В теореме 5 необходимо вытекает, что $\mu=0$. 3) Факт, что ортогональная «0-матрица» может быть получена произвольной заменой знаков в матрице перестановок — тривиален, но более точен, чем теорема 6. M. F. Smiley Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 6, 627.

10006. Замечание о неотрицательных матрицах. Бургер (Eine Bemerkung über nicht-negative Matrizen. Burger E.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, №5-6, 227 (нем.)

10007. Бесконечные матрицы, связанные с проблемой дифракции. Магнус (Infinite matrices associated with a diffraction problem (Abstract). Magnus W.), Proc. Sympos. Appl. Math., 1954, 5, 71—74 (англ.)

10008. Алгебраические основы векторного исчисления. Вакселъ (Algebraische Grundlage der Vektorrechnung. Vakselj A.), Bull. scient. Conseil Acad. RPFY, 1958, 4, № 1, 7—8 (нем.)

Пусть $A=\{a_{ik}\}$ и $B=\{b_{ik}\}$ — квадратные матрицы порядка n над полем действительных или комплексных чисел. Пусть

$$A\pi B = a_1 AB + a_2 BA + b_1 A_1 B + b_2 B_1 A + [2c(AB)_1 + dA_1 B_1]E, \quad (1)$$

где A_1 — след матрицы A ($A\pi B$ называется π-произведением). Композиция π″π- и π′-произведения определяется по формуле, которая получается из (1), если заменить в ней AB, BA, B, A и E соответственно на $A\pi' B$, $B\pi' A$, $\frac{1}{2}(B\pi' E + E\pi' B)$, $\frac{1}{2}(A\pi' E + E\pi' A)$ и $E\pi' E$.

Если каждому π-произведению поставить в соответствие матрицу $\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, где

$$L=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 & c \\ 0 & a_1+a_2+\frac{n}{2}(b_1+b_2) & 0 \\ 0 & 0 & a_1+a_2+n(b_1+b_2)+2nc+n^2 d \end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix} a_1-a_2 & 0 & b_1-b_2 \\ 0 & a_1+a_2+n(b_1+b_2)+2nc+n^2 d & 0 \\ 0 & 0 & a_1+a_2+n(b_1+b_2)+2nc+n^2 d \end{pmatrix},$$

то композиции π- и π′-произведения соответствует произведение матриц. Таким образом матрицы любого порядка имеют в сущности одну и ту же алгебру π-произведений. С помощью π-произведений получается также целый ряд представлений трехмерного векторного пространства с векторным произведением. В. Г. Дорофеев

10009. Фундаментальные открытые множества для модулярной группы. Картан (Ouverts fondamentaux pour le groupe modulaire. Cartan Henri), Sémin. H. Cartan, École norm. supér. 1957—1958, 1, Paris, 1958, 3-1—3-12 (франц.)

Автор называет пространством Зигеля про транство S_n всех таких симметрических комплексных матриц Z порядка n, что матрица $\mathrm{Im}\, Z$ положительно определена. В пространстве S_n действует группа $\mathrm{Sp}(n,R)$ вещественных симплектических матриц порядка $2n$, причем преобразования из этой группы составляют группу всех аналитических автоморфизмов многообразия S_n. Подгруппа $\Gamma=\mathrm{Sp}(n,R)$, состоящая из целочисленных матриц, называется модулярной группой. Пусть $z=x+iy$, $x=(x_{ij})$, $y^{-1}=w'dw$, где d — диагональная матрица с диагональными элементами d_i, $w=(w_{ij})$ — треугольная матрица с единицами по диагонали. Для вещественного $u>0$ определим множество $\Omega(u) \subset S_n$ неравенствами: $|x_{ij}|<u$, $d_i < u d_{i+1}$ $(0<i<n)$, $|w_{ij}|<u$, $d_n<u$. Доказывается, что а) инвариантный объем множества $\Omega(u)$ конечен; б) если M — симплектическая матрица с рациональными

элементами, то существует лишь конечное число таких $M_1 \in \Gamma$, что $M \cdot \Omega(u)$ и $M_1 \cdot \Omega(u)$ пересекаются; в) если u достаточно велико, то $S_n = \bigcup_{M \in \Gamma} M \cdot \Omega(u)$. А. Л. Онищик

ГРУППЫ

10010. Порядки, к которым принадлежат только группы, обладающие данным свойством. Паздерский (Die Ordnungen, zu denen nur Gruppen mit gegebener Eigenschaft gehören. Pazderski Gerhard), Arch. Math., 1959, **10**, № 5, 331—343 (нем.)

Ставится следующая проблема. Пусть ν — некоторое теоретико-групповое свойство. Требуется найти все натуральные числа n такие, что каждая группа порядка n обладает свойством ν. Известно решение этой проблемы для свойств: 1) „быть циклической группой" и 2) „быть абелевой группой" (Miller, Blichfeldt, Dickson, Finite groups, 1916; Dickson L. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1905, **6**, 198—204). В реферируемой работе дается решение поставленной проблемы для следующих свойств ν: 1) „быть нильпотентной группой", 2) „быть дисперсной группой" (Ore O., Duke Math. J., 1939, **5**, 431—450), 3) „быть сверхразрешимой группой", 4) „обладать циклическим коммутантом" и 5) "быть метациклической группой" (автор называет группу G метациклической, если она обладает таким циклическим нормальным делителем K, что факторгруппа G/K — циклическая). Существенное значение для полученных результатов имеет числовая функция $\psi(n)$, определяемая следующим образом: $\psi(1) = 1$, $\psi(p^\alpha) = (p^\alpha - 1)(p^{\alpha-1} - 1)\ldots(p-1)$ (p — простое число), $\psi(n) = \psi(p_1^{\alpha_1})\psi(p_2^{\alpha_2})\ldots\psi(p_r^{\alpha_r})$, где $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение числа n. Отметим две теоремы: 1) Все группы порядка n являются нильпотентными тогда и только тогда, когда $(n, \psi(n)) = 1$; 2) Все группы порядка n являются дисперсными тогда только тогда, когда $(p_i^{\alpha_i} \ldots p_r^{\alpha_r}, \psi(p_i^{\alpha_i})) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$ $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$. П. А. Гольберг

10011. Об одном классе конечных разрешимых групп. Картер (On a class of finite soluble groups. Carter R. W.), Abstr. Short communs Int ternat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 15 (англ.)

Хорошо известно, что нормализатор H силовской подгруппы конечной группы G обладает следующими свойствами: 1) Каждая подгруппа, содержащая H, совпадает со своим нормализатором; 2) H не содержится в двух различных сопряженных подгруппах группы G. Подгруппы группы G_1, обладающие этими свойствами, называются абнормальными. Каждая подгруппа, содержащая абнормальную подгруппу, является абнормальной и всякая абнормальная подгруппа разрешимой группы содержит нормализатор системы (т. е. нормализатор некоторой силовской базы группы G). Рассматриваются разрешимые группы, у которых нормализаторы систем являются абнормальными. Мы показываем, что разрешимые группы нильпотентной длины 2 и, в частности, сверхразрешимые группы обладают этим свойством, а также изучаем строение этих групп.

10012. Конечные одноступенные ненильпотентные группы. Редеи (Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen. Rédei Ladislaus), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 303—324 (нем.)

Конечная группа G называется одноступенной ненильпотентной, если она ненильпотентна, но все ее собственные подгруппы нильпотентны. О. Ю. Шмидт (Матем. об., 1924, **31**, 366—372) показал, что порядок такой группы имеет вид $p^\alpha q^\beta$, где p и q — различные простые числа ($\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$) и одна из ее силовских подгрупп (например силовская p-подгруппа) инвариантна в G, силовские q-подгруппы являются циклическими. Числа p, q^β автор реферируемой работы называет инвариантами группы G. Известно, что для любых p и q^β существует единственная одноступенная неабелева группа с инвариантами p и q^β (группа G называется одноступенной неабелевой, если она неабелева, но все ее собственные подгруппы абелевы).

В реферируемой работе получены следующие результаты: 1) Дается новое доказательство теоремы О. Ю. Шмидта; 2) Тогда и только тогда существует более одной одноступенной ненильпотентной группы с заданными инвариантами p, q^β, когда показатель u числа p по модулю q — четное число, т. е. $u = 2t$; 3) При заданных p, q^β существует единственная одноступенная ненильпотентная группа G_1 максимального порядка $p^{\beta t} q^\beta$ и всякая одноступенная ненильпотентная группа с инвариантами p, q^β изоморфна факторгруппе группы G_1 по ее центральному нормальному делителю; 4) Группа G_1 задается системой определяющих соотношений; дается правило нахождения произведения любых двух элементов из группы G_1.

Заметим, что многие результаты работы принадлежат Ю. А. Гольфанду (Докл. АН СССР, 1948, **60**, 1313—1315). П. А. Гольберг

10013. Обобщение одной теоремы Чунихина о П-факторизации конечных групп. Комаки (On a generalization of certain Chunikhin's theorem on Π-factorization of finite groups. Komaki Yûji), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1959, **A6**, 25 March, 252—255 (англ.)

Доказывается, что: Если h-П — цельноблочный делитель (РЖМат, 1958, 7495) порядка конечной группы G, то произвольная разрешимая П-подгруппа группы G, порядок которой является делителем числа h, содержится в некоторой подгруппе порядка hc, где c не делится на простые числа из П. Для случая, когда П содержит все простые делители порядка группы G, этот результат был получен С. А. Чунихиным (РЖМат, 1957, 5354). П. А. Гольберг

10014. Замкнутость и дисперсность конечных групп. Бэр (Closure and dispersion of finite groups. Baer Reinhold), Illinois J. Math., 1958, **2**, № 4B, 619—640 (англ.)

Пусть П — некоторое множество простых чисел и σ — частично упорядоченное множество простых чисел. Через П′ обозначим множество всех простых чисел, не принадлежащих к П. В реферируемой работе даются некоторые критерии для П-замкнутости и σ-дисперсности конечных групп (РЖМат, 1960, 147). Работа состоит из 6 параграфов.

1. В § 1 устанавливается зависимость между σ-дисперсностью и p-замкнутостью группы (p — простое число). Из двух теорем этого параграфа отметим одну. Группа G является σ-дисперсной тогда и только тогда, когда каждая ее подгруппа S является p-замкнутой, где p — произвольное σ-минимальное число из $\sigma(S)$. $\sigma(S)$ — множество всех простых делителей порядка $O(S)$ подгруппы S, принадлежащих к σ.

2. Группа G называется П-гомогенной (П-homogeneous), если элементы из G индуцируют в П-подгруппах группы G автоморфизмы (т. е. $N(S)/C(S)$ — П-группа, где S — произвольная П-подгруппа группы G, $N(S)$ и $C(S)$ — соответственно, нормализатор и централизатор S в G). Всякая подгруппа и факторгруппа П-гомогенной группы являются П-гомогенными группами. Прямое произведение П-гомогенных групп будет П-гомогенной группой. П-замкнутая группа является П′-гомогенной. Обратное предложение

в общем случае неверно. Доказывается, что группа G является П-замкнутой тогда и только тогда, когда G — П-отделимая и П′-гомогенная группа. При этом автор называет группу П-отделимой, если ее композиционные факторы являются либо П-группами, либо П′-группами.

3. Доказывается ряд свойств группы G, обладающей следующими свойствами: 1) G не является p-замкнутой; 2) всякая собственная подгруппа и собственная факторгруппа являются p-замкнутыми; 3) G является p^1-гомогенной. Например, показано, что G является простой группой.

4. Группа G называется полной p-нормальной, если для любых двух ее силовских p-подгрупп P и Q из условия, что H является нормальным делителем в P и $H \subseteq Q$ следует, что H — нормальный делитель в Q. Автор дает несколько необходимых и достаточных условий для полной p-нормальности группы. Например, доказано, что группа G является полной p-нормальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие; если S — подгруппа группы G, индекс которой не делится на p, и K — нормальный делитель S, то для любых двух силовских p-подгрупп P и Q группы S/K из условия $Z(P) \subseteq Q$ следует, что $Z(P) = Z(Q)$ ($Z(P)$ — центр группы P).

5. Автор дает несколько необходимых и достаточных условий для П-замкнутости группы. Доказывается, что группа G является p^1-замкнутой тогда и только тогда, когда выполняется по крайней мере одно из условий: а) G — p-гомогенная группа; б) если P и Q — силовские p-подгруппы группы G, то $P \cap Q^{(i)} = Q \cap P^{(i)}$ и $N(P^{(i)})/C(P^{(i)})$ является p-подгруппой ($P^{(i)}$ ($i \geqslant 0$) — i-й коммутант группы P, $P^{(s)} = P$) и т. д. (всего 5 условий). Из этого результата автор получает теорему Фробениуса (Frobenius G., Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1901, 1324—1329) и теорему Бернсайда (Burnside W., Zassenhaus H., Lehrbuch der Gruppentheorie, Berlin — Leipzig, 1937, 133). Установлено также, что группа G является П-замкнутой тогда и только тогда, когда она П′-гомогенная и $\{R, P\}$—(П+p)-группа, где R — максимальная П-подгруппа, P — произвольная силовская p-подгруппа группы G, $p \in \Pi'$.

6. Используя ряд предыдущих теорем, автор дает несколько необходимых и достаточных условий того, что группа является σ-дисперсной. Отметим следующую теорему: Если простые делители $O(G)$ принадлежат σ и если каждая разрешимая подгруппа группы является σ-дисперсной, то и группа G также является σ-дисперсной. Из этой теоремы можно получить известную теорему О. Ю. Шмидта. П. А. Гольберг

10015. Характеризация пересечения полных подгрупп. Шарль (Une caractérisation des intersections de sous-groupes divisibles. Charles Bernard), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 2, 256—257 (франц.)

Пусть G — полная абелева группа, G_p — множество элементов из G, аннулируемых какой-либо степенью простого числа p, SG_p — множество элементов из G, аннулируемых простым числом p. Для того чтобы подгруппа H группы G была пересечением полных подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы для каждого простого числа p или H делилось на все степени p или $SHp \neq SGp$. Л. А. Скорняков

10016. Нормальные произведения групп. Кравцов В. Г., Уч. зап. Гомельск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 5, 53—92

Сеп и Редеи ввели (РЖМат, 1954, 3240) и исследовали понятие нормального разложения группы, как разложения ее в произведение нормальных делителей: $G = G_1 \ldots G_n$, из которого нельзя удалить ни одного множителя и в котором ни один множитель не представим в виде произведения своих собственных нормальных делителей.

В реферируемой работе делается попытка обобщить работу Сепа и Редеи, отбросив последнее требование, входящее в определение нормальности. Однако работа написана столь безграмотно, что не поддается прочтению; в формулировках ряда теорем не указываются условия, при которых они верны. Работа содержит много грубейших ошибок. Вот несколько примеров: Теорема 2 (стр. 59). Если $G = G_1 \times \ldots \times G_k$, то каждый максимальный нормальный делитель N группы G представим в виде: $N = G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times N_i \times G_{i+1} \times \ldots \times G_k$, где N_i — максимальный нормальный делитель группы G_i. При доказательстве свойства 11 (стр. 68) автор декларирует, что каждый элемент коммутанта группы является коммутатором. В доказательстве свойства 12 (стр. 69)' автор пользуется тем, что всякая нециклическая абелева группа разложима в прямое произведение. Теорема 12 опровергается примером циклической группы 6-го порядка. О. Н. Головин

10017. Заметка о полуспециальных подстановках. Якуб (A note on semi-special permutations. Yacoub K. R.), Proc. Glasgow Math., Assoc., 1958, **3**, № 4, 164—169 (англ.)

Продолжение работ автора (РЖМат, 1957, 7650; 1959, 1255, 1256). Полуспециальные подстановки были распределены на два класса относительно главного числа s. Доказывается, что подстановки одного и того же класса не могут быть идентичными. Выводится необходимое и достаточное условие идентичности подстановок двух различных классов. В. А. Голубев

10018. Заметка о статье Санова. Стрёйк (Notes on a paper by Sanov. Struik Ruth Rebekka), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 638—641 (англ.)

Эта статья дает прямые доказательства некоторых формул для верхних коммутаторов, впервые введенных Сановым (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1951, **15**, 477—502), который использовал в своем доказательстве формулу Бакера—Хаусдорфа. Пусть F_i — i-й член нижнего центрального ряда свободной группы P с двумя образующими u и v и пусть $F(k)$ — полная инвариантная подгруппа, образованная k-ми степенями элементов F. Тогда показано, что $(u, v)^n \in F(2n) F_3$ и $(u, v, v)^n \in F(3n) F_4$. Marshal Hall, Jr.

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 2, 117.

10019. К теореме Силова. II. Виландт (Zum Satz von Sylow. II. Wielandt Helmut), Math. Z., 1959, **71**, № 4, 461—462 (нем.)

Ч. I. см. РЖМат, 1955, 4249. Холловской П-подгруппой (П-некоторое множество простых чисел) конечной группы G называется такая ее П-подгруппа G_Π, индекс которой не делится на простые числа из П. Говорят, что для группы G верна П-силовская теорема, если G содержит по крайней мере одну холловскую П-подгруппу G_Π и для любой П-подгруппы H группы G существует такой элемент $g \in G$, что $g^{-1} H g \subseteq G_\Pi$.

Доказывается следующая теорема: Пусть $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, $\Pi_1 \cap \Pi_2$ пусто и группа G содержит поэлементно перестановочные холловские Π_1- и Π_2-подгруппы G_{Π_1} и G_{Π_2}, причем G_{Π_1} нильпотентна. Если для группы G верна Π_2-силовская теорема, то для нее верна также и П-силовская теорема. П. А. Гольберг

10020. Теорема о силовских подгруппах. Кохендёрфер (Ein Satz über Sylowgruppen Kochendörffer Rudolf), Math. Nachr., 1959, **17**, № 3-6, 189—194 (нем.)

Доказано: Если конечная группа G содержит метабелеву силовскую p-подгруппу P и в разложении $G = \sum_{x \in X} Px$ группы G по P систему представителей X можно выбрать так, что $a^{-1} X a = X$ для любого a из P, то в G существу-

ет такой нормальный делитель N, что $G=PN$, $P\|N=E$.
П. А. Гольберг

10021. Изоморфизм силовских подгрупп бесконечных групп. Нёйман (Isomorphism of S ow subgroups of infinite groups. Neumann B. H.), Math. scand., 1958, 6, № 2, 299—307 (англ.)

Основной результат: в FC-группе лю е две силовские p-подгруппы локально сопряжены. Дл периодических FC-групп этот результат известен (Baer R., Duke Math. J., 1940, 6, 598—614; Гольберг П. А., Матем. сб., 1946, 19, 451—460). Работа содержит также три теоремы об изоморфизме силовских p-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп. Эти теоремы легко следуют из основного результата Бэра. Приведен пример группы, в которой каждый элемент конечного порядка имеет конечное число сопряженных, но имеются две силовские p-подгруппы, не являющиеся локально сопряженными.
П. А., Гольберг

10022. О подгруппах сильно П-разрешимых и сильно П-отделимых групп. Русаков С. А., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 270—271

Пусть G — конечная группа, $o(G)=mn$ — ее порядок, где m — наибольший де итель $o(G)$, делящийся только на простые числа из П (П — заданное непустое множество простых чисел). Пусть $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ где $p_1>p_2>\dots>p_r$ — различные простые делители числа m. Если $m=1$, то полагаем $p_1=1$. Если G содержит подгруппы всех порядков вида $m_t\cdot n$, где m_t — произвольный делитель m, то G называется Пδ-группой. Группа G называется ПΔ-группой, если всякая ее подгруппа является Пδ-группой. Группа G называется сильно П-отделимой, если каждый индекс некоторого нормального ряда группы G может делиться лишь на первую степень только одного простого числа из П, и сильно П-разрешимой, если она сильно разрешима относительно каждого простого числа p из П (т. е. каждый индекс главного ряда группы G либо взаимно прост с p, либо равен p (Чунихин С. А., Матем. сб., 1949, 25 (67), 321—346)). Теоремы: 1) Если G сильно П-разрешима, то она является ПΔ-группой. Если G является ПΔ-группой и $(p_1!, n)=1$, то группа G сильно П-разрешима и содержит инвариантную подгруппу порядка n. Эта теорема обобщает теорему 1 из работы Маклейна (РЖМат, 1958, 134). В том же направлении обобщается и теорема 2 указанной работы; 2) Если G сильно П-разрешима и $m>1$, то для любого $t=1, 2, \dots, r$ в G содержится характеристическая подгруппа порядка вида $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}n_s$, где n_s — некоторое число, делящее n. Для сильно разрешимых (сверхразрешимых) групп этот результат был получен Холлом (Hall P., J. London Math. Soc., 1938, 3, 98—105); 3) Если G сильно П-разрешима и $m>1$, то всякая максимальная подгруппа, порядок которой делится на n, имеет простой индекс в G, принадлежащий П (для сверхразрешимых групп см. Ore O., Duke Math. J., 1939, 5, 431—450); 4) Если G является Пδ-группой, G содержит подгруппу порядка m и $n<p_r$ при $m>1$, то G сильно П-отделима. Доказательства не приведены.

Примечание референта. Теоремы 1) и 13) для сильно p-разрешимых групп получил Цаппа (Zappa G., Rend. Accad. Sci fis. math. Napoli, 1950, (4) 17, 328—339).
П. А. Гольберг

10023. Строение свободных групп. Пиккар (Structure des groupes libres. Piccard Sophie), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1959, 76, № 1, 1—58 (франц.)

Изучаются свободные группы методом, примененным ранее автором к конечным группам (см. например, РЖМат, 1957, 1151). Пусть G — свободная группа ранга m с множеством $A=\{a_\alpha\}$ свободных образующих, $a_a(c)$ ($a\in A$, $c\in G$) — степень слова $c=f(a_1,\dots,a_k)$ относительно образующего a, если $a\in\{a_1,\dots,a_k\}$, и нуль, если $a\in A\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$. Множество элементов $c\in G$ таких, что $u_a(c)\equiv 0\pmod n$ составляет нормальный делитель $M^{(n)}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}_{a\in A}$ группы G. Фактор-группа по нему оказывается абелевой группой $\Gamma^{(n)}$. Элементы $^{(n)}$ суть классы $M^{(n)}\begin{pmatrix}a\\\lambda_a\end{pmatrix}_{a\in A}$, $0\leqslant\lambda_a<n-1$, такие, что $c\in M^{(n)}\begin{pmatrix}a\\\lambda_a\end{pmatrix}_{a\in A}$ тогда и только тогда, когда $u_a(c)\equiv\lambda_a\pmod n$. Устанавливается, что группа $\Gamma^{(n)}$ не зависит от множества $A=\{a_\alpha\}$ и является прямым произведением m циклических групп порядка n. Дается необходимое и достаточное условие того, чтобы классы $K_1,\dots,K_s$ были независимы (т. е. $K_1^{\alpha_1}\dots K_s^{\alpha_s}=1$ возможно лишь при $\alpha_t\equiv 0\pmod n$). Всякая система $B=\{b_\alpha\}$ свободных образующих группы G называется базой, а элементы $b_a\in B$ — свободными элементами группы G. Доказано: 1) каждый класс $M^{(n)}\begin{pmatrix}a\\\lambda_a\end{pmatrix}_{a\in A}$ содержит бесконечно много несвободных элементов; 2) бесконечное множество классов не содержит свободных элементов.— $M^{(n)}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}_{a\in A}$; 3) если класс содержит один свободный элемент, то он содержит их бесконечно много; если $b_1,\dots,b_t$ — свободные элементы G, то содержащие их классы независимы; 4) если m конечно, $m=k$, то для любой базы $B=\{b_1,\dots,b_k\}$ существует такая бесконечная последовательность элементов $c_1, c_2,\dots$, что первые k ее членов лежат в B, а любые k последовательных элементов образуют базу группы G; при этом длина слов c_n (в алфавите A) неограниченно возрастает. Кроме $\Gamma^{(n)}$, в работе определяются и другие группы, которые, однако, зависят от множества A.
Л. А. Бокуть

10024. Об одной теоретико-групповой проблеме О. Ю. Шмидта. Сас (Reduktion eines gruppentheoretischen Problems von O. J. Schmidt. Szász F.) Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 7, 369—372 (нем.; рез. русск.)

Бесконечная группа называется EU-группой, если все ее собственные подгруппы конечны. В реферируемой работе дается частичное решение известной проблемы О. Ю. Шмидта об описании всех EU-групп. Доказывается следующая теорема: Пусть K — некоторый класс групп, содержащий вместе с любой группой и все ее гомоморфные образы. Если каждая EU-группа из класса K содержит нетривиальный нормальный делитель, то любая EU-группа класса K изоморфна группе типа p^∞. Из этой теоремы легко выводится, что EU-группа, принадлежащая классу FC-групп (а также класс RN-групп и локально конечных S-групп), изоморфна группе типа p^∞.
П. А. Гольберг

10025. Подгруппы, двойственные вербальным. Моран (Duals of a verbal subgroup. Moran S.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 2, 220—236 (англ.)

Пусть задано некоторое множество слов $f(x_1,\dots,x_n)$ на конечном или счетном алфавите $x_1,\dots,x_n,\dots$. Если G — некоторая группа и $x_1,\dots,x_n,\dots$ независимо друг от друга пробегают всю группу G, то подгруппа, порожденная значениями всех слов $f(x_1,\dots,x_n)$, называется по Холлу (Hall P., Reine angew. Math., 1940, 182, 156—157) вербальной и обозначается через $V_f(G)$. Маргинальной подгруппой $M_f(G)$ называется подгруппа, состоящая из всех элементов ξ из G, удовлетворяющих всем соотношениям вида $f(x_1\xi, x_2,\dots,x_n)=f(x_1, x_2\xi,\dots,x_n)=\dots=f(x_1, x_2,\dots,x_n\xi)=f(x_1, x_2,\dots,x_n)$, каковы бы ни были элементы $x_1, x_2,\dots,x_n$ группы G.

Маргинальная подгруппа во многих отношениях двойственна вербальной подгруппе, определяемой тем же множеством слов.

Автор предлагает другой тип подгрупп, двойственных к $V_f(G)$, а именно — централизатор $Z_f(G)$ подгруппы $V_f(G)$ в группе G. Приводятся (как правило, без выводов) большие перечни свойств подгрупп $V_f(G)$, $M_f(G)$ и $Z_f(G)$, которые и демонстрируют двойственность последних двух подгрупп к первой. Вот некоторые извлечения из них: из $V_f(G)=E$ следует $M_f(G)=Z_f(G)=G$; наоборот, из $M_f(G)=G$ следует $V_f(G)=E$, а из $Z_f(G)=G$ — что $V_f(G)$ лежит в центре группы G. Справедливы соотношения: $V_f(G/V_f(G))=E$, $M_f(M_f(G))=M_f(G)$, $V_f(M_f(G))=E$, $M_f(G/V_f(G))=G/V_f(G)$, $Z_f(Z_f(G))=Z_f(G)$, $Z_f(G/V_f(G))=G/V_f(G)$ и др. Подгруппа, порожденная произвольным множеством вербальных подгрупп, сама вербальна; пересечение произвольного множества подгрупп типа $M_f(G)$ (соответственно, типа $Z_f(G)$) является подгруппой того же типа.

Строится новый пример, подтверждающий установленный ранее Нейманом факт (Neumann B. H., Math. Ann., 1937, 114, 506—55:), что пересечение вербальных подгрупп может и не являться вербальной подгруппой. Устанавливаются двойственные ему факты: строятся примеры, демонстрирующие, что подгруппы, порожденные подгруппами типа $M_f(G)$ (соответственно, типа $Z_f(G)$), вообще говоря, не являются подгруппами того же типа.

Доказывается, что вербальная подгруппа $V_f(F)$ свободного произведения F произвольных групп G_α допускает единственное „правильное представление“: $V_f(F)=\prod_\alpha V_f(G_\alpha)(V_f(F)\cap[G_\alpha]^F)$, где $[G_\alpha]^F$ — декартова подгруппа группы F, т. е. нормальный делитель, порожденный всевозможными парными коммутантами $[G_\alpha, G_\beta]$, $\alpha\neq\beta$. Для произвольного свободного произведения F (за возможным исключением свободного произведения двух циклических групп второго порядка) имеют место равенства: $M_f(F)=E$ и $Z_f(F)=E$. (Последний факт следует из теоремы: централизатор каждого неабелевого нормального делителя произвольного свободного произведения равен единичной подгруппе).

В заключительном параграфе даются широкие обобщения подгрупп, двойственных вербальным, простейшим примером одного из которых оказывается $M_f(G)$, а другого — $Z_f(G)$. Пусть заданы произвольное множество слов $f(x_1, \ldots, x_n)$ и некоторая группа G. Каково бы ни было слово $h(u, v)$ в алфавите из двух букв u, v, им определяются две подгруппы, двойственные вербальной подгруппе $V_f(G)$: первая двойственная подгруппа $H_f^1(G)$, порожденная всеми элементами ξ из G, для которых справедливы соотношения $f(h(x_1,\xi),x_2,\ldots,x_n)=\ldots=f(x_1,x_2,\ldots,h(x_n,\xi))=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при любых элементах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из G; и вторая двойственная подгруппа $H_f^2(G)$, порожденная всеми такими элементами z из G, что $h(f(x_1,\ldots,x_n),z)=1$ для всех $x_1, \ldots, x_n$ из G. При $h(u,v)=uv$, очевидно, $H_f^1(G)=M_f(G)$, а при $h(u,v)=[u,v]$ — $H_f^2(G)=Z_f(G)$. Оказывается, что почти все свойства, установленные для $M_f(G)$, присущи всякой подгруппе $H_f^1(G)$. Специально изучаются свойства „стационарной“ подгруппы $I_f(G)$, определяемой как первая двойственная подгруппа $H_f^1(G)$ при $h(u,v)=v^{-1}uv$. В частности, устанавливается, что всегда $E\supseteq M_f(G)\subseteq I_f(G)\supseteq Z_f(G)\supseteq G$.

Указывается на разные иные возможности, в частности обращается внимание на подгруппы $K_f^1(G)$ и $K_f^2(G)$, определения которых получаются из определений подгрупп $H_f^1(G)$ и $H_f^2(G)$ заменой требования „для всех $x_1, \ldots, x_n$ из G“ на „хотя бы для одного набора $x_1,\ldots,x_n$ из G“.

Примечание референта. В статье имеется значительное количество неточностей и погрешностей, часть из которых отмечена в „Исправлениях“ (см. реф. 10026). Кроме того, как сообщил мне автор, требуется внести следующие исправления: на стр. 2.7 в последней строке текста нужно заменить $V_f(G)$ на $V_{[f,g]}(G)$ и H на $\|H$; на стр. 222 в соотношении (9′) включение нужно изменить на противоположное, кроме того, это соотношение вовсе не переносится на $I_f(V_g(G))$. О. Н. Головин

10026. Исправления: Подгруппы, двойственные вербальным. Моран (Corrigendum: Duals of a verbal subgroup. Moran S.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 250 (англ.)

См. реф. 10025.

10027. Гомоморфный образ пересечения вербальной подгруппы и декартовой подгруппы свободного произведения. Моран (The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the cartesian subgroup of a free product. Moran S.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 237—245 (англ.)

Пусть задано свободное произведение $F=\prod_\alpha^* G_\alpha$ произвольных групп G_α. Обозначим через $V(G)$ вербальную V-подгруппу группы G (реф. 10025), через H^G — нормальный делитель, порожденный подгруппой H в группе G; через $[A_\alpha]$ — взаимный коммутант множества подгрупп A_α группы G.

Автор раньше (РЖМат, 1959, 2369) доказал, что

$$(V(F)\cap[G_\alpha]^F)\varphi=V(F\varphi)\cap[G_\alpha\varphi]^{F\varphi} \qquad (1)$$

в случае, если φ является либо гомоморфным отображением свободного произведения F с ядром гомоморфизма, лежащим в $[G_\alpha]^F$, либо гомоморфизмом, отображающим F на $\prod^*(G_\alpha/H_\alpha)$ и сводящимся на G_α к естественному гомоморфизму на факторгруппу G_α/H_α.

Для любого гомоморфизма φ легко доказывается, что левая часть соотношения (1) лежит в правой. В реферируемой работе строится пример, показывающий, что в общем случае равенство (1) не справедливо. А именно, если $F=\{a\}*\{b\}$ — свободная группа ранга 2 с системой свободных образующих a, b и G — группа, определяемая в системе образующих α, β одним соотношением $\alpha^3=[\alpha,\beta]$, то при гомоморфизме φ группы F на G, определяемом условиями $a\varphi=\alpha$, $b\varphi=\beta$, будет $(F^3\|F')\varphi\neq G^3\|G'$. Здесь H^3 обозначает вербальную подгруппу группы H, определяемую словом x^3, а H' — коммутант группы H; в данном случае, как это нетрудно понять, $F'=[\{a\},\{b\}]^F$ и $G'=[\{\alpha\},\{\beta\}]^G$.

Построенный пример вновь демонстрирует открытый ранее Нейманом факт, что пересечение двух вербальных подгрупп не обязано быть вербальной подгруппой. Не удается автору доказать справедливость равенства (1) для любого гомоморфизма φ и в случае, когда в качестве вербальных подгрупп берутся лишь сложные коммутанты в смысле Холла (РЖМат, 1959, 5598). Однако обнаруживаются следующие факты. Пусть группа G порождается некоторыми своими подгруппами G_α и пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная коммутаторная форма веса n, $n>1$. Через $f(G)$ обозначим вербальную подгруппу, определяемую словом $f(x_1,\ldots,x_n)$, а через

$f\left[G_\alpha^G\right]$ — подгруппу, порождаемую значениями формы $f(x_1,\ldots,x_n)$, когда $x_1,\ldots,x_n$ независимо друг от друга пробегают нормальные делители G_α^G при единственном условии, что все они одновременно не принимают значения из одного и того же G_α^G. С той же коммутаторной формой f связывается еще одна подгруппа, обозначаемая через $f[G_\alpha]^G$ и определяемая по индукции: если f веса 2, то $f[G_\alpha]^G=[G_\alpha]^G$; если же $f=[f_1, f_2]$, то $f[G_\alpha]^G=[f_1(G), f_2[G_\alpha]^G]\cdot[f_1[G_\alpha]^G, f_2(G)]\times\times\prod_{\beta\neq\gamma}[f_1(G_\beta), f_2(G_\gamma)]$.

Доказывается, что: 1) Если $F=\prod_\alpha^* G_\alpha$ и f — коммутаторная форма веса, большего 1, то

$$f(F)\,|\,[G_\alpha]^F=f[G_\alpha^F]=f[G_\alpha]^F. \qquad (2)$$

2) Если φ — произвольный гомоморфизм свободного произведения $F=\prod_\alpha^* G_\alpha$ на группу, порожденную подгруппами, изоморфными G_α, то $f[G_\alpha^F]\,\varphi=f[(G_\alpha\varphi)^{F\varphi}]$ и $f[G_\alpha]^F\,\varphi=f[G_\alpha\varphi]^{F\varphi}$.

Однако исходный вопрос остается открытым, так как равенства ( ) доказаны лишь для случая свободного произведения F. О. Н. Головин

10028. Исправления: Гомоморфный образ пересечения вербальной подгруппы и декартовой подгруппы свободного произведения. Моран (Corrigendum: The homomorphic image of the intersection of a verbal subgroup and the cartesian subgroup of a free product. Moran S.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 250 (англ.)

См. реф. 10027.

10029. Ассоциативные операции на группах. II. Моран (Associative operations on groups. II. Moran S.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 32, 548—568 (англ.)

Продолжение первой статьи автора (РЖМат, 1959, 2369), там же см. терминологию и обозначения. Устанавливаются новые свойства вербальных произведений. Например: Если U и V таковы, что для любой группы G имеет место соотношение $U(G)\equiv V(G)$, то для произвольного множества групп G_α справедлив изоморфизм $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}/C_V[G_\alpha]^{\mathfrak{A}}$, где $\mathfrak{A}=\prod^U G_\alpha$, $\mathfrak{B}=\prod^V G_\alpha$ и $C_V[G_\alpha]^{\mathfrak{A}}=V(\mathfrak{A})\,|\,[G_\alpha]^{\mathfrak{A}}$. Если S — множество всех тождественных соотношений, выполняющихся в каждой из групп G_α, и V — вербальная подгруппа, соответствующая этому множеству S, то в $\prod^V G_\alpha$ множество тождественных соотношений также совпадает с S. Для произвольных гомоморфизмов φ_α групп G_α существует гомоморфизм φ их V-произведения $\mathfrak{B}$ на $\prod^V(G_\alpha\varphi_\alpha)$, совпадающий на G_α с φ_α для каждого α. Имеет место изоморфизм $[G_\alpha]^{\mathfrak{B}}\cong[G_\alpha/V(G_\alpha)]^{\mathfrak{B}}$. Для произвольного множества слов V и произвольной группы G через $M_V(G)$ и $Z_V(G)$ обозначим, соответственно, маргинальную подгруппу и централизатор вербальной V-подгруппы группы G, определяемые этим множеством V (см. реф. 10025). Тогда для произвольного множества групп G_α $M_V(\mathfrak{B})=\prod_\alpha M_V(G_\alpha)[G_\alpha]^{\mathfrak{B}}$ и $Z_V(\mathfrak{B})=\prod_\alpha Z_V(G_\alpha)[G_\alpha]^{\mathfrak{B}}$.

Обобщение теоремы Бэра и Леви. При непустом V группа $\prod^V G_\alpha$ не может разлагаться в свободное произведение, за единственным исключением, когда множителей G_α только два, G_1 и G_2, оба они второго порядка и $V(G_1*G_2)=1$, т. е. за исключением случая, когда само V-произведение вырождается в свободное. Если группа G разложена в V-произведение подгрупп A_α и в U-произведение подгрупп B_β, причем каждый из множителей A_α и B_β является либо примарной циклической группой, либо бесконечной циклической группой, то подгруппы A_α и B_β попарно изоморфны и $\prod^V A_\alpha=\prod^U A_\alpha$ и $\prod^V B_\beta=\prod^U B_\beta$. Если для всех групп G_α (за исключением, быть может, одной из них) выполняется условие $V(G_\alpha)=G_\alpha$, то их V-произведение вырождается в прямое. Затем изучаются свойства некоторых специальных типов вербальных произведений. Так, например, устанавливается, что нильпотентное произведение двух групп с категорией (в смысле П. Г. Конторовича (Матем. сб., 1951, **28** (70), 79—88)) само является группой с категорией. Для k-го нильпотентного произведения G произвольного множества групп G_α будет

$$G/{}^lG\cong\begin{cases}\prod^{(l)}(G_\alpha/{}^lG_\alpha) & \text{для } l<k,\\ \prod^{(k)}(G_\alpha/{}^lG_\alpha) & \text{для } l\geqslant k,\end{cases}$$

где ${}^lX$ означает l-й член нижнего центрального ряда группы X. Для разрешимых произведений устанавливается, в частности, что произведение групп без кручения является группой без кручения и что произведение конечного числа конечных групп не обязано быть конечной группой. Для бернсайдовых произведений — что произведение периодических групп будет периодично, второе бернсайдово произведение совпадает с прямым, а третье изоморфно правильной факторгруппе третьего нильпотентного произведения. Наконец, вводится новое понятие приведенного вербального V-произведения групп G_α, определяемого равенством $\prod^V G_\alpha=\mathfrak{F}/V(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}=\prod^* G_\alpha$. Доказывается, что оно может быть представлено следующими двумя способами через обычные вербальные произведения: $\prod^{\overline{V}} G_\alpha\cong\prod^V(G_\alpha/V(G_\alpha))$ и $\prod^{\overline{V}} G_\alpha\cong\mathfrak{B}/V(\mathfrak{B})=\mathfrak{B}/\prod^\times V(G_\alpha)$, где $\mathfrak{B}=\prod^V G_\alpha$. Приведенное вербальное произведение, вообще говоря, не содержит подгрупп, изоморфных сомножителям, и потому не является правильным. Однако оно допускает такое правильное представление $\prod^V G_\alpha\cong\prod(G_\alpha/V(G_\alpha))\cdot[G_\alpha]^{\mathfrak{B}}$. Отсюда следует, что многие свойства V-произведений совпадают со свойствами приведенного произведения. Так, например, V-произведение групп G_α периодично (локально конечно) тогда и только тогда, когда периодично (локально конечно) их приведенное V-произведение. Устанавливается ассоциативность приведенного V-умножения. О. Н. Головин

10030. Алгебраическое замечание к решению уравнения Колмогорова, предложенному Фреше. Ацел (Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff. Aczél J.), Publs math. 1955, 4, № 1-2, 33—42 (франц.)

Автор изучает общее решение функционального уравнения $P(s,t)\ P(t,u)=P(s,u)$ для конечномерных матриц $s\leqslant t\leqslant u$. Продолжая раннюю работу Фреше (Méthode des fonctions arbitraires. Gauthier-Villars, Paris, 1938), который предполагал матрицы невырожденными, автор находит общее решение во всех случаях. Рассматривается также случай функций со значениями в абстрактных группах. J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 10, 989.

10031. Алгебраические замечания о решении уравнения Колмогорова, данном М. Фреше. II. Ацел, Эгервари (Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff. II. Aczél J., Egerváry E. Publs math., 1957, 5, № 1-2, p. 60—71) (франц.)

Решение матричного уравнения

$$\mathbf{P}(s,t)\,\mathbf{P}(t,u)=\mathbf{P}(s,u) \qquad (1)$$

в невырожденных матричных функциях $\mathbf{P}(s,t)$ рассматривалось алгебраическими методами в работе Ацела (реф. 10030). В статье рассматриваются сингулярные решения уравнения (1). Доказывается, что общее решение уравнения (1) (s,t,u произвольны) в матричных функциях ранга r имеет вид: $\mathbf{P}(t,u)=\prod^{-1}(t)\ \mathbf{F}\ \prod(u)$, где $\prod(t)=\{\pi_{ik}(t)\}$ — произвольная невырожденная матричная функция, а $\mathbf{F}$ — матрица, у которой первые r элементы по диагонали равны 1, а остальные элементы равны 0. Чтобы элементы матрицы $\mathbf{P}(t,s)$ удовлетворяли условию $\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t,s)=1$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\sum_{k=1}^{n}\pi_{ik}(t,s)=\text{const},\quad i=1,\ldots,r \text{ и}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\pi_{ik}(t)=0,\quad i=r+1,\ldots,n.$$

Эти результаты остаются в силе и для тех решений уравнения (1), которые определены только при $t\leqslant u$.

Примечание референта. Условие неотрицательности элементов $p_{ik}(t)$ не рассматривается.

И. И. Гихман

10032. О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп. Кузьминов В., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 4, 727—729

Доказано, что любая бикомпактная группа является непрерывным образом тихоновского произведения двуточечных множеств. Н. Я. Виленкин

10033. Некоторые свойства локально компактных абелевых групп. Диксмье (Quelques propriétés des groupes abéliens localement compacts. Dixmier Jacques), Bull. sci. math., 1957, **81**, № 1, 38—48 (франц.)

Пусть $\widetilde{A}$ — множество элементов локально компактной абелевой группы A, которые можно соединить с нулем дугой. Это множество совпадает с объединением всех однопараметрических подгрупп. Для того чтобы $A=\widetilde{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $A=R^n\times D$, где R^n — векторная группа, а D — такая дискретная группа, что $\mathrm{Ext}^1_Z(D,Z)=0$ (Z — группа целых чисел). Аналогичный результат доказан для локальной связности дугами. Группа A называется инъективной, если, каковы бы ни были абелева группа G и ее замкнутая подгруппа H, всякий непрерывный гомоморфизм подгруппы H в A можно распространить на всю группу G. Для того чтобы группа A была инъективной, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид $A=R^n\times T^m$, где T^m — m-мерный тор (m — любое кардинальное число). Н. Я. Виленкин

10034. К теории локально компактных абелевых групп. Хартман, Рылль-Нардзевский (Zur Theorie der lokal-kompakten abelschen Gruppen. Hartman S., Ryll-Nardzewski C.), Colloq. math., 1957, **4**, № 2, 157—188 (нем.)

Изложены некоторые результаты, связанные с эргодичностью, связностью и теорией характеров для локально компактных абелевых групп. Элемент s называется эргодическим, если множество ns, $n=1,2,\ldots$ всюду плотно в G. Если группа G компактна и абелева, то эргодичность эквивалентна выполнению неравенства $\chi(s)\neq 0$ для любого нетривиального характера χ, остоянству почти всюду любой измеримой функции $g(x)$, для которой $g(x)=g(x+s)$ и т. д. Большинство результатов работы не ново — результаты о выделении компоненты нуля в виде прямого слагаемого доказаны референтом в более общем случае (Матем. сб., 1949, **24(66)**, 189—226), вопрос о безграничной делимости в локально компактных группах рассмотрен в работе референта (Успехи матем. наук, 1950, 5:4 (38), 19—47), примеры, связанные с этим вопросом, являются частными случаями общей конструкции прямых сумм с отмеченными подгруппами (там же). Связь между теорией характеров и почти периодическими функциями освещена в ряде работ. Н. Я. Виленкин

10035. О структуре центров универсальных накрывающих для некомпактных классических групп Ли. Солодовников А. С., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 2, 272—275

Найдены центры универсальных накрывающих некомпактных классических групп Ли. Подробные доказательства приведены для $l/SU(n)$-группы унимодулярных комплексных матриц порядка n, сохраняющих эрмитову форму с l отрицательными квадратами. Для этой группы получен следующий результат: центр универсальной накрывающей есть группа с двумя образующими γ_0 и γ_1 с единственным соотношением $\gamma_0^{-n-1}=\gamma_1^{n}$. И. М. Дектярев

10036. Лупы с присоединениями. Кауэлл (Loops with adjoints. Cowell W. R.), Canad. J. Math., 1960, **12**, № 1, 134—144 (англ.)

Манном (Mann H., Ann. Math. Statistics, 1942, **13**, 418—423) показано, как представить некоторое множество латинских квадратов в виде группы и множества перестановок ее элементов. Хорошо известно соответствие между сетями и лупами (см., например, РЖМат, 1956, 4802). Мы будем рассматривать лупу G и некоторое множество перестановок ее элементов. Эту пару мы будем интерпретировать как I-множество (РЖМат, 1959, 2418), в которое вложена сеть лупы. Точнее, перестановки или «присоединения» рассматриваются как прямые, которые можно присоединить к сети лупы G в смысле Брука (Bruck R., Canad. J. Math., 1951, **3**, 94—107). Группа автотопизмов лупы определяет группу автоморфизмов ее сети, аналогичную коллинеациям аффинной плоскости. Мы будем изучать проблему расширения этих сохраняющих инцидентность отображений на присоединяемые прямые. По аналогии с изучением луп с операторами мы будем рассматривать гомоморфизмы луп с присоединениями и извлекать геометрические следствия. Особое внимание будет оказано случаю, когда G обладает обратным свойством (т. е. из $ab=ca=1$ вытекает $(ad)=d$ и $(dc)a=d$ для любого $d\in G$, а присоединения «линейны». Специальный случай, когда G — абелева группа, геометрически интересен тем, что соответствующим I-множеством являются, в частности, веблен-веддербарновы аффинные плоскости.

Введение автора

10037. О мультипликативной полугруппе коммутативного кольца. Исбелл (On the multiplicative semi-

group of a commutative ring. Isbell J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 6, 908—909 (англ.)

Доказывается, что мультипликативная полугруппа коммутативного кольца конечна, если она порождается конечным числом элементов. Л. А. Скорняков

10038. О структуре идеалов некоторых полуколец и компактности топологических пространств. Хорн (On the ideal structure of certain semirings and compactification of topological spaces. Horne J. G., Jr), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 3, 408—430 (англ.).

Пусть S — множество с бинарным отношением R. Подмножество $S_0 \subseteq S$ назовем шиловским R — подмножеством, если для любых $e,f,g \in S$ из fRe и dRg следует существование такого элемента $e' \in S_0$, что fRe' и $e'Rg$. Если S — полугруппа и S_0 — подполугруппа, то S_0 назовем шиловской R — подполугруппой. Непустое подмножество $I \subseteq S$ назовем R-идеалом, если из $f \in I$, $h \in S$ и hRf следует $h \in I$ и, кроме того, для любых $f,g \in I$ существует такой элемент $e \in I$, что fRe и gRe. Назовем центром $C(S)$ полугруппы S совокупность таких элементов $e \in S$, для которых при любом $f \in S$ выполняется соотношение $fe = ef$. Элемент $e \in C(S)$ назовем относительной единицей элемента $f \in S$, если $fe = f$. Отношение $O\{(f,e);\ e$ — относительная единица для $f\}$ назовем каноническим порядком на S. Отношение O^2 — строго каноническим порядком.

Обозначим через $K(X)[K^*(X)]$ и $R(X)[R^*(X)]$ кольца всех [ограниченных] комплексных и действительных непрерывных функций, определенных на топологическом пространстве X. Для шиловского R-подмножества $S_0 \subset S$ справедливы утверждения: 1) Если I является R-идеалом в S, то $I \cap S_0$ является R-идеалом в S_0; 2) Если I_0 является R-идеалом в S_0, то $I \equiv \{f \in S;\ fRe$ для некоторого $e \in I\}$ является R-идеалом в S, причем $I_0 = I \cap S_0$; 3) Если I_1 и I_2 — различные R-идеалы в S, то $I_1 \cap S_0$ и $I_2 \cap S_0$ — различные R-идеалы в S_0. Отсюда, в частности, следует, что для топологического пространства X, в котором S есть мультипликативная полугруппа из $K(X)$, $I \to I \cap K^*(X)$ является взаимно однозначным отображением O-идеалов $K(X)$ на O-идеалы $K^*(X)$, причем максимальным O-идеалам в $K(X)$ соответствуют максимальные R-идеалы в $K^*(X)$. Пусть U — множество R-идеалов в S, $M \in U$, тогда условия: $M \subset \cup\{I; I \in U\}$ и $M \cap S \subset \cup\{I \cap S_0;\ I \in U\}$ эквивалентны.

Допустим, что S — полугруппа. Подмножество $I \subseteq S$ будет O-идеалом тогда и только тогда, когда I будет таким идеалом полугруппы, что для любой пары элементов $f_1, f_2 \in I$ существует элемент $e \in I$, для которого верны соотношения $f_1 Oe$ и $f_2 Oe$. Подмножество $P \subseteq S$ назовем множеством главного типа (R), если $(s \setminus p)(U(s \setminus p)) \subseteq S \setminus p$, где $U(s \setminus p) = \{e \in S;\ fRe$ для некоторого $f \in s \setminus p\}$. P есть множество главного типа (R) в том и только в том случае, если для любых элементов $f,e,k \in S$, удовлетворяющих условиям $f \in P$, fRe и $ke \in P$, элемент $k \in P$.

Пусть G есть некоторое множество собственных подмножеств множества S. Для подмножества $u \in G$ определим дуальное замыкание Стоуна $c_1(u)$ и замыкание Стоуна $c_2(u)$ равенствами: $c_1(u) = \{M_0 \in G;\ M_0 \subseteq \cap\{M; M \in U\}\}$, $c_2(u) = \{M_0 \in G;\ M_0 \supset \cup\{M; M \in U\}\}$. Множество $U \in G$ назовем $c_1[c_2]$ открытым, если $c_1(G \setminus u) = G \setminus u[c_2(G \setminus u) = G \setminus u]$. Эти определения приводят к дуальной паратопологии и топологии Стоуна. Множество A называется f-множеством относительно G, если для него выполнено условие $(\alpha_1)[(\alpha_2)]$: для любого конечного подмножества $F \subset A$ существуют такие M, $M_0 \in G$, что $M \subseteq S \setminus F[M \subseteq F]$ и $M_0 \subseteq S \setminus A[M_0 \subseteq A]$. Множество с дуальной паратопологией Стоуна (паратопологией Стоуна) будет компактным в том и только в том случае, если каждое $A \subseteq S$ удовлетворяет условию $(\alpha_1)[(\alpha_2)]$.

Рассматриваются другие условия компактности. Полученные результаты применяются ко множествам $K(X)$, $K^*(X)$ $R(X)$, $R^*(X)$. Пусть в полугруппе S из fOe следует существование таких элементов $e_1, h \in C(S)$, что $fe_1 = f$ и $e_1(he) = e_1$, тогда каждый O^2-идеал главного типа является O-идеалом главного типа. Дается обобщение основной теоремы Мильграма (Milgram A. N., Duke Math. J., 1949, **16**, 377—383). Если S есть бирегулярное кольцо с единицей, то: 1) совокупность максимальных идеалов из S образует компактное хаусдорфово пространство в смысле дуальной паратопологии Стоуна; 2) собственный идеал является максимальным тогда и только тогда, когда он есть O-идеал главного типа; 3) каждый идеал есть пересечение всех максимальных идеалов, содержащих его. В. В. Пашенков

10039. О вполне некоммутативных бикомпактных полугруппах. Кряян (O bikompaktných totálne nekomutatívnych pologrupách. Kŕňan František), Mat.-fyz. časop., 1959, **9**, № 2, 101—108 (словацк.; рез. русск., англ.)

Хаусдорфову бикомпактную полугруппу S, имеющую по крайней мере два идемпотента, называем вполне некоммутативной, если для двух любых идемпотентов $e_\alpha \neq e_\beta$ имеет место $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$. Приведем некоторые результаты: 1) центр S — пустой; 2) минимальный двусторонний идеал N из S содержит все идемпотенты полугруппы S и является объединением всех максимальных групп из S (все они изоморфны как топологические группы), кроме того, $N = \cup_{n=1}^{\infty} S^n$; 3) равенство $S = S^2$ имеет место тогда и только тогда, когда S — простая полугруппа без нуля; 4) если $S - S^2 \neq 0$, то S^2 является пересечением всех максимальных двусторонних идеалов из S. Š. Schwarz

10040. Об эквивалентности некоторых правил сокращения в полугруппах. Грмова (O ekvivalencii istých pravidiel krátenia v pologrupách. Hrmová Renáta), Mat.-fyz. časop., 1959, **9**, № 3, 177—182 (словацк.; рез. русск., англ.)

Скажем, что полугруппа S удовлетворяет условию B_r, если из $x^2 = yx$ вытекает $x = y$ для всякой пары $x,y \in S$, и удовлетворяет условию A_r, если в S имеет место правило сокращения справа. Доказывается, что условия A_r и B_r в общем случае не эквивалентны, но для двух классов полугрупп, именно для периодических полугрупп и для полугрупп по элементам бикомпактных (т. е. полугрупп, в которых подполугруппы с одним образующим бикомпактны), они эквивалентны. Š. Schwarz

10041. О вполне некоммутативных полугруппах. Шварц, Крайнякова (O totálne nekomutatívnych pologrupách. Schwarz Štefan, Krajňáková Dorota), Mat.-fyz. časop., 1959, **9**, № 2, 92—100 (словацк.; рез. русск., англ.)

Пусть S — вполне некоммутативная полугруппа (т. е. такая периодическая полугруппа, содержащая больше одного идемпотента, что для любых двух идемпотентов $e_\alpha \neq e_\beta$ имеет место $e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha$) и пусть E — множество всех идемпотентов из S. Доказаны теоремы: 1) S всегда содержит минимальный двусторонний идеал N и справедливо соотношение $E \subseteq N$. 2) Если $S^2 \neq S$, то множество S^2 совпадает с пересечением всех максимальных двусторонних идеалов из S, а также с пересечением всех максимальных левых идеалов, содержащих E. 3) Если $S^2 = S$, то или $S = N$, или $S - N$ не пусто и S не содержит максимального двустороннего идеала. Если S — конечная полугруппа, то существует такое натуральное число $n \geqslant 1$, что $S^n = N$. B. Kolibiarová

10042. К понятию порядка бесконечной малости. Кампуш-Ферейра (Sur la notion d'ordre infinitésimal. Campos Ferreira Jaime), Portugaliae math., 1955, **14**, № 2, 43—62 (франц.)

Пусть S — произвольное множество, $\mathfrak{F}$ — фильтр S, $\Phi_{\mathfrak{F}}$ — множество всех неотрицательных числовых функций, каждая из которых определена на некотором множестве $F\in\mathfrak{F}$. В $\Phi_{\mathfrak{F}}$ определяется отношение предпорядка $\sqsupset$: $\varphi\sqsupset\psi$, если существуют множество $F\in\mathfrak{F}$ и число $k>0$ такие, что $\varphi(x)\leqslant k\psi(x)$ для всех $x\in F$, а также отношение эквивалентности $\square$. Класс a, в который входит функция $\varphi(x)$, обозначается $a=\operatorname{ord}\varphi$. Пусть $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ — соответствующее фактормножество. В $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ определяются сложение: $\operatorname{ord}\varphi+\operatorname{ord}\psi=\operatorname{ord}\varphi\psi$ и умножение на неотрицательные числа: $\alpha\operatorname{ord}\varphi=\operatorname{ord}\varphi^{\alpha}$. При этом $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ превращается в абелеву полугруппу с неотрицательными числами в качестве области операторов. Если $e=\operatorname{ord}\varphi=0$, то для любого $a\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ имеет место $a+e=e$, так что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ не является группой. Если же $\varphi(x)$ ограничена снизу и сверху и $0=\operatorname{ord}\varphi$, то $a+0=0$ для любого $a\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, т. е. 0 является нулем полугруппы $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$. В $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ вводятся отношения порядка: 1) $a\sqsupset b$, если $\varphi\sqsupset\psi$ ($a=\operatorname{ord}\varphi$, $b=\operatorname{ord}\psi$), 2) $a>b$, если существуют множество $F\in\mathfrak{F}$ и функция $\omega\in\Phi_{\mathfrak{F}}$ такие, что $\varphi(x)=\omega(x)\psi(x)$ для всех $x\in F$ и $\operatorname{im}\omega(x)=0$. Операторная полугруппа $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ становится упорядоченной, так как и $\sqsupset$, и $>$ инвариантны относительно сложения и умножения на неотрицательные числа. Кроме того, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ — структура по отношению к $\sqsupset$. Однако если вместо $\Phi_{\mathfrak{F}}$ рассматривать $\Phi^*_{\mathfrak{F}}=\Phi_{\mathfrak{F}}\setminus\varphi(x)$, где $\varphi(x)\equiv 0$, то соответствующая полугруппа $\mathfrak{A}^*_{\mathfrak{F}}$ становится группой, областью операторов которой является уже все поле действительных чисел, т. е. $\mathfrak{A}^*_{\mathfrak{F}}$ — векторное пространство, упорядоченное с помощью $\sqsupset$ и $>$, причем относительно $\sqsupset$ оно представляет даже структуру (здесь принята терминология Н. Бурбаки „Общая топология“). Г. В. Дорофеев

10043. О строении частичных групп. Уиттекер (On the structure of half-groups. Whittaker James V.), Canad. J. Math., 1959, 11, № 4, 651—659 (англ.)

Частичной группой в работе названо множество S со всюду определенной на нем бинарной операцией $-$, удовлетворяющей при любых $x,y,z\in S$ условию $(x-z)-(y-z)=x-y$. Если частичная группа S содержит „единицу“, т. е. такой элемент e, что $x-x=e$ для любого $x\in S$, то S называется псевдогруппой. Всякая аддитивно записанная группа G является псевдогруппой относительно операции $x-y=x+(-y)$. Пусть G — аддитивно записанная группа, S — некоторое множество, $G\supset S$; f — однозначное отображение S в G такое, что $f(u)=u$ для любого $u\in G$. Тогда S является псевдогруппой относительно операции $x\circ y=f(x)-f(y)$. S называется расширением группы G. Доказано, что всякая псевдогруппа S является расширением некоторой группы G. Если всюду на множестве S определена бинарная операция $-$, такая, что $(x-z)-(x-y)=y-z$ для любых $x,y,z\in S$, то S, оказывается, является коммутативной псевдогруппой относительно операции $-$. Частичная группа S с левым сокращением является группой относительно операции

$$x+y=x-e-y), \qquad (1)$$

где e — единица S.

Элемент a частичной группы H называется идемпотентом, если $a-a=a$. Подмножество $K\subset H$ называется инвариантным в H, если $x-(x-K)\subset K$ для всех $x\in H$. Пусть $K\subset H$ частичная подгруппа H, содержащая идемпотент; будем писать $x\equiv y$ тогда и только тогда, когда $x-y\in K$. Отношение $\equiv$ является стабильной эквивалентностью на H. Обозначим фактормножество по этой эквивалентности через H/K. Если K — инвариантная частичная подгруппа H, содержащая все идемпотенты из H, то H/K является группой.

Пусть A — некоторое множество, G — группа, $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство попарно непересекающихся множеств; f_α — однозначное отображение множества S_α в G; пусть для любых $\alpha,\beta\in A$ существует взаимно однозначное отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ группы G в S_α такое, что $f_\alpha(\varphi_{\alpha\beta}(g))=g$ для любого $g\in G$. Пусть $H=\bigcup_{\alpha\in A}S_\alpha$

$$x\circ y=\varphi_{\alpha\beta}(f_\alpha(x)-f_\beta(y)), \qquad (2)$$

если $x\in S_\alpha$, $y\in S_\beta$. Тогда H оказывается частичной группой, а каждое множество S_α — псевдогруппой с единицей $e_\alpha=\varphi_{\alpha\alpha}(e)$, где e — единица группы G. Множество $S_\alpha\circ e_\alpha$ является группой, изоморфной группе G. Обратно, каждая частичная группа может быть представлена в виде объединения попарно непересекающихся псевдогрупп S_α с операцией (2).

Пусть E — множество всех идемпотентов частичной группы H. Множество F всех элементов вида $u-v$, где $u,v\in E$, является инвариантной частичной подгруппой H. Если K — инвариантная частичная подгруппа H, содержащая E, то существует такой нормальный делитель N группы G, что $K/F\cong N$ и $H/K\cong G/N$ ($\cong$ означает изоморфизм). Если H — частичная группа с правым сокращением, то H является объединением попарно непересекающихся изоморфных друг другу групп. Относительно некоторой операции, определенной аналогично (1), H является полугруппой. Заключительная часть статьи посвящена рассмотрению топологических частичных групп, т. е. частичных групп, в которых определена топология и операция $x-y$ непрерывна относительно этой топологии по x и y. Л. М. Глускин

10044 К. Теория групп. Баумгартнер (Gruppentheorie. 3. vollst. neubearb. Aufl. Baumgartner Ludwig. Berlin, de Gruyter, 1958, 110 S., ill., 3.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 42, 3146 (нем.)

10045 Д. Об упорядоченных неархимедовых полугруппах. Дифенбах (Über geordnete, nichtarchimedische Halbgruppen. Diefenbach Ludger.— Diss., Math.-naturwiss. Fak., Köln, 1959 (1958), 50 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **B**, № 19, 1758 (нем.)

10046 Д. О проблеме Бернсайда. (Автореф. докт. дисс.). Кострикин А. И., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 237—240
См. РЖМат, 1959, 4485, 4486.

10047 Д. Группы с достижимыми подгруппами. Сафонов С. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусск. ун-т, Гомель, 1959

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

10048. О группах когомологий $\mathfrak{P}$-адических числовых полей. Куниёси (On the cohomology groups of $\mathfrak{P}$-adic number fields. Kuniyoshi Hideo), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 9, 609—611 (англ.)

Доказывается, что группы когомологии и гомологии кольца целых чисел локального поля Λ с коэффициентами в произвольном двустороннем Λ-модуле A будут периодичны, начиная с групп $H^1(\Lambda, A)$ и $H_1(\Lambda, A)$.
С. П. Демушкин

10049. Когомологические группы полей. Амицур (Cohomology groups of fields. Amitsur S. A.), Bull. Res. Council Israel, 1957, F7, № 1, 47—48 (англ.)

Если N — конечное нормальное расширение поля C и G — его группа Галуа, то $H^2(G, N^*)$ интерпретируется как группа Брауэра простых алгебр конечной размерности над полем C, которые разлагаются полем N. Если N — чисто несепарабельное расширение поля C показателя 1, то как было показано Хокшилдом, группа Брауэра алгебр над C, которые разлагаются полем N, интерпретируется как подгруппа группы $H^2(L, N^+)$, где L — алгебра Ли дифференциалов поля N над C. Алгебра L будет «ограниченной» в смысле Джекобсона. Теория когомологических групп «ограниченных» алгебр Ли была построена за последнее время Хокшилдом.

Методы получения этих результатов различны. Для произвольного расширения конечной степени F поля C автор строит некоторую последовательность когомологических групп $H^n(F/C)$, обладающую свойствами: 1) $H^2(F/C)$ изоморфна группе Брауэра всех простых конечной размерности алгебр над C, которые разлагаются полем F. 2) Если $F=N$ — нормальное расширение поля C, то $H^n(N/C) \cong H^n(G, N^*)$, где G — группа Галуа N над C. 3) Если $F=N$ — чисто несепарабельное расширение поля C показателя 1, то $H^n(N/C) \cong H^n(L, N^+)$.

С. П. Демушкин

10050. Простые алгебры и группы когомологий произвольных полей. Амицур (Simple algebras and cohomology groups of arbitrary fields. Amitsur S. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 1, 73—112 (англ.)

Доказательство результатов, о которых сообщалось в реф. 10049.

С. П. Демушкин

10051. Дифференцирование алгебраических функций. Уоллес (Differentiation of algebraic functions. Wallace Andrew H.), Proc. London Math. Soc., 1959, **9**, № 35, 465—480 (англ.)

Систематическое изложение вопросов, связанных с дифференцированием алгебраических функций (как замечает автор, некоторые из этих результатов частично или полностью известны): дифференцирование функций, дифференцирование в точке, дифференцирование неявных функций, последовательное дифференцирование, теорема существования неявной функции, степенные разложения. Особо исследуется поведение производных при специализациях и приводится ряд примеров, характеризующих возникающие при этом особенности (например, если семейство функций дифференцируемо в точке, то подсемейство его, в частности одна из функций, может в соответствующей точке не быть дифференцируемой — обстоятельство, связанное с переходом от поля, порожденного этими функциями к его подполю).

В. В. Морозов

10052. Исправления к моей работе «О существовании неразветвленных сепарабельных бесконечных разрешимых расширений полей функций над конечным полем. Морикава (Correction to my paper «On the existence of unramified separable infinite solvable extensions of function fields over finite fields» in Nagoya Mathematical Journal vol. 13 (1958). Morikawa Hisasi), Nagoya Math. J., 1959, **14**, № 53—57 (англ.)

См. РЖМат, 1959, 10869. Для корректности доказательства теоремы, приведенной в цитированном реферате, оказываются нужными, кроме двух уже доказанных лемм, еще пять лемм, доказательства которых и приводятся.

В. В. Морозов

10053. Системы точек и дзета-функции полей алгебраических функций. Лампрехт (Bewertungssysteme und Zetafunktionen algebraischer Funktionenkörper. II. Lamprecht Erich), Arch. Math., 1956, **7**, № 3, 225—234 (нем.)

Ч. I см. РЖМат, 1960, 1422. Пусть A — поле функций от двух переменных над полем констант k. Рассмотрим подполе K поля A степени трансцендентности 1 над k, алгебраически замкнутое в A. Если $K' \neq K$ — другое такое же подполе, то рассмотрим множество B всех точек (places) $\mathfrak{P}$ поля A, которые индуцируют на K' (но не на K) изоморфизм. Поле $A\mathfrak{P}$ содержит $K'\mathfrak{P}$, поэтому $A\mathfrak{P}$ будет иметь над $K\mathfrak{P}$ степень трансцендентности 1. Автор интересуется свойствами, присущими A/K и $A\mathfrak{P}/K\mathfrak{P}$ для почти всех (т. е. для всех, кроме конечного числа) $\mathfrak{P}$ из B. Основной результат настоящей статьи формулируется так: пусть $g(A/K)$ — род A/K, $\bar{g}(A/K)$ — консервативный род, определенный как минимум родов поля A/K при всевозможных расширениях поля констант. Предположим, что A/K сепарабельно. Тогда для почти всех $\mathfrak{P} \in B$ поле $K\mathfrak{P}$ будет в точности полем констант для $A\mathfrak{P}$ и мы будем иметь $G(A/K)=G(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{P}) \leqslant g(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{P}) \leqslant g(A/K)$. Среди следствий этой теоремы отметим следующие: (1). Если $G(A/K)=g(A/K)$, то $G(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{P})=g(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{P})$ для почти всех $\mathfrak{P} \in B$ (РЖМат, 1956, 7848); (2). $g(A/K)-g(A\mathfrak{P}/K\mathfrak{P})$ делится на $p-1/2$ для почти всех $\mathfrak{P} \in B$. (см. Tate J., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 400—406); (3). Пусть $\bar{g}(A/K)$ обозначает максимум родов подполей A степени трансцендентности 1 над k. Тогда, если k совершенно, то имеем $\bar{g}(A/k) \leqslant \max(g(K/k), g(A/k))$. Если, кроме того, $g(K/k) > G(A/K)$, то $g(K/k)=\bar{g}(A/k)$ и K — единственное поле с последним свойством. Автор применяет эти результаты к случаю, когда k — конечное поле. Он интересуется такими свойствами дзета-функции $Z_A(s; K, K')$, которые зависят только от A, но не от K и K' (определение дзета-функции см. РЖМат, 1960, 14[2]). В частности, если A может быть записано как независимое объединение двух полей степени трансцендентности 1 над k, ему удается построить дзета-функцию A, которая однозначно определяется полем A и только им (см. также РЖМат, 1956, 7180).

P. Roquette

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, 107.

10054. Неразветвленная теория полей классов над функциональным полем нескольких переменных. Ланг (Unramified class field theory over function fields in several variables. Lang Serge), Ann. Math., 1956, **64**, № 2, 285—325 (англ.)

Пусть K — поле алгебраических функций от нескольких переменных над конечным полем k и L/K — конечное абелево расширение поля K. Пусть $\mathfrak{o}$ — локальное кольцо простой точки на модели поля K/k (регулярное кольцо), $\mathfrak{p}$ — его максимальный идеал. Если $\mathfrak{o}$ — неразветвлено в L, то мы можем обычным образом сопоставить кольцу $\mathfrak{o}$ (или $\mathfrak{p}$) символ Фробениуса $(\mathfrak{p}, L/K)$, являющийся элементом группы Галуа G поля L/K; это отображение может быть продолжено до гомоморфизма φ (отображение взаимности) в группу G свободной группы $\mathfrak{Z}$, порожденной множеством всех регулярных локальных колец K, неразветвляющихся в L. Изучение отображения взаимности является основной задачей теории полей классов; основные проблемы — определить его образ и его ядро. По аналогии с теорией полей классов мы ожидаем, что образ φ должен совпадать со всей группой G. Что касается ядра, то имеется группа, которая тривиальным образом содержится в нем: пусть $\mathfrak{o}$ будет регулярно и неразветвлено в L и $\mathfrak{O}$ — локальное кольцо L над $\mathfrak{o}$; тогда поле вычетов кольца $\mathfrak{O}$ является алгебраическим расширением степени d поля вычетов $\mathfrak{o}$ и d есть порядок элемента $(\mathfrak{p}, L/K)$, если $\mathfrak{p}$ — максимальный простой идеал $\mathfrak{o}$; ядро φ поэтому содержит $d\mathfrak{o}$. Назовем группой следов группу, порожденную элементами $d\mathfrak{o}$ для всех регулярных локальных колец, неразветвленных в L. Предположим теперь, что расширение L/K неразветвлено; это означает, что каждое нормальное локальное кольцо в K неразветвлено в L (автор показывает, что достаточно, чтобы условие выполнялось

для всех локальных колец, принадлежащих некоторой нормальной полной модели K). Тогда по аналогии с теорией полей классов мы ожидаем, что ядро отображения взаимности должно содержать, кроме группы следов, определенную подгруппу $\mathfrak{Z}$, аналогичную группе главных идеалов в числовой теории. В этой статье автор конструирует такую группу для некоторого типа неразветвленных абелевых расширений L/K, который будет сейчас описан. Пусть теперь нам задана фиксированная нормальная проективная модель V поля K/k, в качестве же $\mathfrak{Z}$ возьмем группу, порожденную локальными кольцами простых точек из V (это не влечет за собой серьезной потери общности). Пусть A — многообразие Альбанезе модели V и α — каноническое отображение (определенное над k) V в A. Пусть B — абелево многообразие, определенное над k и допускающее гомоморфизм λ на все A с конечным ядром, определенный над k. Тогда мы можем следующим образом поставить в соответствие B и λ неразветвленное расширение: множество $\lambda^{-1}(\alpha(V))$, как оказывается, должно быть многообразием, обозначим его через C; если U есть множество точек $(x, y)\in V\times C$ таких, что $\alpha(x)=\lambda(y)$ (x — простая на V), то проекция $V\times C\to V$ индуцирует отображение $U\to V$, которое является неразветвленным накрытием множества простых точек V; если L — поле функций на U, рациональных над k, то L/K — абелево неразветвленное расширение. Подобные расширения, а также и те, которые могут быть получены из них при помощи расширений о новного поля, называются расширениями типа Альбанезе. Пусть $\mathfrak{Z}_0$ будет группой элементов степени 0 в $\mathfrak{Z}$; тогда α определяет гомоморфизм $\mathfrak{Z}_0$ в группу A_k рациональных над K точек A; ядро этого гомоморфизма называется ядром Альбанезе. Это есть группа, которая играет роль группы главных идеалов в числовой теории. Действительно, автор доказывает следующие утверждения, дающие полное обобщение теории полей классов: если L/K относится к типу Альбанезе, то отображение взаимности является отображением на G и его ядро порождается группой следов и ядром Альбанезе; каждой подгруппе Γ конечного индекса в $\mathfrak{Z}$, содержащей ядро Альбанезе, соответствует единственное расширение L/K типа Альбанезе такое, что Γ является ядром отображения взаимности L/K; имеет место теорема ограничения для каждого нормального расширения поля K. Расширения типа Альбанезе, конечно, не являются всеми неразветвленными абелевыми расширениями K. Пусть, например, X будет рациональным дивизором на v, для которого при некотором $n>0$, nX линейно эквивалентно нулю; положим $nX=(\varphi)$, $\varphi\in K$, предположим, что n взаимно просто с характеристикой K и что k содержит корни степени n из единицы. Тогда $K(\varphi^{1/n})$ будет неразветвленным абелевым расширением K, но не будет типа Альбанезе, если X алгебраически не эквивалентно нулю. Во всяком случае автор доказывает результат, из которого следует, что если в группе Нерона — Севери нет кручения, то каждой абелево неразветвленное расширение взаимно простой с характеристикой степени будет иметь тип Альбанезе. Пример Серра показывает, что условие, чтобы степень была взаимно проста с характеристикой, не может быть опущено. C. Chevalley

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, 672.

10055. Теория голоморфных функций Зариского. Приложение к теореме связности. Шевалле (La théorie des fonctions holomorphes de Zariski. Application au théorème de connexité. Chevalley Claude), Sémin Bourbaki. Secrét. math., 1957—1958, 10. Paris, 1958, 158-1—158-17 (франц.)

Пусть U — алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем, $o(x)$ — локальное кольцо точки $x\in U$, $\overline{o(x)}$ — его пополнение, $P(U)$ — алгебра числовых функций, определенных на всем U, $\mathfrak{p}(U, A)$ — ее идеал, состоящий из функций, равных 0 на подмножестве A. Голоморфной функцией на U вдоль подмножества A называется соответствие, сопоставляющее каждому $x\in A$ элемент $h(x)\in\overline{o(x)}$, причем для всякой точки из A существуют такая окрестность U' в U и такие функции $u_n\in P(U')$, что последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $\mathfrak{p}(U', A)$-адической топологии и $\lim u_n(x)=h(x)$ ($x\in U'\cap A$). Положим $\mathfrak{M}(x)=\overline{o(x)}\otimes_{o(x)}F_U$, где F_U — поле всех числовых функций на U. Мероморфной функцией на U вдоль A называется соответствие $x\to v(x)$, где $x\in A$, $v(x)\in\mathfrak{M}(x)$, причем для всякой точки множества A существуют такая окрестность U' и такая функция $z\in F_U$, что $z\neq 0$, $zv(x)\in\overline{o(x)}$ для $x\in U'|_A$ и что соответствие $x\to zv(x)$ является голоморфной функцией на U' вдоль $U'|_A$. Мероморфные функции вдоль A образуют алгебру $\mathfrak{M}(U, A)$ над полем F_U. Доказывается, что если замкнутое множество A связно, то $\mathfrak{M}(U, A)$ — область целостности, а если U нормально, то верно и обратное. Пусть f — собственный морфизм многообразия V в U, A — замкнутое подмножество в U, $B=f^{-1}(A)$. Тогда f — индуцирует изоморфизм алгебры $\mathfrak{M}(U, A)\otimes_{F_U}F$ на $\mathfrak{M}(V, B)$. Отсюда выводится следующий результат. Пусть f — собственный морфизм многообразия V на нормальное многообразие U и пусть $\varphi: F_U\to F_V$ — индуцированный им гомоморфизм. Если каждый элемент поля F_V, алгебраический над $\varphi(F_U)$, является радикалом над этим полем, то для всякого связного замкнутого $A\subset U$ множество $f^{-1}(A)$ связно. А. Л. Онищик

10056. О полях коэффициентов. Геддес (On coefficient fields. Geddes A.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1958, 4, № 1, 42—48 (англ.)

Рассматривается вопрос о вложении заданного подполя K полного равнохарактеристического локального кольца Q (т. е. характеристика кольца Q совпадает с характеристикой поля вычетов $Q/\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал кольца Q) в некоторое поле коэффициентов кольца Q. Коэн (Cohen I. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, 59, 54—106) и показал, что такое вложение возможно не всегда. Расширение F поля K называется сепарабельным, если либо характеристика поля K равна нулю, либо, в случае, когда поле K имеет простую характеристику p, вместе с каждой линейно независимой над K системой элементов $x_1, \ldots, x_m$ поля F линейно независима над K и система элементов $x^p_1, \ldots, x^p_m$. Основной результат: Пусть Q — произвольное полное равнохарактеристическое слабо локальное кольцо (РЖМат, 1956, 3700) с максимальным идеалом $\mathfrak{M}$ и пусть K — некоторое подполе кольца Q. Тогда для любого сепарабельного расширения F_1 поля $\Theta_1(K)$ в поле Q_1, где $Q_1=Q/\mathfrak{M}$ и Θ_1 — естественный гомоморфизм $Q\to Q_1$, существует по крайней мере одно такое подполе F кольца Q, что $\Theta_1(F)=F_1$. Из этой теоремы непосредственно следует, что любое полное равнохарактеристическое слабо локальное кольцо Q обладает полем коэффициентов и что каждое подполе K кольца Q, для которого поле вычетов $Q_1/\mathfrak{M}=Q_1$ является сепарабельным расширением образа $\Theta_1(K)$ поля K в поле Q_1, вкладывается в некоторое поле коэффициентов кольца Q. Приводится пример, показывающий, что указанное условие не является необходимым для вложимости некоторого подполя K полного равнохарактеристического локального кольца Q в поле коэффициентов кольца Q. Доказательство основной теоремы сводится к случаю, когда Q является слабо примарным кольцом, показатель которого $\rho\leqslant 2$. При этом произвольное полное слабо локальное кольцо Q представляется как проективный предел слабо примарных колец $Q_i=Q/\mathfrak{M}^i$ ($i=1, 2, \ldots$).

Е. Г. Шульгейфер

10057. **Некоторые дополнения к теории одномерных локальных колец.** **Норткотт** (Some contributions to the theory of one-dimensional local rings. Northcott D. G.), Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 31, 388—415 (англ.).

Дальнейшее развитие теории одномерных локальных колец (РЖМат, 1958, 8629) в направлении, подсказанном геометрической теорией бесконечно близких точек кривых в n-мерном пространстве. Абстрактная трактовка делает полученные результаты применимыми к локальным кольцам, не обязательно являющимся геометрическими, причем даже характеристика рассматриваемых колец не обязана совпадать с характеристикой их полей вычетов. Пусть Q — одномерное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $K = Q/\mathfrak{m}$; первым окрестностным кольцом R для Q называется кольцо, составленное из частных вида a/b, где $a \in \mathfrak{m}^s$, b — поверхностный элемент степени s, s — любое (РЖМат, 1955, 2141К.). Если $\mathfrak{m}$ не состоит только из делителей нуля, то R является полулокальным кольцом. Кольца частных $Q_1^{(i)}$, $i = 1, \ldots, l$, кольца R по его максимальным идеалам автор называет локальными кольцами в первой окрестности кольца Q. Максимальные идеалы и кольца вычетов этих колец обозначаются соответственно через $\mathfrak{P}_i$ и $K_1^{(i)}$. Доказывается, что все степени $[K_1^{(i)} : K]$ конечны и кратность $m(Q)$ идеала $\mathfrak{m}$ равна $\sum_{i=1}^{l} [K_1^{(i)} : K] \operatorname{lenght} (Q_1^{(i)}\mathfrak{m})$, причем идеалы $Q_1^{(i)}\mathfrak{m}$ являются главными. Сумма $\sum_{i=1}^{l} [K_1^{(i)} : K]\, m(Q_1^{(i)})$ не может превышать $m(Q)$. „Ветвью с началом Q“ называется последовательность локальных колец $Q = Q_0, Q_1, \ldots,$ в которой каждое Q_{n+1} является локальным кольцом в первой окрестности Q_n. Доказывается, что число различных ветвей с началом Q обязательно конечно. С каждой ветвью связывается „дилатационная последовательность“ $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ где $\tau_n \in Q_n$ и $Q_{n+1}\tau_{n+1} = Q_{n+1}\mathfrak{m}_n$ ($\mathfrak{m}_n$ — максимальный идеал в Q_n). Если $n > r$ и отношение $\tau_{r+1}/\tau_{r+2}\tau_{r+3} \ldots \tau_n$ служит делителем единицы в кольце Q_n, то Q_n называется „близким к Q_r“. Доказывается, что в таком случае все промежуточные кольца между Q_r и Q_n близки к Q_r. „Точкой“ дерева окрестностей называется конечный начальный отрезок ветви. Полем вычетов K_p и кратностью $m(P)$ такой точки P называются поле вычетов и кратность последнего члена соответствующей последовательности локальных колец. Если последнее кольцо близко к Q, то и точка называется близкой к Q. Доказывается, что $m(Q) = \sum [K_P : K]\, m(P)$, где суммирование производится по всем точкам P, близким к Q. В случае, если Q является областью целостности, то любая ветвь представляет собою возрастающую цепочку подколец их общего поля частных. Доказывается, что объединение этих колец всегда является кольцом нормы, связанной с локальным кольцом Q. Обратно, кольцо каждой нормы, связанной с Q, есть объединение колец некоторой ветви с началом Q. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между ветвями с началом Q и аналитическими компонентами Q, определяемыми обычным образом через пополнение Q^* кольца Q. Последний раздел работы посвящен изучению связей между ветвями с началами Q и Q^*. В частности, установлена связь между кратностями Q и его аналитических компонент без предположения геометричности рассматриваемых колец.

А. И. Узков

10058. **Пучки в полях алгебраических чисел.** **Ивасава** (Sheaves for algebraic number fields. Iwasawa Kenkichi), Ann. Math., 1959, 69, № 2, 408—413 (англ.)

Пусть K — поле алгебраических чисел (конечной или бесконечной степени) и X — множество всех неархимедовых простых дивизоров поля K. Множество X превращается в T_1-пространство, если в качестве базы открытых множеств принять множества U_a ($a \in K$), состоящие из тех $P \in X$, для которых a является P-целым. Для произвольного открытого множества $U \subset X$ через F_U обозначается подгруппа мультипликативной группы поля K, состоящая из тех $a \neq 0$, которые являются локальными P-единицами для всех $P \in U$. Если открытое множество V содержится в U, то имеем естественный мономорфизм $F_U \to F_V$. В силу этого группы F_U определяют над пространством X пучок абелевых групп F. Доказывается, что при $n \geqslant 2$ группы когомологий $H^n = H^n(X, F)$ тривиальны. Группа H^0 изоморфна группе единиц поля K, а группа H^1 — пределу прямого спектра групп классов дивизоров для всех полей конечной степени, содержащихся в K. Далее, предполагая, что K содержит первообразные корни степеней p^n из 1 для всех $n \geqslant 1$ (p — простое), обозначим через L максимальное абелево p-расширение поля K, обладающее тем свойством, что всякий простой дивизор поля K, не делящий p, не разветвлен в L. Поле L содержит подполе M, получающееся из K присоединением корней степеней p^n, $n \geqslant 1$, из всех единиц поля K. Показано, что при сделанном предположении p-примарная компонента H_p^1 группы $H^1(X, F)$ изоморфна группе характеров группы Галуа расширения L/M (с круллевской топологией).

Пусть теперь K — объединение полей K_n ($n \geqslant 1$), где K_n получено из поля рациональных чисел присоединением первообразного корня степени p^{n+1} из 1 ($p > 2$). Ранее автором было показано, что при всех достаточно больших $n \geqslant n_0$ для показателя e_n, с которым p входит в число классов дивизоров поля K_n, имеет место формула $e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$, где целые числа λ, μ, ν не зависят от n. В настоящей работе доказывается, что для равенства $\mu = 0$ необходимо и достаточно, чтобы группа H_p имела конечный ранг. В сноске отмечается, что группа H_p^1 тривиальна тогда и только тогда, когда простое число p регулярно.

З. И. Боревич

10059. **О модулях поля алгебраических функций.** **Манин Ю. И.**, Докл. АН СССР, 1959, 125, № 3, 488—491

Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел; R — поле алгебраических функций на кривой, определенной над K, рода $g > 1$. Изучается вопрос о наименьшей возможной степени трансцендентности над полем рациональных чисел поля определения R. Доказывается, что поле алгебраических функций рода $g > 1$ обладает полем определения, степень трансцендентности которого $\leqslant 3g - 3$, причем указано, присоединением каких величин к полю рациональных чисел можно получить трансцендентную часть поля определения с этим свойством.

С. П. Демушкин

10060. **Гензелевы кольца.** **Лафон** (Anneaux henséliens. Lafon J.-P.), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 19-1—19-11 (франц.)

Излагаются некоторые результаты, принадлежащие Нагата (РЖМат, 1954, 3257; 1959, 162).

С. П. Демушкин

10061. **Теория сизигий в локальных кольцах.** **Серр**, Сугаку, 1956, 7, № 4, 232—234 (японск.)

Лекция, прочитанная на Международном Симпозиуме по теории алгебраических чисел (Токио—Никко, 1955). Рассматривается теория сизигиев Гильберта для локальных колец и обсуждается, в частности, ее применения к алгебраическим многообразиям, расположенным в проективных пространствах. Liu Chang Wen

10062. Замечание о теореме $AF+B\Phi$ и теории локальных колец. Норткотт (A note on the $AF+B\Phi$ theorem and the theory of local rings. Northcott D. G.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 545—550 (англ.)

Локальное кольцо Q с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ называется „обычным", если присоединенное градуированное кольцо $\sum \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ не содержит нильпотентных элементов. Рассуждения, использующие характеристические полиномы и внешние элементы, показывают, что если Q есть обычное локальное кольцо размерности 1, то его целочисленное замыкание Q' совпадает с его первым кольцом из окрестности, т. е. с $Q[u^{-1}\mathfrak{m}]$, где u — внешний элемент степени 1 (см. РЖМат, 1956, 5749). В частности, Q' есть Q-модуль конечного типа. Пусть v_i — оценки (в конечном числе) на Q с центром $\mathfrak{m}$ и пусть $e(Q)$ — кратность кольца Q; если x и y — два элемента из Q такие, что $v_i(y) \geqslant v_i(x) + e(Q) - 1$ для всякого i, то $y \in Qx$; это обобщает локальную формулировку теоремы $AF+B\Phi$, относящуюся к случаю, когда кривая $F=0$ имеет обычную краткую точку.

P. Samuel

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, 931.

10063. Работы Норткотта об одномерных локальных кольцах. Мори (Les travaux de Northcott sur les anneaux locaux de dimension 1. Maury Guy), Sémin. P. Dubreil, M.-L. Dubreil—Jacotin et Pisot. Fac. Sci. Paris. 1957—1958, 11 année, Vol. 1. Paris, 1958, 4-1—4-15 (франц.)

Излагаются основные результаты работы Норткотта (РЖМат, 1958, 8629). Отдельные теоремы приводятся с доказательствами. В заключении, в виде дополнений, дано более подробное изложение отдельных деталей доказательств, приведенных в статье Норткотта. Здесь, в частности, доказывается следующее утверждение. Пусть $\mathfrak{o}_i$ — кольцо оценки v_i $(i=1, \ldots, n)$ некоторого поля F. Тогда произвольный идеал $\mathfrak{a}$ кольца $\mathfrak{o} = \bigcap_i \mathfrak{o}_i$ представим в виде $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$, где $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}_i \mathfrak{a}$, и, обратно, любые n идеалов $\mathfrak{a}_i$ соответственно колец $\mathfrak{o}_i$ определяют такой идеал $\mathfrak{a}' = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$ кольца $\mathfrak{o}$, что $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o}_i \mathfrak{a}'$. В частности, в кольце $\mathfrak{o}$ имеется ровно n максимальных идеалов, каждый из которых имеет вид $\mathfrak{o} \cap \mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{o}_i$.

Е. Г. Шульгейфер

10064. Алгебраические группы и теория Галуа дифференциальных полей. Колчин, Ланг (Algebraic groups and the Galois theory of differential fields. Kolchin Ellis, Lang Serge), Amer. J. Math., 1958, 80, № 1, 103—110 (англ.)

Алгебраическое множество V (т. е. объединение конечного числа попарно непересекающихся многообразий) называется пространством преобразований группы G, если для каждого $x \in G$ определено преобразование $x: V \to V$, причем для каждого $v \in V$ выполняются условия: $v(xy) = (vx)y$, $ve = v$. Пространство преобразований называется главным однородным, если для любых $v, w \in V$ найдется такое однозначно определенное и рациональное $x \in G$, что $vx = w$.

Доказывается теорема: Пусть F — дифференциальное поле характеристики нуль с алгебраически замкнутым полем констант C и пусть E — сильно нормальное расширение поля F, содержащееся в универсальном расширении F^* с полем констант C^*. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Галуа E над F. Тогда существует алгебраическая группа G, определенная над C, и главное однородное пространство преобразований группы V, определенное над алгебраическим замыканием F_0 поля F в поле E, обладающее следующими свойствами: а) V является моделью поля E над полем F, так что каждая компонента пространства V обладает точкой v, общей над F, для которой $E = F_0(v)$, и все эти компоненты сопряжены друг с другом над F; б) для каждого $\sigma \in \mathfrak{G}$ найдется единственная точка $x_\sigma \in G_{C^*}$ (группы точек G, рациональных над C^*), для которой $\sigma v = v x_\sigma$, и отображение $\sigma \to x_\sigma$ $(\sigma \in \mathfrak{G})$ является групповым изоморфизмом $\mathfrak{G}$ на G_{C^*}; в) этот изоморфизм является рациональным в том смысле, что $C(\sigma) = C(x_\sigma)$ и что σ' тогда и только тогда будет специализацией σ, когда $x_{\sigma'}$ будет специализацией x_σ над C.

А. Х. Лившиц

10065. Некоторые базисные теоремы в частной дифференциальной алгебре. Сейденберг (Some basic theorems in partial differential algebra. Seidenberg A.), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, A 31, № 1, 1—8 (англ.)

Пусть F — произвольное дифференциальное поле с m типами частных дифференцирований $\delta_1, \ldots, \delta_m$, $m \geqslant 0$. Определение II′. Если $m=1$, то элемент u называется алгебраичным над F, если $F\langle u\rangle/F$ конечно; если $m>1$, то элемент u называется алгебраичным над F, если $F\langle u\rangle/F$ конечной степени трансцендентности в каждой из δ_i-теорий, $i=1, \ldots, m$. Доказывается, что определение II′ эквивалентно определению Окугава (РЖМат, 1956, 020) и удовлетворяет следующим трем аксиомам: 1) u_i алгебраично над $F\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, $i=1, 2, \ldots, n$. 2) если u алгебраично над $F\langle v\rangle$, но не над F, то v алгебраично над $F\langle u\rangle$. 3) если v алгебраично над $F\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, и каждое u_i алгебраично над F, то v алгебраично над F. Следовательно, теория трансцендентности Штейница справедлива для частной дифференциальной алгебры произвольной характеристики.

Пусть K, L, Σ — дифференциальные поля с m типами дифференцирований, $m>0$, $K \subseteq L \subseteq \Sigma$. Если Σ/K сепарабельно и L/K чисто трансцендентно (в дифференциальном смысле), то Σ/L сепарабельно.

Доказывается, что теорема о полиномиальных неравенствах справедлива над F тогда и только тогда, когда $\delta_1, \ldots, \delta_m$; $\delta_1^p, \ldots, \delta_m^p$; и т. д. линейно независимы над F. Теорема о примитивном элементе справедлива над F в том и только в том случае, когда над F справедлива теорема о полиномиальных неравенствах $(p \geqslant 0, m \geqslant 1)$.

А. Х. Лившиц

10066. Специализация и теория Пикара — Вессио. Голдман (Specialization and Picard—Vessiot theory. Goldman Lawrence), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 327—356 (англ.)

Пусть F — обыкновенное дифференциальное поле характеристики нуль с алгебраически замкнутым полем констант C. Специализация $(t_1, \ldots, t_r) \to (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r)$ над полем F называется общей, если $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r) \to (t_1, \ldots, t_r)$ также является специализацией над F. Пусть G — дифференциальное расширение поля F и β — трансцендентная над G константа. Через $G((\beta))$ обозначается дифференциальное поле всех формальных степенных рядов относительно β с коэффициентами из G, у которых лишь конечное число членов имеют отрицательные степени. Специализация $(t_1, \ldots, t_r) \to (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r)$ над F называется аналитической, если существует r элементов $\bar{t}_i + \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}\beta^j \in G((\beta))$, $i=1, \ldots, r$, для которых $(t_1, \ldots, t_r) \to \left(\bar{t}_1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_{1j}\beta^j, \ldots, \bar{t}_r + \sum_{j=1}^{\infty} f_{rj}\beta^j\right)$ является общей специализацией над F.

В первой части доказываются теоремы: 1. Пусть $L(t, y) = a_0(t)\, y^{(n)} + \cdots + a_n(t)\, y \in F\{t, y\}$ и $t \to \bar{t}$ — аналитическая специализация над F, для которой

$a_0(t) \neq 0$ и полем констант поля $F\langle \bar{t}\rangle$ является C. Тогда для фундаментальной системы нулей $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ многочлена $L(\bar{t}, y)$ найдется такая фундаментальная система нулей $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ многочлена $L(t, y)$, что $(t, \pi_1, \ldots, \pi_n) \to (\bar{t}, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ будет аналитической специализацией над F. 2) Пусть $L(t, y) = a_0(t) y^{(n)} + \ldots + a_n(t) y \in F\{t, y\}$, $t \to \bar{t} = \bar{t} + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \beta^i$ — общая специализация над F, для которой $a_0(\bar{t}) \neq 0$, $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — такая фундаментальная система нулей многочлена $L(\bar{t}, y)$, что полем констант поля $F\langle \bar{t}, (f_i)_{1<i<\infty}, \omega_1, \ldots, \omega_n\rangle$ является C, и H^C — алгебраическая матричная группа поля $F\langle \bar{t}, (f_i), \omega_1, \ldots, \omega_n\rangle$ над $F\langle \bar{t}, (f_i)\rangle$. Тогда существует фундаментальная система нулей $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ многочлена $L(t, y)$ и алгебраически замкнутое поле констант $E \supseteq C$, для которых: 1) поле констант поля $F\langle t, E\rangle$ совпадает с E и $F\langle t, E, \pi_1, \ldots, \pi_n\rangle$ является расширением Пикара-Вессио поля $F\langle t, E\rangle$, алгебраическая матричная группа которого обозначается G^E;) $(t, \pi_1, \ldots, \pi_n) \to (\bar{t}, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ является аналитической специализацией над F; 3) существует подгруппа K^E группы G^E, для которой специализация 2) индуцирует одновременно специализацию $(b_{ij}) \to (\bar{b}_{ij})$ над F всех элементов (b_{ij}) группы K^E, для которой отображение $(b_{ij}) \to (\bar{b}_{ij})$ является групповым гомоморфизмом K^E на H^C. В остальных трех теоремах первой части даются достаточные условия для существования расширения аналитической специализации $t \to \bar{t}$ над F до специализации $(t, \omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\bar{t}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ над F, где $F\langle t, \omega_1, \ldots, \omega_n\rangle$ является расширением Пикара-Вессио поля $F\langle t\rangle$ при условии, что поле констант поля $F\langle t, \bar{t}\rangle$ совпадает с полем констант C поля F. Пусть, далее, G — алгебраическая матричная группа $n \times n$ и $L(t, y) = Q_0(t_1, \ldots, t_r) y^{(n)} + \ldots + Q_n(t_1, \ldots, t_r) y \in C\{t_1, \ldots, t_r; y\}$, причем $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ является фундаментальной системой нулей $L(t, y)$, для которой поле $C\langle t_1, \ldots, t_r, \pi_1, \ldots, \pi_n\rangle$ является расширением Пикара-Вессио поля $C\langle t_1, \ldots, t_r\rangle$ с группой G. Тогда $L(t, y) = 0$ называется „общим уравнением с группой G“, если: 1) $t_1, \ldots, t_r$ дифференциально алгебраически независимы над C и $C\langle t_1, \ldots, t_r\rangle \supseteq C\langle \pi_1, \ldots, \pi_n\rangle$. 2) Для каждой специализации $(t_1, \ldots, t_r, \pi_1, \ldots, \pi_n) \to (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r, \bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_n)$ над C, для которой поле C служит полем констант поля $C\langle \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r\rangle$, а поле $C\langle \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r, \bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_n\rangle$ является расширением Пикара-Вессио поля $C\langle \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r\rangle$, алгебраическая матричная группа H этого расширения, соответствующая фундаментальной системе нулей $(\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_n)$ многочлена $L(\bar{t}, y)$ оказывается подгруппой группы G. 3) Если $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — фундаментальная система нулей многочлена $L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y \in F\{y\}$, где F — дифференциальное поле с полем констант C и $F\langle \omega_1, \ldots, \omega_n\rangle$ — расширение Пикара-Вессио поля F с алгебраической матричной группой $H \supseteq G$, то существует специализация $(t_1, \ldots, t_r) \to (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r)$ над F, $\bar{t}_i \in F$, для которой $Q_0(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r) \neq 0$ и $a_i = Q_i(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r) Q_0^{-1}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r)$.

Во второй части показывается, как строится „общее уравнение с группой G“ для следующих групп G: 1) полная линейная группа; 2) унимодулярная группа; 3) приводимая группа, состоящая из всех неособенных матриц (a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$, для которых $a_{r+k,m} = 0$ $(k = 1, \ldots, s; m = 1, \ldots, r; r + s = n)$; 4) ортогональная группа; 5) симплектическая группа. А. Х. Лившиц

10067. Абстрактная дифференциальная алгебра и аналитический случай. Зейденберг (Abstracts differential algebra and the analytic case. Seidenberg A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 159—164 (англ.)

Доказывается теорема вложения: Пусть R—поле рациональных чисел, K—его конечное расширение с частными производными, обладающее m типами дифференцирований. Тогда K изоморфно полю F мероморфных функций m комплексных переменных. Из этой теоремы вытекает следующий принцип: если теорема $T(L)$ относительно поля L вытекает из ее справедливости для подполей поля L, являющихся конечным расширением поля рациональных чисел, и если она справедлива в аналитическом случае, то эта теорема справедлива для произвольного поля L.

Указывается ряд результатов, доказанных в аналитическом случае, и справедливых, согласно доказанному принципу, в общем случае. А. Х. Лившиц

10068. Алгебраические группы и дифференциальные уравнения. Колчин (Algebraic groups and differential equations. Kolchin E. R.), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago, s. a., 1—17 (англ.)

Пусть F — обыкновенное дифференциальное поле характеристики нуль с алгебраически замкнутым полем констант C, $a \in F$, $g_2, g_3 \in C$ $(a \neq 0, g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0)$. Элемент α дифференциального расширения поля F называется γ-функцией интеграла элемента a (относительно g_2, g_3), если α содержится в общем решении дифференциального полинома $y'^2 - a^2(4y^3 - g_2 y - g_3)$, т. е. если $\alpha'^2 = a^2(4a^3 - g_2 a - g_3) \neq 0$. Если α — γ-функция элемента поля F, α — трансцендентно над F и поле C является полем констант поля $F\langle \alpha\rangle$, то $F\langle \alpha\rangle$ является нормальным расширением поля F; группа всех автоморфизмов поля $F\langle \alpha\rangle$ над полем F изоморфна алгебраической группе $G\gamma$; подгруппы G_γ, соответствующие промежуточным между F и $F\langle \alpha\rangle$ дифференциальным полям и только они являются алгебраическими подгруппами. Если расширение Пикара — Вессио содержится в расширении при помощи алгебраических функций, интегралов, экспонент интегралов и γ-функций интегралов, то оно является расширением при помощи алгебраических функций, интегралов и экспонент интегралов, т. е. если обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение с коэффициентами из поля F разрешимо при помощи алгебраических функций, интегралов, экспонент интегралов и γ-функций интегралов, то оно разрешимо при помощи алгебраических функций, интегралов и экспонент интегралов. А. Х. Лившиц

10069. О кольцах Ласкера. Крулль (Über Laskersche Ringe. Krull Wolfgang), Rend. Circolo mat. Palermo, 1958, 7, № 2, 155—166 (нем.)

Рассматривается коммутативное кольцо $\mathfrak{R}$, вообще говоря, без единицы. Кольцо $\mathfrak{R}$, каждый идеал которого представим в виде пересечения конечного числа примарных идеалов, называется кольцом Ласкера. Если S — некоторая мультипликативно замкнутая система элементов и $\mathfrak{A}$ — некоторый идеал кольца $\mathfrak{R}$, то множество всех таких элементов $c \in \mathfrak{R}$, что $cs \in \mathfrak{A}$ для некоторого $s \in S$, образует идеал $\mathfrak{A}_S$, называемый изолированной компонентой идеала $\mathfrak{A}$. Кольцо $\mathfrak{R}$ удовлетворяет Q-условию, если каждая изолированная компонента $\mathfrak{A}_S$ произвольного идеала $\mathfrak{A}$ представима в виде $\mathfrak{A}_S = \mathfrak{A}:(s)$, где $s \in \mathfrak{R}$; если каждый раз $s \in S$, то говорят, что кольцо $\mathfrak{R}$ удовлетворяет сильному Q-условию. Основной результат: кольцо $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда является кольцом Ласкера, когда оно удовлетворяет Q-условию и условию минимальности для изолированных компонент (произвольного идеала); в этом случае выполняется также условие максимальности для изолирован-

ых компонент идеалов. Доказывается независимость тих условий. Приводится пример кольца $\mathfrak{R}$, удовлеторяющего условиям максимальности и минимальности ля изолированных компонент идеалов и не удовлетвояющего Q-условию, и доказывается существование колец $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих Q-условию, но не удовлетворяющих условию минимальности для изолированных компонент идеалов. Таким кольцом будет, например, прямая сумма счетного множества нетеровых областей целостности. Попутно доказывается, что прямая сумма колец тогда и только тогда удовлетворяет Q-условию, когда этому условию удовлетворяет каждое прямое слагаемое. Говорят, что идеал $\mathfrak{A}$ кольца $\mathfrak{R}$ представим в виде несократимого пересечения $\mathfrak{A} = \bigcap_\tau \mathfrak{Q}_\tau$ вполне упорядоченного множества примарных идеалов $\mathfrak{Q}_\tau$, если ни один из примарных идеалов $\mathfrak{Q}_\tau$ из этого пересечения нельзя удалить и пересечение любого подмножества примарных идеалов $\mathfrak{Q}_\tau$ не является примарным идеалом. Кольцо $\mathfrak{R}$, в котором каждый идеал представим в виде несократимого пересечения вполне упорядоченного множества примарных идеалов, называется кольцом Ласкера в широком смысле. Каждое кольцо, удовлетворяющее Q-условию, является кольцом Ласкера в широком смысле. В заключение автор ставит несколько вопросов.

Е. Г. Шульгейфер

10070. Некоторые классы идеалов в полиномиальных кольцах. Мак-Кой (Certain classes of ideals in polynomial rings. McCoy N. H.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 3, 352—362 (англ.)

Пусть σ — свойство идеалов (правых идеалов) колец R и $R[x]$. Идеал (правый идеал), обладающий свойством σ, называется σ-идеалом. Говорят, что для свойства σ выполняется „верхняя“ теорема, если из того, что $\mathfrak{A}$ является σ-идеалом кольца R следует, что $\mathfrak{A}[x]$ является σ-идеалом кольца $R[x]$. Говорят, что для свойства σ выполняется „нижняя“ теорема, если из того, что A является σ-идеалом кольца $R[x]$ следует, что $A \cap R$ является σ-идеалом кольца R. Если кольцо R является σ-идеалом, то замыканием относительно σ идеала $\mathfrak{A}$ кольца R называется идеал $\mathfrak{A}_\sigma$, являющийся пересечением всех σ-идеалов кольца R, содержащих $\mathfrak{A}$.

Доказывается теорема: Пусть свойство σ удовлетворяет условиям: а) R является σ-идеалом, б) если A — идеал (правый идеал) и B — σ-идеал кольца $R[x]$, для которых $AR[x] \subseteq B$, то $A \subseteq B$, в) для σ-идеалов выполняются „верхняя“ и „нижняя“ теоремы; тогда для каждого идеала (правого идеала) $\mathfrak{A}$ кольца R $(A[x])_\sigma = \mathfrak{A}_\sigma[x]$.

Правый идеал $\mathfrak{Q}$ кольца R называется полупростым, если из $\mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{Q}$ вытекает, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{Q}$, где $\mathfrak{A}$ — правый идеал кольца R. Правый идеал $\mathfrak{P}$ полупростого кольца R называется простым правым идеалом, если для правых идеалов $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ из $\mathfrak{AB} \subseteq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{B}r = 0$ следует, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$. Доказывается, что „верхняя“ и „нижняя“ теоремы выполняются для простых, полупростых правых и простых правых идеалов. Дается новое доказательство теоремы: Если K — простой радикал (нижний радикал Бэра) кольца R, то простым радикалом кольца $R[x]$ является $K[x]$. Если A — правый идеал кольца $R[x]$, $\mathfrak{Q}$ — полупростой правый идеал кольца R и $\mathfrak{A}$ — правый идеал кольца R, порожденный всеми коэффициентами элементов A, то $(\mathfrak{Q}[x]:A) = (\mathfrak{Q}:\mathfrak{A})[x]$. Если в тех же предположениях $\mathfrak{Q}[x] \subseteq A$ и $\mathfrak{B}$ — правый идеал кольца R, порожденный старшими коэффициентами элементов A, то $(\mathfrak{Q}:\mathfrak{A}) = (\mathfrak{Q}:\mathfrak{B})$. Правый (левый) идеал $\mathfrak{A}$ полупростого кольца R называется аннулирующим правым (левым) идеалом, если найдется такое множество $T \subseteq R$, что $\mathfrak{A}$ состоит из всех элементов $a \in R$, для которых $Ta = 0$ $(aT = 0)$. Идеал, являющийся одновременно правым и левым аннулирующим идеалом, называется аннулирующим идеалом. Доказывается, что если R — полупростое кольцо, то аннулирующими идеалами кольца $R[x]$ являются те и только те идеалы, которые имеют вид $\mathfrak{A}[x]$, где $\mathfrak{A}$ — аннулирующий идеал кольца R. Если R — тело Гильберта (Гильберт Д., Основания геометрии, М. — Л., ОГИЗ, 1948, § 33), то в кольце $R[x]$ существует простой правый идеал, который нельзя получить из простого правого идеала кольца R при помощи „верхнего“ процесса.

А. Х. Лившиц

10071. О характеристике полупростых колец. Кертес, Штейнфельд (A féligegyszerű gyűrűk jellemzéséről. Kertész Andor, Steinfeld Ottó), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1959, 9, № 3, 301—314 (венг.)

Статья обзорного характера. Подкольцо A кольца R называется квазиидеалом, если $RA \cap AR \subseteq A$. Квазиидеал A называется минимальным, если в R не содержится такой квазиидеал A', что $0 \subseteq A' \subseteq A$. Квазиидеалы $A_{11}, \ldots, A_{mm}$ кольца R составляют полную систему, когда существуют такие ортогональные идемпотенты $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, отличные от нуля, что A_{ik} или нуль, или $A_{ik} = \varepsilon_i R \varepsilon_k$ $(1 \leqslant i, k \leqslant m)$ — минимальный квазиидеал, и если $A_{ik}, A_{kj} \neq 0$, то $A_{ki} A_{ik} A_{kj} \neq 0$. Множество правых идеалов кольца R называется независимым, если пересечение любого правого идеала из данного множества с правым идеалом, порожденным остальными правыми идеалами данного множества, равно нулю.

Доказывается эквивалентность следующих свойств ассоциативного кольца R (свойства 2,4 и 8 являются новыми): 1) R — кольцо с левой единицей, разлагающееся в прямую сумму своих минимальных правых идеалов; 2) R — сумма квазиидеалов, образующих полную систему; 3) R — прямая сумма конечного числа полных матричных колец над некоторым телом; 4) R без радикала и разлагается в прямую сумму конечного числа минимальных квазиидеалов; 5) R без радикала и с условием минимальности для правых идеалов; 6) Каждый правый идеал R имеет левую единицу; 7) R — кольцо с левой единицей и каждый правый идеал является прямым слагаемым; 8) R — кольцо с левой единицей и совпадает с прямой суммой произвольной максимальной независимой системы правых идеалов; 9) R — кольцо с левой единицей и правый аннулятор произвольного, отличного от нуля элемента совпадает с пересечением конечного числа максимальных правых идеалов; 10) R — кольцо с левой единицей, содержит конечное число максимальных правых идеалов, пересечение которых совпадает с нулем.

А. А. Бовди

10072. О кольцах, полупростых в смысле Кёте. Ван Сян-хао (Wang Shiang-haw), Дунбэй жэньминь дасюэ цзыжань кэсюэ Acta scient. natur., сюэбао, 1955, № 1, 143—147 (кит.; рез. англ.)

Дано подпрямое разложение кольца с нулевым радикалом Кёте, и в коммутативном случае доказано, что кольцо не содержит нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда оно является подпрямой суммой колец, «подпрямо неразложимых относительно радикала Кёте». Строение этих последних колец исследовано и показано, что они сходны с нормированными кольцами в теории нормирования.

Резюме автора

10073. Строение колец с условием максимальности. Голди (The structure of rings with maximum condition. Goldie A. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 17 (англ.)

Пусть R — первичное кольцо с условием максимальности на правые и левые аннуляторные идеалы и на правые и левые дополнительные идеалы. Тогда R имеет кольцо частных, правое и левое одновременно, которое является полным матричным кольцом $M_n(D)$, где

D — тело. Верно и обратное. Таким образом первичные кольца с условиями максимальности полностью охарактеризованы. Методы достаточно полно используют информацию о строении первичного кольца. Многое из этой теории верно для колец с условием максимальности только на правые идеалы; это дает легкое доказательство теоремы Левицкого о том, что правые ниль-идеалы нильпотентны.

10074. Бесконечные кольца с конечными факторизациями. Хаммер (Inele infinite cu factorizări finite. Hammer L.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 3, 233—235 (рум.; рез. русск., франц.)

Бесконечное FF-кольцо (т. е. кольцо, обладающее свойством, что его фактор-кольцо по любому ненулевому идеалу конечно) с единичным элементом, обладающее свойством, что пересечение всех его двусторонних максимальных идеалов есть нулевой идеал, представляет собою область целостности и любой идеал разлагается единственным образом в произведение примарных равномерных идеалов. Для FF-колец с единичным элементом и с бесконечным числом двусторонних максимальных идеалов это свойство справедливо. Резюме автора

10075. О голоморфах кольца. Леувен (On the holomorphs of a ring. Leeuwen L. C. A. van), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 2, 162—169; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 162—169 (англ.)

Рассматриваются классы ассоциативных колец, обладающих единственным голоморфом в смысле Редеи. Пусть S — ассоциативное кольцо с элементами $0, \alpha, \beta, \ldots$ и a — произвольное двойное отображение кольца S в себя: $\alpha \to a\alpha$, $\alpha \to \alpha a$ ($\alpha \in S$). Сумма $a+b$ и произведение ab определяются следующим образом: $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ и $(ab)\alpha = a(b\alpha)$, $\alpha(ab) = (\alpha a)b$. Двойное отображение кольца S в себя называется двойной гомотетией S, если: $a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta$, $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$, $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$, $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$, $(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta)$, $(a\alpha)a = a(\alpha a)$. Кольцо D, состоящее из двойных гомотетий кольца S со свойством $(a\alpha)b = a(\alpha b)$ для всех $a, b \in D$; $\alpha, \beta \in S$ называется кольцом родственных двойных гомотетий кольца S. Редеи (РЖМат, 1957, 6890) показал, что всякое кольцо родственных двойных гомотетий кольца S содержится по меньшей мере в одном таком максимальном кольце D^*. Для каждого такого кольца D^* в множестве всех пар (a, α) ($a \in D^*$, $\alpha \in S$) определяется сложение и умножение: $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta)$, $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$; получается расщепляющееся расширение кольца S при помощи D^*, которое называется расщепляющимся расширением S, принадлежащим D^*, и обозначается через $D^* \circ S$. Расщепляющиеся расширения S, $D^* \circ S$, принадлежащие максимальным кольцам D^* родственных двойных гомотетий S, называются голоморфами S. Кольцо (в противоположность группе) может иметь, вообще говоря, более одного голоморфа. Доказываются предложения: 1) Если каждый элемент кольца S может быть выражен в виде произведения конечного числа n ($n \geqslant 2$) элементов, то S имеет единственный голоморф. 2) Всякое идемпотентное кольцо S ($S^2 = S$) обладает единственным голоморфом. 3) Кольцо без делителей нуля имеет единственный голоморф. 4) Для того чтобы голоморфы кольца S были коммутативны, необходимо и достаточно, чтобы каждая двойная гомотетия кольца S состояла из таких двух отображений, у которых образы одинаковы. 5) Голоморфы кольца S будут коммутативны тогда и только тогда, когда $S \supseteq C(T)$, где $C(T)$ — центр произвольного расширения T кольца S. В. А. Андрунакиевич

10076. Расширения идеалов в ассоциативных алгебрах. Смитис (Extensions of ideals in associative algebras. Smithies F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, 55, № 4, 277—281 (англ.)

Пусть A — ассоциативная алгебра без единицы, A_e — алгебра, полученная из A присоединением единицы. Если I — правый идеал из A, u — левый единичный элемент по идеалу I, то правый идеал $I_e = \{y;\ y \in A_e,\ uy \in I\}$ называется расширением идеала I. На примере показывается, что теорема о взаимно однозначном соответствии между идеалами I и I_e (РЖМат, 1957, 7189) неверна: для различных левых единичных элементов по идеалу I могут существовать различные расширения. Доказывается, что соответствие между идеалами I и I_e взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $u - z \in I$, где u и z — произвольные левые единичные элементы по идеалу I. Для коммутативной алгебры это всегда верно. Доказывается ряд теорем о максимальных и двусторонних регулярных идеалах. Работа хорошо иллюстрирована примерами. В. П. Елизаров

10077. Заметка о двух вопросах Кертеса. Левитт (Note on two problems of A. Kertész. Leavitt W. G. Publs math., 1959, **6**, № 1-2, pp. 83—85) (англ.)

Пусть R — ассоциативное кольцо. R-модуль G называется совершенным, если $RG = G$. Порядком элемента $g \in G$ называется левосторонний идеал L в R, составленный из всех таких $\alpha \in R$, что $\alpha g = 0$. Приводится пример несовершенного R-модуля G, причем соответственным образом подобранный левосторонний идеал L в R является порядком любого ненулевого элемента $g \in G$. Отсюда вытекает отрицательный ответ на вопрос, поставленный Кертесом (РЖМат, 1957, 143). Кроме того, доказывается следующая теорема: Максимальный левосторонний идеал L любого ассоциативного кольца R является модулярным (т. е. существует такое $e \in R$, что $xe - x \in L$ при всех $x \in R$) тогда и только тогда, когда существует такое $e \in R$, что $L'e \subseteq L'$, где L' есть теоретико-множественное дополнение идеала L в R. Примеры показывают, что условие $(L')^2 \not\subseteq L'$ не является для этого достаточным, а условие $(L')^2 \subseteq L'$ не является необходимым ($(L')^2 = \{xy;\ x, y \in L'\}$). А. Ф. Сулиньский

10078. О свободном произведении ассоциативных колец. Кон (On the free product of associative rings. Cohn P. M.), Math., Z., 1959, **71**, № 4, 380—398 (англ.)

Пусть Λ — произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Ассоциативное кольцо R называется Λ-кольцом, если оно является таким унитарным двусторонним Λ-модулем, что $\lambda(xy) = (\lambda x)y$, $(x\lambda)y = x(\lambda y)$, $(xy)\lambda = x(y\lambda)$ для любых элементов $x, y \in R$, $\lambda \in \Lambda$. На протяжении почти всей работы дополнительно предполагается, что каждое Λ-кольцо R обладает единицей e и $\lambda e = e\lambda$ для любых $\lambda \in \Lambda$. В этом случае кольцо Λ можно рассматривать как подкольцо кольца R, содержащее единицу кольца R. Левый Λ-модуль V называется плоским, если $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(X, V) = 0$ для каждого правого Λ-модуля X. Подмодуль U' правого Λ-модуля U называется чистым, если для каждого левого Λ-модуля V имеет место точная последовательность $0 \to U' \otimes V \to U \otimes V$. Подмодуль U' правого Λ-модуля U тогда и только тогда является чистым подмодулем, когда для любых конечных множеств элементов $u_i \in U$, $a_j \in U'$ и $\lambda_{ij} \in \Lambda$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) из соотношений $a_j = \sum u_i \lambda_{ij}$ следует существование таких элементов $u_i' \in U'$, что $a_j = \sum u_i' \lambda_{ij}$. Отмечается, что в случае, когда кольцо Λ является областью целостности главных идеалов, понятие чистого подмодуля совпадает с аналогичным понятием, введенным Капланским (РЖМат, 1958, 154). Λ-кольцо R называется свободным произведением своих Λ-подколец R_i ($i \in I$), если: 1) $R_i R_j = \Lambda$ при $i \neq j$; 2) кольцо R совпадает с объединением всех подколец R_i; 3) система определяющих соотношений кольца R совпадает с объединением систем определяющих соотношений всех подколец R_i. Указываются некоторые достаточные и некоторые необходи-

мые условия для существования для данного семейства Λ-колец R_i их свободного произведения. Среди других доказываются следующие утверждения: 1) Для семейства Λ-колец R_i $(i\in I)$ тогда и только тогда существует их свободное произведение, когда определено свободное произведение Λ-колец R_i $(i\in I_0)$ для любого конечного подмножества I_0 множества I. Это утверждение является аналогом одной из теорем Дидидзе (РЖМат, 1959, 171). 2) Для существования свободного произведения R некоторого семейства Λ-колец R_i $(i\in I)$ достаточно, чтобы каждый левый (или каждый правый) Λ-модуль R_i/Λ был Λ-плоским. В этом случае левый (правый) Λ-модуль R/Λ также является Λ-плоским. В частности, если кольцо Λ регулярно, то свободное произведение существует для любого семейства Λ-колец. 3) Для Λ-кольца R только тогда существует свободное произведение кольца R с любым другим Λ-кольцом S, когда кольцо Λ является чистым (левым и правым) подмодулем Λ-кольца R. Отсюда вытекает, что если для любого семейства Λ-колец существует свободное произведение, то кольцо Λ является чистым (левым и правым) подмодулем каждого Λ-кольца. 4) Алгебра Λ с единицей над некоторым полем F тогда и только тогда является чистым левым Λ-подмодулем в каждом Λ-кольце, когда для любых элементов $\lambda_{ij}, \alpha_i\in\Lambda$ $(i=1,\ldots,m;$ $j=1,\ldots,n)$ из соотношения $\sum\xi_i\alpha_i=0$ $(\xi_i\in\Lambda)$, выполняемого всякий раз, когда выполняются соотношения $\sum\xi_i\lambda_{ij}=0$, следует существование таких элементов $\beta_j\in\Lambda$, что $\alpha_i=\sum\lambda_{ij}\beta_j$. Отмечается, что это условие не выполняется, например, для алгебры многочленов $F[x]$ от одного неизвестного x над полем F. Доказательство указанной теоремы опирается на следующее общее предложение. Для данных элементов λ_{ij}, α_i $(i=1,\ldots,m;$ $j=1,\ldots,n)$ алгебры Λ с единицей над полем F тогда и только тогда существует такое Λ-кольцо R с элементами t_j, что $\alpha_i=\sum\lambda_{ij}t_j$, когда из соотношений $\sum\xi_i\lambda_{ij}=0$, где $\xi_i\in\Lambda$, всегда следует соотношение $\sum\xi_i\alpha_i=0$. В заключение рассматривается случай, когда ассоциативные Λ-кольца R_i не имеют общей единицы, а некоторые из них быть может вообще без единиц, но каждое из колец R_i содержит Λ как подкольцо. В этом случае к кольцу Λ и к кольцам R_i присоединяется общая единица (образуются кольцо Λ^1 и Λ^1-кольца R_i^1), и свободное произведение ассоциативных колец R_i $(i\in I)$ с общим подкольцом Λ существует тогда и только тогда, когда существует свободное произведение Λ^1-колец R_i^1.

Е. Г. Шульгейфер

10079. Теорема Фридрикса. Цассенхаус (A theorem of Friedrichs. Zassenhaus Hans), Trans. Roy. Soc. Canada, 1957, Sec. 3, 51, June, 55—64 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\mathfrak{o}, I)$ — свободное ассоциативное кольцо с множеством $I=\{x_\alpha\}$ свободных образующих над ассоциативным и коммутативным кольцом $\mathfrak{o}$ с единицей, L^* — множество $\{f(x_1,\ldots,x_k)\}$ элементов $\mathfrak{A}$, удовлетворяющих следующему свойству (π): из условия $x_ix_j'=x_j'x_i$, $1\leqslant i,\ j\leqslant k$, следует равенство $f(x_1+x_1',\ldots,x_k+x_k')=f(x_1,\ldots,x_k)+f(x_1',\ldots,x_k')$. Пусть, далее $1\leqslant n<\infty$ — целое число, $\mathfrak{o}_n$ — подкольцо кольца $\mathfrak{o}$, состоящее из всех элементов, аннулируемых n, $L(\mathfrak{o}, I)$ — $\mathfrak{o}$-кольцо Ли, порожденное в $\mathfrak{A}$ множеством I относительно сложения и умножения $x\circ y=xy-yx$, $L(\mathfrak{o}, I)^n$ — $\mathfrak{o}$-подмодуль $\mathfrak{A}$, порожденный n-ми степенями элементов $L(\mathfrak{o}, I)$ и $L(\mathfrak{o}, I)_n=\sum_{i=1}^{\infty}\mathfrak{o}_nL(\mathfrak{o}, I)^{ni}$. Теорема 1. $\mathfrak{o}$-модуль L^* есть прямая сумма $\mathfrak{o}$-модулей $L(\mathfrak{o}, I)$ и $L(\mathfrak{o}, I)_p$ по всем простым p. Если $\mathfrak{o}$ — поле характеристики $p\geqslant 0$, то теорема 1 превращается в известный критерий Фридрикса (РЖМат, 1954, 248), а в случае, когда $\mathfrak{o}$ — кольцо характеристики $p>0$, получаем теорему 2: (а) $L^{*p}\subseteq L^*$, (б) $L^*\circ L^*\subseteq L(\mathfrak{o}, I)$, (в) $(X+Y)^p-X^p-Y^p$ содержится в $L(\mathfrak{o}, I)$ для всех $X, Y\subseteq L^*$. Пусть теперь $\mathfrak{o}$ — поле характеристики нуль. Вложим алгебру $\mathfrak{A}$ в кольцо формальных степенных рядов следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — алгебра выражений $\lambda+Y$, где $\lambda\in\mathfrak{o}$, $Y\in\mathfrak{A}$. Сложение в $\mathfrak{A}_1$ определяется сложением в $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{A}$ по коммутативности, умножение по дистрибутивности. Определим норму в $\mathfrak{A}_1$: $\|0\|=0$, $\|X\|=1/2^{d(X)}$, $X\in\mathfrak{A}_1$, где $d(X)$ — минимальная степень одночленов, входящих в X $(d(\lambda)=0$, $\lambda\in\mathfrak{o})$. Пополнение $\mathfrak{A}_1$ по этой норме есть алгебра $\mathfrak{P}$ формальных степенных рядов от множества I. Ряд $f(x_1, x_2, \ldots)$ обладает свойством (π), если из условия $x_ix_j'=x_j'x_i$, $1\leqslant i,\ j<\infty$, следует равенство $f(x_1+x_1', x_2+x_2', \ldots,)=f(x_1, x_2, \ldots,)+f(x_1', x_2', \ldots)$.

Теорема 3. Множество $\overline{L}^*$ всех элементов $\mathfrak{P}$, обладающих свойствами (π) есть пополнение множества L^*. Прямым следствием этой теоремы является формула Бакер — Кэмбэлла — Хаусдорфа.

Теорема 4. Все элементы вида $\exp(X)$, $X\in\overline{L}^*$ образуют мультипликативную группу $\exp(\overline{L}^*)$, которая является пополнением мультипликативной группы $\mathfrak{G}$, порожденной элементами $\exp(\lambda x)$, $\lambda\in\mathfrak{o}$, $x\in I$.

Кроме этого, в работе доказываются две теоремы, обобщающие теорему 1 и теорему 2.

Л. А. Бокуть

10080. О кольцах с идеализаторным условием. Фрейдман П. А., Уч. зап. Уральского ун-та, 1959, вып. 23, № 1, 35—48

Изучаются кольца с идеализаторным условием, т. е. кольца, в которых всякое истинное подкольцо отлично от своего идеализатора, (Идеализатором подкольца Q в кольце K называется наибольшее подкольцо из K, в котором Q является двусторонним идеалом). Кольца с идеализаторным условием, или, короче, U-кольца, являются в некотором смысле теоретико-кольцевым аналогом групп с нормализаторным условием. Основные результаты:

1) Кольцо K тогда и только тогда является U-кольцом, порожденным одним элементом, когда K есть прямая сумма $K=P+K_1$, где $P=C/(m)$ (C — кольцо целых чисел, $m\neq 0$), а K_1 — кольцо, порожденное одним элементом b таким, что для некоторого целого γ, $b^{s+1}-\gamma b^s=0$, причем m делит некоторую степень γ^t числа γ.

2) Кольцо K тогда и только тогда является U-кольцом с условием минимальности для двусторонних идеалов, когда K есть прямая сумма $K=P+R$, где $P=C/(m)$ $(m\neq 0)$, а R — нильпотентное кольцо с условием минимальности для двусторонних идеалов.

3) Кольцо K тогда и только тогда является U-кольцом без нильпотентных элементов, отличных от нуля, когда K изоморфно либо дискретной прямой сумме полей $C/(p_i)$ (p_i — различные простые числа), либо кольцу, порожденному целым числом $\gamma\neq 0$, либо прямой сумме $P+K_1$, где $P=C/(m)$ $(m\neq 0,\ \pm 1$ и свободно от квадратов простых чисел), а K_1 — кольцо, порожденное целым числом $\gamma\neq 0$, причем m делит γ.

Из последней теоремы вытекает, что в U-кольце без нильпотентных элементов, отличных от нуля, всякое подкольцо является двусторонним идеалом.

П. Г. Конторович

10081. Замечание о фробениусовом расширении и кольце эндоморфизмов. Накаяма, Цудзуку (A remark on Frobenius extensions and endomorphism rings. Nakayama Tadasi, Tsuzuki Tosiro), Nagoya Math. J., 1959, **15**, 9—16 (англ.)

Каш (РЖМат, 1956, 1133, 1958, 4536) рассматривал фробениусово расширение как обобщение фробениусовой алгебры и установил связь между свойствами фробениусова расширения и кольца эндоморфизмов. При этом предполагалось, что основное кольцо A удовлетворяет условиям минимальности для левых и правых идеалов и что левый аннулятор в A истинного правого идеала не обращается в нуль (и аналогичное для правого аннулятора левого идеала). Авторы освобождаются от этих ограничений, распространяя результат Каша на случай, когда кольцо $\mathfrak{S}$ фробениусова расширения подкольца A имеет конечный независимый базис над A. П. Г. Конторович

10082. Связные идеалы в упорядоченных групповых алгебрах и единственность меры Хара. Аубер (Convex ideals in ordered group algebras and the uniqueness of the Haar measure. Aubert K. E.), Math. scand., 1958, **6**, № 2, 181—188 (англ.)

Пусть L^1_R — алгебра всех действительных интегрируемых по мере Хара функций на локально бикомпактной абелевой группе G с операцией свертки функций в качестве умножения и естественным соотношением частичной упорядоченности: $f \geqslant g$, если $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in G$. Идеал $I \subset L^1_R$ называется связным, если из условий $f, g \in I$ и $f \leqslant h \leqslant g$ вытекает, что $h \in I$, абсолютно связным, если $|f| \in I$, когда $f \in I$, и регулярным, если фактор-алгебра L_{1_R}/I содержит единицу. Под замыканием идеала понимается его замыкание с помощью нормы в пространстве L^1_R. Доказываются следующие предложения:

Теорема 1. Алгебра L^1_R содержит единственный максимальный связный и регулярный идеал $\mathfrak{M}^0_R$, состоящий из всех функций $f \in L^1_R$, для которых $\int f(g)\,dg = 0$, и не содержит собственных абсолютно связных идеалов, которые были бы замкнуты или регулярны.

Следствие. Если μ — сохраняющий порядок гомоморфизм алгебры L^1_1 в упорядоченное поле F, то F изоморфно полю действительных чисел, а μ совпадает с мерой Хара на G.

Теорема 2. Пересечение непустого множества максимальных регулярных идеалов алгебры L^1_R является связным идеалом тогда и только тогда, когда оно содержится в идеале $\mathfrak{M}^0_R$.

Теорема 3. Групповая алгебра L^1_R локально бикомпактной абелевой группы $G \neq 1$ как частично упорядоченное кольцо не допускает погружения в прямое произведение упорядоченных колец.

С. Д. Берман

10083. Новая матричная алгебра. Бьерхаммар (En ny matrisalgebra. Bjerhammar Arne), Svensk Lantmäteritidskr., 1955, **47**, № 5-6, 312—388 (швед.; рез. англ.)

Алгебры, в которых каждый элемент обладает как противоположным так и обратным элементом (полные алгебры), были известны до сих пор только для скалярных элементов. В этой статье определяется полная матричная алгебра. Эта алгебра исследуется новыми методами и даются некоторые приложения, касающиеся теории ошибок. Эта новая алгебра содержит, например, как частный случай матричную алгебру Кэли и ранние наброски автора. Из резюме автора

10084. Алгебры комплексов. Зыков А. А. Матем. сб., 1957, **41**, № 2, 159—176

Комплекс допускает «геометрическую реализацию» в виде графа, вершинам и направленным ребрам которого приписаны элементы из произвольной полугруппы $\mathfrak{M}$. Наложением комплекса A на комплекс B называется построение нового комплекса путем отождествления некоторых вершин и ребер с условиями: 1) вершины, связанные ребром, не отождествляются; 2) при отождествлении какой-либо пары вершин отождествляются и их ребра; 3) элементы полугруппы, приписанные ребрам и вершинам, перемножаются. Тогда алгебра комплексов $\mathfrak{A}$ получается как модуль над произвольным кольцом $\mathfrak{R}$ с операцией наложения в качестве произведения. Множество комплексов A, у которых число вершин $\nu(A) \geqslant n$, образует двусторонний идеал в этой алгебре. Таким образом можно говорить об алгебре комплексов по mod n и естественной градуировке. Оказывается, что в качестве системы образующих достаточно брать связные комплексы. В качестве приложения строятся алгебры симметрических функций и двумерных симметрических функций. Утверждение о базисе связных комплексов дает практически простой алгоритм выражения симметрических функций через степенные суммы. Автор указывает обобщение на случай симметрических функций от бесконечной системы аргументов. Имеются опечатки. Р. Е. Кричевский

10085. Неокольца. Берман, Силверман (Near-rings. Berman Gerald, Silverman Robert J.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 1, 23—34 (англ.)

Дается определение неокольца, разбираются его элементарные свойства, проводится сравнение их со свойствами кольца. В качестве примера разбирается неокольцо всех преобразований произвольной группы G и способы его построения. Далее рассматриваются специальные классы неколец (неокольца, обладающие некоторыми свойствами типа перестановочности всех элементов с нулем, выполнения тождества $ab = b$ для всех a, b и т. д.) и выявляются соотношения между ними, а также выводятся некоторые простые предложения относительно их самих и их идеалов. Затем распространяется на неокольца теорема о разложении в прямую сумму двух специальных колец кольца с идемпотентом. В статье приведено много примеров идеалов, псевдоидеалов, инвариантов, а также доказывается теорема о гомоморфизмах. В конце указаны некоторые проблемы. Г. М. Цукерман

10086. Дистрибутивно порожденные почти кольца (II. Теория представлений). Фрёлих (Distributively generated near-rings. II. Representation theory. Fröhlich A.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 29, 95—108 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1958, 7547. Изучаются представления дистрибутивно порожденных почти колец отображениями групп. Пусть R — произвольное почти кольцо; R-группа Ω определяется группой Ω' (записанной аддитивно) и отображением $(x, \omega) \to x\omega$ множества $R \times \Omega$ в Ω'. Предполагается выполнение следующих аксиом: $(x+y)\omega = x\omega + y\omega$, $(xy)\omega = x(y\omega)$. Пусть S — мультипликативная полугруппа. S—группа Ω задается группой Ω' и отображением $(s, \omega) \to s\omega$ множества $S \times \Omega'$ в Ω' и таким семейством D подгрупп из Ω', что: для всех $s, t \in S$, $\omega \in \Omega'$, $(st)\omega = s(t\omega)$; для всех $\omega \in \Omega'$, $s \in S$ существует такая подгруппа $\Delta \in D$, что $s\omega \in \Delta$; для всех $\Delta \in D$, $\omega_1, \omega_2 \in \Delta$, $s \in S$ имеем: $s(\omega_1 + \omega_2) = s\omega_1 + s\omega_2$, т. е. элементы из S индуцируют локальный эндоморфизм на Ω'. Пусть Ω есть R-группа. Если Δ_1, Δ_2 — подмножества из Ω, то $l(\Delta_1, \Delta_2)$ означает множество таких элементов $x \in R$, что $x\Delta_1 \subset \Delta_2$; $l(\Delta, 0)$ обозначается через $l(\Delta)$. Если Δ — мно

жество в Ω, $\mathfrak{A}$ — множество в R, то $\mathfrak{A}\setminus\Delta$ означает множество элементов $\omega\in\Omega$ с условием $\mathfrak{A}\omega\subseteq\Delta$. Пусть теперь R — дистрибутивно порожденное почти кольцо и S — дистрибутивная полугруппа в R, порождающая R^+. Тогда каждая R-группа является также S-группой. Если Ω — собственная S-группа, то будем говорить, что Ω есть собственная R-группа.

Доказываются утверждения: 1) $R\omega$ порождается элементами из $S\omega$. Если Ω — собственная R-группа, то $s\Omega$ есть группа для всех $s\in S$. Пусть $\omega\in\Omega$. Если $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}\omega\subseteq\mathfrak{B}\omega$. Если $\mathfrak{A}$ — подгруппа в R^+, то $\mathfrak{A}\omega$ — подгруппа в Ω. Если $\mathfrak{A}$ — левый R-модуль в R, то $\mathfrak{A}\omega$ — подгруппа в Ω. Если $\mathfrak{A}$ — левый R-модуль в R, то $\mathfrak{A}\omega$ будет левым R-модулем в Ω. 3) Подгруппа Δ из Ω будет левым R-модулем в Ω тогда и только тогда, когда она является левым S-модулем. 4) Пусть Ω — собственная R-группа и $s\in S$. Если Δ — подгруппа из Ω, то и $s\setminus\Delta$ будет подгруппой. $R\setminus\Delta$ является левым R-модулем в Ω.

Пусть Ω, Δ — R-группы. R-отображением f R-группы Ω в Δ называется такое отображение группы Ω в Δ, что $fx\omega=xf\omega$ для всех $\omega\in\Omega$ и всех $x\in R$. Доказываются теоремы 1) Для каждого $\omega\in\Omega$ существует R-гомоморфизм Φ_ω группы R^+ в Ω, определяемый равенством $\Phi_\omega x=x\omega$, $x\in R$. Если R имеет единицу e, то каждый R-гомоморфизм Φ группы R^+ в Ω имеет вид Φ_ω, где $\omega=\Phi e$ и $\omega\in e\Omega$. 2) Пусть $\Omega=R_\omega$ — произвольная R-группа. Если $x\in R$, $l(\omega)x\subseteq l(\omega)$, то существует R-эндоморфизм ψ_x группы Ω, определяемый равенством $\psi_x y\omega=yx\omega$ для всех $y\in R$. Всякий R-эндоморфизм имеет такой вид, и $\psi_{x_1}=\psi_{x_2}$ в том и только в том случае, если $x_1\equiv x_2(\mathrm{mod}\, l(\omega))$. 3) R-эндоморфизмы R-группы $\Omega=R\omega$ образуют левое почти кольцо $\Phi(\Omega)$, где сложение определяется равенством $(\psi_1+\psi_2)\omega=\psi_1\omega+\psi_2\omega$, а умножение равенством $(\psi_1\psi_2)\omega=\psi_1(\psi_2\omega)$.

В. А. Андрунакиевич

10087. О конечных дистрибутивных квазителах. Родригес (Sui quasicorpi distributivi finiti. Rodriguez Gaetano), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, **26**, № 4, 458—465 (итал.)

Как указывает автор, проблема классификации конечных квазителей порядка $q=p^t$ (p — простое, t — натуральное) сводится к проблеме нахождения всех возможных систем из $q-1$ квадратных матриц с коэффициентами из поля γ_p вычетов $\mathrm{mod}\, p$, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} x_1 & f_{12} & \dots & f_{1t} \\ x_2 & f_{22} & \dots & f_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_t & f_{t2} & \dots & f_{tt} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Здесь x_i пробегают всевозможные значения из γ_p за исключением $x_1=x_2=\dots=x_t=0$; f_{ij} — функции от $x_1, x_2, \dots, x_t$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $f_{ij}(1,0,\dots,0)=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq j,\\ 1, & \text{если } i=j,\end{cases}$

б) $$\begin{vmatrix} x_1 & f_{12} & \dots & f_{1t} \\ x_2 & f_{22} & & f_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_t & f_{t2} & \dots & f_{tt} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

в) $$\begin{vmatrix} x_1'-x_1'' & f_{12}'-f_{12}'' & \dots & f_{1t}'-f_{1t}'' \\ x_2'-x_2'' & f_{22}'-f_{22}'' & \dots & f_{2t}'-f_{2t}'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_t'-x_t'' & f_{t2}'-f_{t2}'' & \dots & f_{tt}'-f_{tt}'' \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где $x_1', x_2', \dots, x_t'$ и $x_1'', x_2'', \dots, x_t''$ — две различные системы значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_t$; f_{ij}' и f_{ij}'' — соответствующие значения функций f_{ij}.

Доказана следующая теорема: Пусть $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p_i)}$ ($i=1, \dots, t$; $p_i\leqslant p$) — различные значения из поля γ_p переменного x_i. Тогда существует полином (и при этом только один) степени $\leqslant p_i-1$ относительно x_i ($i=1, \dots, t$), принимающий заданное значение $f(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, \dots, x_t^{(k)})$ в любой точке $x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, \dots, x_t^{(k)}$ ($i=1,2,\dots,p_1$; $j=1,2,\dots,p_2$; $k=1,2,\dots,p_t$) аффинного пространства t измерений $S_{t,p}^*$ над полем γ_p.

Доказательство проводится помощью интерполяционной формулы Лагранжа. В дальнейшем уточняется вид матрицы (1) в случае, когда квазитело является дистрибутивным. В заключение доказывается, что не существует собственного дистрибутивного квазитела порядка p^2.

В. К. Туркин

10088. Обобщение понятия атомности для булевых алгебр. Пирс (A generalization of atomic Boolean algebras. Pierce R. S.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 1, 175—182 (англ.)

Множество K элементов булевой алгебры A назовем плотным, если для любого элемента $a\in A$ существует элемент $a_0\in K$, для которого $0\neq a_0\leqslant a$. Пусть α — кардинальное число. Частично упорядоченное множество P назовем α-компактом, если P замкнуто относительно пересечений, содержит нуль, и любое подмножество, имеющее мощность $\leqslant\alpha$, имеет ненулевую нижнюю грань при условии, что любое конечное подмножество из P обладает этим свойством. Назовем булеву алгебру α-атомной, если она содержит плотное подмножество, являющееся α-компактом. Булева алгебра атомна тогда и только тогда, когда она α-атомна для любого α. Под α-гомоморфизмом будем понимать гомоморфизм, сохраняющий операции для множеств элементов, мощности $\leqslant\alpha$. Булева алгебра называется α-представимой, если она является α-гомоморфным образом некоторого α-тела множеств (РЖМат, 1958, 3583). Доказывается, что каждая α-представимая булева алгебра является α-гомоморфным образом некоторого α-атомного α-тела множеств. Как и в (РЖМат, 1958, 3582) определяется α-полнота, α-дистрибутивность и α-подалгебра. Любая $(\alpha+1)$-полная α-атомная булева алгебра является $(\alpha+1)$-представимой. Пусть $\bar{B}$ есть α-дистрибутивная 2^α-полная булева алгебра и B — ее 2^α-полная α-подалгебра. Тогда B есть 2^α-подалгебра алгебры $\bar{B}$. Если B является α-атомной булевой алгеброй, то она изоморфна плотной подалгебре пополнения сечениями для некоторого α-атомного α-тела множеств.

В. В. Пашенков

10089. Простые дуальные идеалы в булевых алгебрах. Хейдер (Prime dual ideals in Boolean algebras. Heider L. J.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 3, 397—408 (англ.)

Если Y — топологическое пространство (все рассматриваемые пространства вполне регулярны), то через $C(Y)$ обозначим совокупность действительных функций, непрерывных на Y, а через βY — чеховское расширение пространства Y. Скажем, что Y — P-пространство, если в $C(Y)$ уравнение $fgf=f$ всегда разрешимо относительно g (ср. РЖМат, 1956, 3929). Под P'-пространством понимается пространство Y, обладающее следующим свойством: если $f\in C(Y)$, $f(p_0)=0$, но не существует

такой окрестности U точки p_0, что $f(p)=0$ для всех $p\in U$, то существует такая окрестность V точки p_0, что для всех $p\in V\setminus p_0$ $f(p)\neq 0$ и имеет один и тот же знак. Если для каждой $f\in C(Y)$ найдется такой делитель единицы u в $C(Y)$, что $f=u|f|$, то Y называется U-пространством. Если B — булева алгебра, то через $X(B)$ обозначим множество простых дуальных идеалов алгебры B. Обозначим через D множество таких $I\in X(B)$, что всякое конечное или счетное множество элементов из I имеет пересечение, отличное от нуля. Скажем, что B — P-булева алгебра, если: 1) D плотно в $X(B)$; 2) если множество (a_α) элементов из B таково, что для каждого $I\in D$ имеет место или $a_\alpha\in I$ при некотором α или $a_\alpha a=0$ для всех α и некоторого $a\in I$, то $\bigvee a_\alpha$ существует. Булеву алгебру B назовем UF-булевой алгеброи, если из a, a_n, $b_n\in B$, $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots$, $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots$, $a_n\wedge b_n=0$, $a\geqslant a_n$, $b\geqslant b_n$ для всех n вытекает, что $a\wedge b=0$. Доказывается, что класс P-булевых алгебр совпадает с классом всех алгебр открыто-замкнутых подмножеств P-пространств. Два P-пространства Y и Z соответствуют одной и той же P-булевой алгебре тогда, когда $\beta Y=\beta Z$. Точно таким же образом связаны U-пространства и UF-булевы алгебры. Сходные, хотя и менее красиво формулируемые результаты, получены и для P'-пространств. Показано также, что для любого P'-пространства Y пространство βY гомеоморфно $X(B)$, где B — P-булева алгебра открыто-замкнутых подпространств пространства Y.

Л. А. Скорняков

10090. Замечания об элементарных симметрических функциях. Эллис (Remarks on the elementary symmetric functions. Ellis David), Math. Mag., 1958, 32, № 2, 75—78 (англ.)

Пусть L — дистрибутивная структура. Обозначим через $S_{k,n}(x_1,\ldots,x_n)$, где $x_i\in L$, сумму всевозможных произведений вида $x_{i_1},\ldots x_{i_k}$, где i_s все различны. Если $A\subseteq L$, то положим $A^S=\bigcup F^S$, где F пробегает все конечные подмножества множества A, а $\{x_1,\ldots,x_k\}^S=\{S_{1,k}(x_1,\ldots,x_k),\ldots,S_{k,k}(x_1,\ldots,x_k)\}$. Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно, для того, чтобы A было цепью: 1) $A=A^S$; 2) $\{x,y\}^S=\{x,y\}$ для любых $x,y\in A$.

Л. А. Скорняков

10091. Цепи и разложения полупервичных идеалов. Шатле (Chaînes et décompositions d'idéaux semi-premiers. Châtelet A.), Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR, 1957, **1**, № 1, 5—10 (франц.)

Даны различные теоремы о разложении для элементов структуры полупервичных идеалов коммутативного кольца с единицей.

R. E. Johnson

Перевод из Math. Revs, 1959, **20**, 137.

10092. Связность топологических структур. Дайер, Шилдс (Connectivity of topological lattices. Dyer Eldon, Shields Allen), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 2, 443—448 (англ.)

Пусть структура M является компактным топологическим пространством, причем структурные операции непрерывны. Доказывается, что M связна тогда и только тогда, когда редуцированное когомологическое кольцо пространства M состоит из одного нуля и для всякого элемента $x\in M$ и любой его замкнутой окрестности U найдется такая замкнутая окрестность V элемента x, что $V\subseteq U$ и гомоморфизм когомологических групп пространств V и U, индуцированный включением, является тождественным отображением. Из другой теоремы выводится, что M оказывается абсолютным ретрактом, если оно метризуемо, связно и конечномерно. Если структура M дистрибутивна и имеет конечную ширину, то во всякой окрестности любого элемента $x\in M$ найдется выпуклая окрестность.

Л. А. Скорняков

10093. Замечания о структурах с метрикой. Микулик (Poznámky ke svazům s metrikou. Mikulík Miloslav), Časop. pěstov. mat., 1959, 84, № 1, 1—(чешск.; рез. русск., англ.)

Если на структуре S введена такая метрика ρ, ч любая неубывающая (невозрастающая), ограниченная смысле этой метрики последовательность элемент содержит сходящуюся подпоследовательность, и для л бого конечного или счетного множества $A\subseteq S$ расст ние между $\inf A$ и $\sup A$ равно диаметру A, то метр ческая сходимость эквивалента сходимости по упоряд ченности.

Доказано, что для σ-полных структур, компактных смысле существующей в них метрики, следующие усл вия равносильны: (α). Метрическая сходимость эквив лента сходимости по упорядоченности; (β). Ес $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — метрически сходящаяся последовательност то $\lim_{n\to\infty}\rho(\bigvee_{k=n}^{\infty}x_k,\bigwedge_{k=n}^{\infty}x_k)=0$; ($\gamma$). Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ме рически сходящаяся последовательность, то

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}\Big(\bigwedge_{k=n}^{\infty}x_k\Big)=\bigwedge_{n=1}^{\infty}\Big(\bigvee_{k=n}^{\infty}x_k\Big).$$

В. В. Пашенко

10094. Свободные структуры с бесконечноместным операциями. Кроли, Дин (Free lattices with inf nite operations. Crawley Peter, Dean R chard A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 35—47 (англ.)

Пусть α — порядковое число. Рассматривая структуры в которых для каждого подмножества мощности $<\aleph_\alpha$ существуют нижняя и верхняя грани (короче: слаб $\aleph_\alpha$-полные структуры), автор вводит понятие свободно структуры $F_\alpha(P)$, α-порожденной частично упорядоче ным множеством P. При помощи методов Уитмен (Whitman P. M., Ann. Math., 1941, 42, 325—330; 194 43, 104—105) дается способ построения структуры $F_\alpha(P)$ При $\alpha=0$ получаются свободные структуры в обычно смысле. Доказывается, что если P_1 и P_2 — неупоряд ченные множества, из которых первое имеет мощност $\aleph_\alpha$, а второе состоит из трех элементов, то $F_\alpha(P_1)$ со держится в $F_\alpha(P_2)$ (для $\alpha=0$ это доказано Уитменом)

В качестве приложений доказываются следующие тео ремы: 1. Любая структура мощности $\leqslant\aleph_\alpha$ является под структурой слабо $\aleph_\alpha$-полной структуры, порожденной тремя элементами. 2. Не существует $\aleph_0$-универсальны структур (существование $\aleph_\alpha$-универсальных структу для любых $\alpha>0$ доказал Йонссон (РЖМат, 1953, 4555)) 3. Если верна обобщенная гипотеза континуума, то пр любом α существуют $\aleph_\alpha$-универсальные частично упо рядоченные множества. Здесь под $\aleph_\alpha$-универсальны частично упорядоченным множеством (структурой) по нимается частично упорядоченное множество (структура мощности $\aleph_\alpha$, содержащее подмножества (подструкту ры), изоморфные любому наперед заданному частично упорядоченному множеству (структуре) мощности $\leqslant\aleph_\alpha$

М. Л. Берлинков

10095. Об одной теореме теории структур. Климеску (Asupra unei teoreme din teoria structurilor Climescu Al.), Bul. Inst. politehn. Iași, 1958, 4, № 1-2, 1—2 (рум.; рез. русск., франц.)

Упрощается доказательство теоремы Гермеса (РЖМат, 1959, 4399 К) о том, что структура S изоморфна структуре подалгебр некоторой абстрактной алгебры тогда и только тогда, когда выполнены следующие 3 условия: 1) S — полная структура; 2) $x\wedge\bigcup y_\beta=\bigcup(x\wedge y_\beta)$ для

любого $x \in S$ и любого множества $\{y_\beta\}$, для которого элемент $y = \sup\{y_\beta\} \in \{y_\beta\}$; 3) любой элемент $x \in S$ является суммой неразложимых в объединение элементов.

В. В. Пашенков

10096. Об экстремальных элементах структур. Мацусима (On extreme elements in lattices. Matsushima Yataro), Proc. Japan Acad., 1959, **35**, № 5, 226—231 (англ.)

Пусть L — структура. Обозначим через $B(a, b) = \{x; axb\}$ и $B^*(a, b) = \{y; aby\}$, где axb означает, что $x = (a + x)(b + x) = (ax) + (bx)$. Множество $B(a, b)$ назовем B-покрытием элементов a и b. Элемент e назовем экстремальный для элемента x, если $B^*(x, e) = e$. Если $M \subseteq L$, то по $E(M)$ будем понимать совокупность элементов, экстремальных хотя бы для одного элемента $x \in M$. Элемент e назовем экстремальным, если $e \in E(L)$. Запись $(a, b) E$ означает, что $B^*(a, b) = b$. Назовем пару элементов $a, b \in L$ экстремальной, если $(a, b) E$ и $(b, a) E$, и обозначим это через $(a, b) E_S$. Если a' — дополнение элемента a в структуре L, то $(a, a') E_S$. Множество $M \subseteq L$ назовем экстремальным, если оно состоит из экстремальных элементов. Множество $B(a, b)$ назовем максимальным B-покрытием, если $(a, b) E_S$, и не существует такого экстремального B-покрытия $B(c, d)$, что имеет место $B(c, d) \supseteq B(a, b)$, $B(a, b) \neq B(c, d)$ и $B(c, d) \neq L$. В булевой алгебре L любое экстремальное B-покрытие является максимальным экстремальным B-покрытием и $E(L) = L$. Если в структуре L выполняются соотношения $(a, b) E$ и $B^*(b, a) \ni a_1 \neq a$, то $(a_1, b) E$. Если, кроме того, существует $a_2 \neq a_1$ такой, что $B^*(b a_1) \ni a_2$, то $(a_2, b) E$. Таким образом, если повторным применением этого метода найден такой элемент a_n, что $B^*(b, a_n) = a_n$, то $(a_n, b) E_S$. Если $(d, a) E$, $(e, b) E$ и $M = B^*(a, d) \cap B^*(b, e)$, то $E(x) \ni a, b$ для любого $x \in M$. Если пространство, состоящее из элементов топологической структуры L, компактно, то назовем структуру L компактной. Для компактной структуры L с нулем (0) и единицей (1) справедливы утверждения: 1) $E(c) = 1$ тогда и только тогда, когда $c = 0$, 2) $E(c) = \{0, 1\}$ тогда и только тогда, когда $L = (c] \cup [c)$, где $[c) = \{z \in L;\ z \geqslant c\}$ и $(c] = \{z \in L;\ z \leqslant c\}$. 3) Если $E(a) = b$, то $a + b = 1$ и $a \cdot b = 0$. Компактная структура, все элементы которой экстремальны, является структурой с дополнениями.

В. В. Пашенков

10097. Идеалы структуры и отношения конгруэнтности I. II. Гретцер, Шмидт (Hálók ideáljai és kongruenciarelációi. I, II. Grätzer György, Schmidt E. Tamás), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, **7**, № 1, 93—109; № 3-4, 417—434 (венг.)

Венгерский вариант работы (РЖМат, 1960, 183). Рассматривается связь между правильными разбиениями и идеалами структуры.

А. А. Бовди

10098. Об одной полугруппе эндоморфизмов на просто упорядоченном множестве. I. Понделичек (O jisté pologrupě endomorfismů na jednoduše uspořádané množině. I. Pondělíček Bedřich), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 2, 177—182 (чешск.; рез. русск., нем.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — линейно упорядоченное множество. Под эндоморфизмом на $\mathfrak{M}$ понимается отображение f множества $\mathfrak{M}$ на себя, сохраняющее порядок. Циклом эндоморфизма f на $\mathfrak{M}$ называется множество A, обладающее одним из следующих свойств: а) Если $f(a) = a$ для некоторого $a \in \mathfrak{M}$, то $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x;\ x \in \mathfrak{M},\ f^n(x) = a\}$. б) Если $\{f_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ — простая последовательность и выбрана последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ (где $f^n(u_n) = y$), то A является объединением всех интервалов множества $\mathfrak{M}$ вида $[f^n(y), u_n]$. Если цикл содержит по крайней мере два элемента, то он называется собственным. Собственный цикл типа а) называется двусторонним, если a не является концевой точкой этого цикла. Если f, g — два эндоморфизма на $\mathfrak{M}$, то мы скажем, что f делит g справа по множеству Γ (обозначаем $f |_\Gamma g$), если существует $h \in \Gamma$ такое, что $g = hf$. Пусть Γ — какая-нибудь полугруппа эндоморфизмов на $\mathfrak{M}$. Мы скажем, что Γ обладает свойством (γ), если имеют место утверждения: а) Если $f \in \Gamma$, то f не имеет двустороннего цикла; б) Если $f, g \in \Gamma$, то $f |_\Gamma g$ или $g |_\Gamma f$. Эндоморфизм f на $\mathfrak{M}$ называется моноциклическим, если он имеет не более одного собственного цикла. Полугруппа Γ называется моноциклической, если каждый эндоморфизм $f \in \Gamma$ является моноциклическим. Моноциклическая полугруппа Γ называется сильно моноциклической, если $\mathfrak{M}[f] = \mathfrak{M}[g]$ для $f, g \in \Gamma$ ($f, g \neq e$, e означает единицу полугруппы). При этом символом $\mathfrak{M}[f]$ мы обозначаем множество всех элементов $x \in \mathfrak{M}$, для которых $f(x) = x$. Обозначим, далее, $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}[f]$, $\mathfrak{M}[\Gamma] = \bigcup_{f \in \Gamma} \mathfrak{M}(f)$. Полугруппу Γ назовем расходящейся, если для произвольных $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, существует $f \in \Gamma$ такой, что $f(x) \geqslant y$ или $x \geqslant f(y)$. Просто упорядоченная группа (с единицей e) является слева архимедовски упорядоченной, если для $a < b$, $e < c$, соответственно, $a < b$, $c < e$, существует натуральное число n, соответственно, m такое, что $c^n a \geqslant b$, соответственно, $a \leqslant c^m b$. Основным результатом является следующая теорема: Для полугруппы Γ эндоморфизмов на $\mathfrak{M}$, обладающей свойством (γ), эквивалентны следующие свойства: а) Γ — сильно моноциклическая; б) Γ — моноциклическая с левым сокращением; в) Γ слева архимедовски упорядочена и расходится.

F. Šik

10099. Заметки об основах теории структур. III. Эллис (Notes on the foundations of lattice theory. III. Ellis David), Rev. Univ. nac. Tucumán, 1957, **A11**, № 1-2, 94—103 (англ.)

Ч. I, II см. Conkling R., Ellis D., там же, 1945, **10**, 75—82; РЖМат, 1954, 4365). В структуре L рассматривается дополнительная бинарная операция, на которую налагаются различные условия и изучаются связи между этими условиями.

А. Х. Лившиц

10100. Конечные ельмслевовы плоскости. Клейнфельд (Finite Hjelmslev planes. Kleinfeld Erwin), Illinois J. Math., 1959, **3**, № 3, 403—407 (англ.)

Под ельмслевовой плоскостью или, короче, H-плоскостью понимается проективная плоскость со смежными элементами (РЖМат, 1955, 5297). Пусть точка P H-плоскости π' лежит на прямой k, которая содержит s точек, не смежных с P, и t точек, смежных с P. Оказывается, что числа s и t не зависят от выбора k и P, s делится на t, π' содержит $s^2 + st + t^2$ точек и столько же прямых. Каждая прямая проективной плоскости π, связанной с π' (РЖМат, 1955, 5297), содержит s/t точек. Если $\pi \neq \pi'$, то $s \leqslant t^2$. Приводится пример конечной дезарговой H-плоскости (РЖМат, 1956, 9087), не являющейся папповой.

Л. А. Скорняков

10101. Полиномы над общими алгебраическими системами. Шуфф (Polynome über allgemeinen algebraischen Systemen. Schuff Hans Konrad), Math. Nachr., 1955, **13**, № 6, 343—366 (нем.)

Дёрге исследовал решение уравнений с неизвестными в абстрактных алгебрах (Dörge K., Math. Nachr., 1951, **4**, 282—297). Позже он и автор распространили результат с абстрактных алгебр на аналогичные системы с многозначными операциями (РЖМат, 1959, 2426).

В реферируемой статье вслед за обзором подобных исследований осуществлено дальнейшее обобщение соответствующих понятий. В предыдущих статьях свойства, которые могут быть потребованы от алгебр при исследовании — это свойства, которые (подобно коммутативному и ассоциативному законам) можно выра-

зить при помощи тождеств. В этой статье определяются четыре типа свойств. Свойства, выраженные посредством тождеств, принадлежат к первому типу. Другие типы включают такие свойства, как существование обратного элемента или отсутствие делителей нуля. Таким образом, теперь охватываются поля и сходные с ними системы. Результат несколько отличается от полученных в предыдущих статьях. H. A. Thurston

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, 571.

10102. Превращение в однородные полей алгебраических функций от n переменных. Линденберг (Die Homogenisierung von algebraischen Funktionenkörpern in Veränderlichen. Lindenberg Wolfgang. Bonn. math. Schr., 1957, № 5, 40 S.) (нем.)

Известный процесс сопоставления неоднородным многочленам от n переменных однородных многочленов от $(n+1)$ переменных (гомогенизация) обобщается на поля алгебраических функций. Пусть $\mathfrak{R}=k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от n переменных над полем k; $\mathfrak{K}=k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — соответствующее поле рациональных функций; $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}(\vartheta)$ — конечное алгебраическое (сепарабельное) расширение поля $\mathfrak{K}$ с помощью корня ϑ нормированного неприводимого уравнения $z^m+k(x_1, \ldots, x_n)z^{m-1}+\ldots+k_m(x_1, \ldots, x_n)=0$ $(k_i \in \mathfrak{R})$; $\tilde{\mathfrak{R}}$ — подкольцо элементов $\mathfrak{L}$, целых относительно $\mathfrak{R}$. Пусть далее $P=k[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, $K=k(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — кольцо многочленов и поле рациональных функций над k от переменных $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Гомогенизация поля $\mathfrak{K}$ состоит в замене $x_i=\xi_i/\xi_0$ $(i=1, \ldots, n)$. При этом каждому элементу из $\mathfrak{K}$ сопоставляется элемент нулевой степени из K. Поле $\Lambda=K(\vartheta)$, где ϑ удовлетворяет уравнению, полученному из (1) гомогенизацией его коэффициентов, можно рассматривать как гомогенизацию поля $\mathfrak{L}$ (причем тогда $\mathfrak{L}=\Lambda$). Можно считать, что $\Lambda=K(\vartheta)$, где $\vartheta=\xi_0^{\sigma}\vartheta$ — корень уравнения $z^m+\ldots+\varkappa_{i\cdot\sigma}(\xi)z^{m-i}+\ldots=0$, в котором $\varkappa_{i\sigma}(\xi)$ — формы из P степени $i\cdot\sigma$. Обозначим через $\tilde{P}$ кольцо элементов Λ, целых относительно P. Каждому многочлену $p(x)=p(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathfrak{R}$ соответствует форма $\hom p=\xi_0^{\tau}p(\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_n/\xi_0)$ из P. Пусть $a \in \tilde{\mathfrak{R}}$ и ξ_0^{τ} — наименьшая степень ξ_0 такая, что $\xi_0^{\tau}a \in \ldots$. Элемент $\xi_0^{\tau}a$ обозначается через $\hom_a$.

В первой части работы вводится далее понятие формально однородного элемента из Λ, как удовлетворяющего уравнению вида $z^M=\hat{\varphi}_g(\xi)z^{M-1}+\ldots+\hat{\varphi}_{M\cdot g}(\xi)=0$, где $\hat{\varphi}_{i\cdot g}$ — элементы из K степени $i\cdot g$, и однородного по нормированиям (bewertungshomogen), как такого, который во всех неоднородных нормированиях Λ (т. е. продолжениях полиномиальных нормирований, задаваемых неприводимым неоднородным полиномом) имеет нулевую норму. Доказывается предложение Крулля об эквивалентности этих двух определений. Указывается условие однородности элемента $\alpha=\sum a_{ij}\vartheta^j$ в терминах его характеристической матрицы $[\alpha_{ij}]$, где $\alpha\cdot\vartheta^i=\sum_j \alpha_{ij}\vartheta^j$. Необходимым и достаточным для того, чтобы α был однородным степени g, является требование, чтобы α_{jk} были отношениями форм степени $g+(j-k)\sigma$ (где σ — степень ϑ). Показывается, что формально однородные элементы из Λ образуют градуированное кольцо в том смысле, что: 1) произведение элементов степеней g и h есть однородный элемент степени $g+h$; 2) сумма однородных элементов некоторой степени есть однородный элемент той же степени. Далее, любой элемент из $\tilde{P}$ может быть однозначно представлен в виде суммы конечного числа формально однородных элементов. В конце первой части вводится операция специализации, являющаяся гомоморфизмом $\tilde{P}$ в $\tilde{\mathfrak{R}}$, отображающим ξ_0 в 1, ξ_i в x_i $(i>0)$, ϑ в ϑ. Результат применения специализации к элементу α обозначается $\mathrm{spez}\alpha$. Отмечается ряд свойств, в частности $\xi_0^{\tau}\hom(\mathrm{spez}\varphi)=\varphi$ для однородного φ, при некотором $\tau \geqslant 0$.

Во второй части работы изучаются идеалы в $\tilde{P}$ и связи их с идеалами из $\tilde{\mathfrak{R}}$. Устанавливается, что в $\tilde{P}$ существует единственный максимальный однородный идеал. Далее доказывается основное предложение: простой идеал $\tilde{\mathfrak{p}}$ из $\tilde{P}$ является однородным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_P$ однороден. В процессе доказательства вводится процесс гомогенизации идеалов из $\tilde{\mathfrak{R}}$, при котором сохраняется простота или примарность. Наконец, доказывается, что любой однородный идеал из $\tilde{P}$ является пересечением однородных примарных идеалов (причем соответствующие им простые идеалы тоже однородны). И. З. Розенкноп

10103 K. Алгебраические группы и поля классов. Серр (Groupes algébriques et corps de classes. Serre Jean-Pierre. (Actual. scient. et industr., № 1264, publs Inst. math. Univ. Nancago, 7). Paris, Hermann, 1959, 202 p.) (франц.)

Курс лекций Серра, читанный в Коллеж де Франс, посвящен изложению недавних работ Розенлихта об обобщенных якобиевых многообразиях, Ланга об абелевых расширениях полей алгебраических функций, а также Барзотти, Розенлихта и автора о расширениях и когомологиях алгебраических групп. Важнейшие результаты резюмированы в первой главе книги. К ним относится прежде всего аналог теоремы Абеля для отображения f неприводимой неособой алгебраической кривой X в групповое многообразие: если распространить это отображение по линейности на группу дивизоров нулевой степени кривой, то ядро его будет содержать группу главных дивизоров вида (φ), где $\varphi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{N}}$; $\mathfrak{N}$ — некоторый дивизор на кривой, имеющий своим носителем множество точек ветвления отображения f. Задание такого дивизора $\mathfrak{N}$ позволяет, наоборот, определить отображение кривой X в групповое многообразие $J_{\mathfrak{N}}$, которое удовлетворяет утверждению теоремы и обладает свойством универсальности. $J_{\mathfrak{N}}$ есть обобщенное якобиево многообразие кривой X. Далее показывается, что любое абелево накрытие неприводимого алгебраического многообразия U (абелево расширение поля функций на нем) в определенном смысле получается как прообраз изогении некоторого группового многообразия G при отображении $U \to G$. Этот результат представляет собой в основном геометрическую переформулировку известных классических теорем о виде образующих циклических расширений. Классификация отображений кривой в групповые многообразия сводится к изучению изогений обобщенных якобиевых многообразий. Это изучение позволяет построить для данного случая аналог теории полей классов и написать явные выражения для закона взаимности, в которые входят так называемые «локальные символы». Обобщенное якобиево многообразие является расширением абелева многообразия с помощью линейной группы. Общему изучению таких расширений, которое тесно связано с когомологиями групповых многообразий, посвящена последняя глава книги. В частности, в ней вычисляется алгебра когомологий абелева многообразия A с коэффициентами в пучке локальных колец: ее строение в случае характеристики $p \neq 0$ оказывается таким же, как и в случае нулевой характеристики, т. е. строением внешней алгебры над $H^1(A)$. Общий план книги: глава 2 посвящена доказательству классической теоремы Римана — Роха в терминах теории когерентных алгебраических пучков; глава 3 — подробному изучению отображений алгебраической кривой в коммутативные алгебраические группы;

главы 4 и 5 — доказательству обобщенной теоремы Римана — Роха для кривой с особенностями и построению обобщенных якобиевых многообразий по Розенлихту; глава 6 — теории полей классов (в частности, когомологиям групп Галуа) и глава 7 — расширениям групп и когомологиям групповых многообразий. В конце каждой главы приводится краткая историко-библиографическая справка и путеводитель по списку литературы, помещенному в конце книги (104 назв.). Характер изложения предъявляет к читателю высокие требования: книга изобилует недоговоренностями, ссылками на журнальную литературу, интересными ассоциациями с предметами, которые по существу не разбираются. Ю. И. Манин

10104 К. Введение в дифференциальную алгебру. **Капланский** (An introduction to differential algebra. Kaplansky Irving), Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 1957, № 5, 63 pp. (англ.)

Гл. I посвящена основным понятиям. Дифференциальным кольцом называется коммутативное кольцо с единицей, в котором отмечено дифференцирование, т. е. аддитивное отображение $a \to a'$ кольца в себя, удовлетворяющее соотношению $(ab)'=a'b+ab'$. Совокупность элементов, производные которых равны нулю, образует подкольцо — кольцо констант. Идеал дифференциального кольца называется дифференциальным, если он замкнут относительно дифференцирования. Выясняется ряд свойств радикальных дифференциальных идеалов дифференциального кольца (идеал I называется радикальным, если из $a^n \in I$ вытекает, что $a \in I$). Дифференциальное кольцо, содержащее поле рациональных чисел, называется алгеброй Ритта.

В гл. II доказывается, что каждый радикальный дифференциальный идеал дифференциального кольца является пересечением простых дифференциальных идеалов. Рассматривается дифференциальное подкольцо A дифференциального кольца B и такой радикальный дифференциальный идеал I кольца B, что $P=I \cap A$ является простым дифференциальным идеалом в A. Тогда идеал I может быть расширен до простого дифференциального идеала кольца B, тоже высекающего идеал P. Если, кроме того, из $ab \in I, a \in A, b \in B$ вытекает либо $a \in I$, либо $b \in I$, то идеал I может быть представлен в виде пересечения простых дифференциальных идеалов кольца B, высекающих идеал P. Изоморфизм между полями K и L называется допустимым, если существует поле M, содержащее K и L.

Доказываются теоремы: 1. Если M — дифференциальное поле характеристики нуль, K и L — его дифференциальные подполя, то любое дифференциальное изоморфное отображение поля K на поле L может быть продолжено до допустимого дифференциального изоморфизма поля M. 2. Если K — дифференциальное подполе дифференциального поля L, имеющее характеристику нуль, и s — элемент поля L, не принадлежащий K, то существует допустимый дифференциальный изоморфизм поля L, для которого s не является неподвижным элементом, а поле K тождественно отображается на себя.

Гл. IV посвящена алгебраическим матричным группам. В гл. III и V строится теория Галуа. Если M — произвольное дифференциальное поле и K — его дифференциальное подполе, то дифференциальной группой Галуа G поля M относительно поля K называется группа всех дифференциальных автоморфизмов поля M, оставляющих все элементы поля K неподвижными. Дифференциальное поле M, содержащее поле K, называется расширением Пикара — Вессио поля K, соответствующим уравнению

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

с коэффициентами из поля K, если: 1) $M=K\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$, где $U_1,\ldots,U_n$ — n решений уравнения (1), линейно независимых над полем констант; 2) поле M имеет то же самое поле констант, что и K. Доказываются теоремы: 1. Дифференциальная группа Галуа расширения Пикара — Вессио является алгебраической матричной группой над полем констант. 2. Каждое расширение Пикара — Вессио дифференциального поля K характеристики нуль с алгебраически замкнутым полем констант является его нормальным расширением. 3. Пусть M — произвольное расширение Пикара — Вессио дифференциального поля характеристики нуль с алгебраически замкнутым полем констант. Теория Галуа устанавливает взаимно однозначное соответствие между промежуточными дифференциальными полями и алгебраическими подгруппами дифференциальной группы Галуа G. Замкнутая подгруппа H группы G тогда и только тогда является нормальным делителем, когда соответствующее поле L нормально над K; в этом случае факторгруппа G/H является полной дифференциальной группой Галуа поля L над полем K. Если $a'=b$, то элемент a называется интегралом b. Поле M называется расширением Лиувилля поля K, если существует такая цепочка промежуточных дифференциальных полей $K=K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = M$, что для любого i поле K_{i+1} является расширением поля K_i с помощью интеграла или экспоненты интеграла. Доказываются теоремы: 1. Если расширение Лиувилля M дифференциального поля K имеет то же поле констант, что и поле K, то его дифференциальная группа Галуа G разрешима. 2. Пусть M — расширение Пикара — Вессио поля K характеристики нуль с алгебраически замкнутым полем констант. Если компонента единицы дифференциальной группы Галуа этого расширения разрешима, то оно является расширением Лиувилля некоторого конечного нормального расширения поля K.

В гл. VI изучаются уравнения второго порядка, в частности, доказывается, что уравнение $y''+xy=0$ не имеет решений ни в каком из полей, которые можно получить из поля рациональных функций переменной x последовательностью конечных алгебраических расширений, присоединений интегралов и присоединений экспонент интегралов.

В гл. VII доказывается теорема Ритта — Роденбаша о базисах: Если алгебра Ритта R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей для радикальных дифференциальных идеалов, то результат $R\{x_1,\ldots,x_n\}$ присоединения к этой алгебре конечного числа дифференциальных неизвестных также удовлетворяет этому условию. Доказывается также, что в любом дифференциальном кольце, удовлетворяющем условию обрыва возрастающих цепей для радикальных дифференциальных идеалов, каждый радикальный дифференциальный идеал можно представить как пересечение конечного числа простых дифференциальных идеалов и что имеется единственное такое несократимое представление.

Глава VIII содержит дополнение, посвященное матричным группам и их обобщениям. А. Х. Лившиц

10105 К. Введение в дифференциальную алгебру. Капланский И., Перев. с англ. М., Изд-во, ин. лит., 1959, 85 стр., 2 р. 85 к.

См. реф. 10104 К.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

10106. О математических методах контроля абстрактных преобразователей. Журавлев Ю. И., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 2, 227—230

Рассматриваются устройства, называемые преобразователями, имеющие «вход» и «выход»; на «вход» поступает некоторая величина $x \in [a, b]$, на «выходе» выдается величина $f(x)$. Преобразователь рассматривается

как «черный ящик». При работе преобразователя могут происходить неисправности, в результате которых при некоторых значениях x_0 входной величины x выходная величина $f(x)$ отлична от $f(x_0)$. Изучается вопрос о контроле работы преобразователя при помощи проверки его работы при отдельных значениях входной величины (предполагается, что если преобразователь работает правильно при входном сигнале x_0, то он с большой вероятностью работает правильно в некоторой окрестности точки x_0). Приводятся достаточные условия надежной работы преобразователя с вероятностью, близкой к единице, на всем отрезке $[a, b]$ при условии надежной его работы в конечном числе точек.

Автор указывает, что излагаемый в реферируемой статье подход к контролю отличен от подхода И. А. Чегис и С. В. Яблонского (РЖМат, 1959, 10905).

О. Б. Лупанов

10107. Булева алгебра для электрических схем. Барнс (Boolean aglebra for switching circuits. Barnes Loyd A.), Electr. Manufact., 1956, 58, № 2, 126—127 (англ.)

10108. Булева алгебра и двоичные системы управления. Фернандес-де-Трокониc (El algebra booleana y los sistemas binarios de control. Fernández de Trocóniz Antonio), Dyna, 1959, 34, № 9, 676—682 (исп.)

Автоматическое управление производственными процессами, автоматизация научных и учетно-плановых вычислений связаны с применением систем, преобразующих информацию. Две различные формы ее представления в автоматических системах — цифровая и аналоговая определили два различных способа математического описания процессов преобразования информации. Если, например, исследование следящих систем связано с использованием аппарата теории дифференциальных уравнений, то для анализа и синтеза дискретных (цифровых) систем применяется булева алгебра. Приведя два частных примера переключательных схем, автор дает краткий исторический очерк булевой алгебры. Основные законы этой алгебры иллюстрируются кругами Дж. Венна. Отметив изоморфизм между последовательным и параллельным соединением контактов и операциями булева умножения и сложения, автор интерпретирует основные законы булевой алгебры в терминах релейно-контактных схем. Г. К. Москатов

10109. Новые методы упрощения булевых функций. Говард (New methods of simplifying Boolean functions. Howard R. L.), Applic. and Ind., 1959, № 43, 134—142. Discuss., 134—143 (англ.)

Описана методика упрощения и преобразования булевых функций в направлении получения их минимальных форм. Функция задается в нормальной форме. Окончательный результат (одна из возможных минимальных форм) может быть получен как в виде произведения сумм, так и в виде суммы произведений. Методы получения обеих форм совершенно аналогичны и основаны на законах булевой алгебры. Переменные и их суммы или произведения представляются в числовой форме: 1 — утвердительная переменная, 0 — переменная с отрицанием и — (черта) — переменная, не содержащаяся в данном члене. Такое представление в сочетании с высокой степенью формализации правил преобразования функции, по мнению автора, обеспечивает возможность программирования методов для вычислительной машины. Правила пользования методикой подробно объясняются на многочисленных примерах. В прилагаемой дискуссии обсуждается ряд неточностей и недостаточно обоснованных утверждений автора.

П. П. Пархоменко

10110. Свертывание симметрических функций. Уиг (Folding of symmetric functions. Weeg G. P.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 4, 325 (англ.)

Рассмотрены необходимые условия для свертывания (folding) схем, реализующих симметрические функции вида

$$S_{p_1, p_2, \ldots, p_r}(x_1, \ldots, x_m),$$

где m — число переменных, p_i — рабочие числа (индексы) симметрической функции. В отличие от Колдуелла и Шеннона, применявших операцию свертывания к любой симметрической схеме с индексами p_i, образующими арифметическую прогрессию, здесь рассматривается более широкий класс симметрических схем. Доказаны теорема и два следствия.

Теорема 1. Если симметрическая схема $S_{p,q,s}(x_1, \ldots, x_s)$ свертывается к p-му ряду $(p < q < s)$, то имеется целое положительное m такое, что $(s-p)/(q-p) = m$.

Следствие 1. Если $S_{p,q,s}(x_1, \ldots, x_n)$ свертывается к p-му ряду $(p < q < s < n)$, то существует целое положительное m такое, что $(s-p)/(q-p) = m$.

Следствие 2. Если $S_{p_1, p_2, \ldots, p_\tau}(x_1, \ldots, x_S)$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_\tau \leqslant s$, свертывается полностью, то существуют целые положительные m_i, $i = 0, 1, \ldots, r-3$, такие, что $(p_{\tau-i} - p_{\tau-i-2})/(p_{\tau-i-1} - p_{\tau-i-2}) = m_i$.

Ю. Л. Томфельд

10111. Методы анализа и синтеза релейных цепей. 1-я часть: Методы, разработанные за рубежом. Клир, Зейдль (Metody analysy a synthesy reléových obvodů. 1. část: Metody vyvinuté v zahraničí. Klír Jiří, Seidl Lev), Slaboproudý obzor, 1958, 19, № 8, 546—550, 563 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Обзор разработанных за рубежом современных методов анализа и синтеза релейных схем. Для каждого метода приводится описание, соответствующие определения и теоремы, а также простые примеры.

По резюме авторов

10112. Методы анализа и синтеза релейных цепей. 2-я часть: Методы, разработанные в Чехословакии. Клир, Зейдль (Metody analysy a synthesy reléových obvodů. 2. část: Metody vyvinuté v ČSR. Klír Jiří, Seidl Lev), Slaboproudý obzor, 1958, 19, № 9, 596—605 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Ч. 1 см. реф. 10111. Рассматриваются методы анализа и синтеза релейных цепей, разработанные в Институте математических машин Чехословацкой Академии наук. Более подробно описывается метод А. Свободы, имеющий существенное значение, в котором применяются графомеханические пособия. Приводится также оценка методов анализа и синтеза релейных цепей, описанных в обеих частях статьи.

По резюме авторов

10113. Некоторые приложения контактных решеток. Свобода (Some applicationsof contact grids. Svoboda Antonín), Stroje zpracov. inform., 1958, № 6, 9—23 (англ.; рез. чешск., русск.)

При решении задач по синтезу логических схем выгодно пользоваться контактными (счетными) решетками и изображать данную булеву функцию в виде двумерной карты. В настоящей работе показано, что, дополнив надлежащим образом графомеханические пособия, описанные автором ранее (РЖМат, 1958, 2779; 1959, 919), можно быстро решить следующую задачу: Дана булева функция $F(x, y, z, \ldots, X, Y, Z, \ldots)$. Требуется найти разложение вида:

$$F = \sum \dot{x} \cdot \dot{y} \cdot \dot{z} \cdot \ldots \cdot \dot{X} \cdot \dot{Y} \cdot \dot{Z} \cdot \ldots \qquad (R)$$

(где точка над символом означает, что данное переменное встречается в члене как x, или как $\bar{x}$, или в нем не встречается) так, чтобы число операций сложения и умножения в разложении было минимальным. При этом не требуется, чтобы были найдены все возможные формы данной функции.

Используются термины, определенные автором в предыдущей статье (РЖМат, 1958, 1060). Автор вводит понятие веса W вершины тела, изображающего данную функцию F внутри единичного n-мерного куба (где n есть число независимых переменных данной функции). Этот вес определяется числом соседних вершин тела, изображающего данную функцию. Синтез разложения (R) производится графомеханическими операциями на карте функции, снабженной символами, выражающими веса вершин тела, изображающего функцию F. В методе применяются методические шаги трех типов: Теорема 1 определяет достаточное условие для того, чтобы член разложения (F) входил в каждую из возможных минимальных форм. Теорема 2 определяет достаточное условие для того, чтобы член разложения (R) входил хотя бы в одну из возможных минимальных форм. Теорема 3 дает нам возможность продолжать работу по синтезу в тот момент, когда мы исчерпали возможности применения теоремы 1 и теоремы 2. После применения теоремы 3 мы возвращаемся к теореме 2 и продолжаем работу тем же способом, пока не будут образованы все значения функции. По резюме автора

10114. Определение конституент булевой функции при помощи диафрагм. Зейдль (Určení konstituent Booleovy funkce clonkami. Seidl Lev), Stroje zpracov. inform., 1958, № 6, 25—33 (чешск.; рез. русск., англ.)

10115. Надежные схемы из ненадежных реле. Мур, Шеннон (Reliable circuits using less reliable relays. Part I, II. Moore E. F., Shannon C. E.), J. Franklin Inst., 1956, **262**, № 3, 191—208; № 4, 281—297 (англ.)

10116. Метод ориентированных графов сигналов. Туэро (Metoda grafů signálových toků. Tuero Miguel), Slaboproudý obzor, 1959, **20**, № 10, 608—615 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Краткое изложение основных идей и правил использования метода ориентированных графов сигналов (Signal flow graphs). Указан способ построения графов, даны определения новых понятий и правила упрощения графов, дано определение остаточных графов, изложены правила Мейсона (Mason) и т. д. В конце статьи дано несколько примеров использования метода. Приведен список литературы по этому методу и его применению. По резюме автора

10117. Приложение теории дистрибутивных структур для изучения распределения программ телекоманд. Кардо (Application de la théorie des treillis distributifs à l'étude de la distribution des programmes par télécommande. Cardot Claude), Rev. gén. électr., 1957, **66**, № 1, 27—39 (франц.)

10118. Сингулярные преобразования в теории цепей. Сешу, Рид (Singular transformations in network theory. Seshu Sundaram, Reed Myril B.), Proc. Nat. Electronics Conf. 11. Chicago 1955. Chicago 1956, 531—543 (англ.)

10119. Семинар по техническим приложениям математической логики (1958—1959 гг.). Гончаров В. П., Автоматика и телемеханика, 1960, **21**, № 1, 145—148

10120 К. Элементы структурного синтеза релейных схем управления. Рогинский В. Н. М., Изд-во АН СССР, 1959, 168 стр., 8 р. 75 к.

Излагаются работы автора по теории релейно-контактных (р.-к.) схем, опубликованные в 1954—59 гг. в различных научных журналах и сборниках. В книге «затронуты только отдельные вопросы, связанные с созданием релейных схем управления применительно к телефонным устройствам», и рассматриваются методы структурного синтеза лишь одного из частных видов релейных схем — р.-к. схем. Во введении сформулированы основные задачи электросвязи и проблемы ее автоматизации. Дан краткий исторический очерк развития и современного состояния теории структурного синтеза р.-к. схем. В гл. 1 содержатся основные определения теории р.-к. схем. В гл. 2 приведены различные способы записи структуры и условий работы релейной схемы, основанные на использовании алгебраического аппарата, изложенного в гл. 4 и 5. В гл. 3 излагаются общие вопросы синтеза многотактных р.-к. схем: составление таблиц включения и условия их реализуемости, методы определения и уменьшения числа промежуточных реле, выбор последовательности работы промежуточных реле для получения минимума числа контактов в цепях исполнительных реле, применение в многотактных р.-к. схемах замедленных реле и, наконец, переход от таблиц включения к схемам, реализующим эти таблицы. В гл. 4 рассматриваются алгебраические преобразования контактных схем. Здесь излагается основной математический аппарат современной теории контактных схем — алгебра логики (булева алгебра), рассматриваются преобразования двухполюсников класса Π и мостиковых схем. В конце главы излагается известный метод графического инверсирования плоских двухполюсных схем. За исключением § 4 гл. 4, где излагается схемная интерпретация отношения включения, в гл. 1—4 не содержится результатов, принадлежащих автору. В гл. 5 «Общие решения и их преобразования» излагаются методы преобразования и упрощения контактных схем, основанные на «учете неиспользуемых состояний» (РЖМат, 1955, 2421) и использовании предложенной автором ранее теории «равнозначностей» (РЖМат, 1956, 4125, 5144 К). Для обозначения равнозначности автор использует символ a/b, который рассматривается им как «сокращенная запись группы булевых функций, удовлетворяющих неравенству (5.10)», т. е. двойному включению $ab \leqslant a/b \leqslant a+b$, «и определяемых выражением (5.11)»: $a/b = ab + (a+b)\omega = ab\bar{\omega} + (a+b)\omega$, где ab, $a+b$ — булево произведение и булева сумма a и b, соответственно, ω — любая булева функция, а $\bar{\omega}$ — инверсия (булево дополнение) ω. Согласно этому «определению» символ a/b означает одновременно и всякую булеву функцию, определяемую выражением (5.11) и удовлетворяющую «неравенству» (5.10), и совокупность («группу», по терминологии автора) всех таких функций. Те значения символа a/b, которые «получаются присвоением символу ω в (5.11) какого-либо определенного значения», автор называет «частными решениями». Для записи «частных решений» автор вводит символ «$\rightarrow$», формальное определение которого отсутствует. При $\omega = 1, 0, a, b$ из (5.11) получаются соответственно следующие «частные решения»: $a/b \rightarrow a+b$, $a/b \rightarrow ab$, $a/b \rightarrow a$, $a/b \rightarrow b$. В случае, когда $\omega = f(a, b, x)$ «частные решения» зависят от x. В § 3 гл. 5 указаны следующие из них: $a/b \rightarrow a + bx$, $a/b \rightarrow b + ax$, $a/b \rightarrow a(b + x)$, $a/b \rightarrow b(a + x)$. Утверждается (без доказательства), что $a/b = b/a$ (5.8) и $\overline{(a/b)} = \bar{a}/b$ (5.23), причем не указывается: используется ли в этих равенствах символ a/b как обозначение всякой булевой функции, определяемой формулой (5.11), или же как множество всех булевых функций, представимых в виде $ab + (a + b)\omega$. В § 5 теория равнозначностей используется для упрощения выражений булевых функций. В остальных параграфах гл. 5 рассматривается упрощение выражений булевых функций с помощью таблиц соседних конституентов, минимизирующих карт, трафаретов («контактных решеток» А. Свободы) и посредством различных равносильностей, «вытекающих из порядка действия реле». В гл. 6 излагается развиваемая автором методика использования вместо конституентов наборов их номеров. Даны основные определения и рассмотрены основные операции с наборами и, в частности, рассмотрены преобразования наборов при изменении нумерации реле. В гл. 7 подробно излагается графический метод синтеза контактных $(1, \kappa)$-полюсников (РЖМат, 1960, 3869),

предложенный первоначально Г. Н. Поваровым для синтеза симметрических и квазисимметрических контактных схем (РЖМат, 1958, 4557, 7556). В гл. 8 и 9 излагается теория синтеза так называемых «смешанных» р.-к. схем класса Π, предложенная автором ранее (РЖМат, 1958, 4556, 7554; РЖЭ, 1956, 5405). В этой теории автор оперирует не с обычной проводимостью $1/R$, где R — сопротивление, а с так называемой «структурной проводимостью» G. Ни в книге, ни в ранее опубликованных работах автора нет определения G для ненулевых конечных значений $1/R$, т. е. между G и $1/R$ не установлено какого-либо взаимно однозначного соответствия. Для обозначения параллельного и последовательного соединения двухполюсников со «структурными проводимостями» G_1 и G_2 используются соответственно символы G_1+G_2 и $G_1 \cdot G_2$, формальное определение которых для G_1 и G_2, не равных 0 и 1, отсутствует. Операция инверсии $\bar{G}$ для значений $G \neq 0$ и $G \neq 1$ также не имеет формального определения. Введенные автором „порядки проводимости" (РЖМат, 1958, 4556, 7554) определены так, что они неявно зависят от приложенного к схеме напряжения, от внутреннего сопротивления его источника и от распределения напряжения по элементам схемы. Из-за этого вычисление порядков проводимости элементов сколько-нибудь сложной синтезируемой схемы оказывается невозможным произвести заранее, до завершения ее синтеза. В гл. 10 рассматривается теория синтеза многотактных р.-к. схем с конденсаторами.

Книга заканчивается гл. 11, в которой кратко описана машина для синтеза контактных $(1, k)$-полюсников, предложенная автором совместно с А. А. Архангельской и В. Г. Лазаревым (РЖМат, 1960, 3870). В книге имеется ряд неотмеченных опечаток. Библ. 136 назв.

В. И. Шестаков

См. также: 9933 К, 10129, 10134, 10203, 10295, 10316, 10572, 10761, 10767, 10796 К, 10803, 10903.

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

10121. Теорема о регулярном графе. Хираока (Theorem on regular graph. Hiraoka Tadashi), Ибараки дайгаку кёику гакубу киё, Bull. Educ. Fac. Ibaraki Univ., 1957, № 7, 39—45 (англ.)

Граф, расположенный на поверхности сферы, называется регулярным, если в каждой его вершине сходится ровно три ребра а каждый многоугольник имеет не менее пяти сторон. Обобщая результаты Вернике (Wernicke P., Math. Ann., 1904, **58**, 419) и Франклина (Franklin P., Amer. J. Math., 1922, **44**, 227), автор доказывает, что всякий регулярный граф содержит по крайней мере один пятиугольник, граничащий (по ребру) с $\varkappa$ пятиугольниками, λ шестиугольниками, μ семиугольниками и с двумя многоугольниками, имеющими более семи сторон, причем $\varkappa+\lambda+\mu=3$. А. А. Зыков

10122. О группе композиции двух графов. Харари (On the group of the composition of two graphs. Harary Frank), Duke Math. J., 1959, **26**, № 1, 29—34 (англ.)

Группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подстановок элементов двух непересекающихся множеств X и Y называются подстановочно изоморфными, если существуют взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$ и групповой изоморфизм $\theta: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ такие, что $f(\alpha x) = (\theta\alpha) f(x)$ для всех $x \in X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Прямая сумма $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ определяется как группа подстановок вида $\alpha+\beta$ ($\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}$) элементов множества $X \cup Y$. Декартовым произведением $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ называется группа подстановок элементов множества $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, причем элементы этой группы $\alpha \times \beta$ определяются так: $(\alpha \times \beta)(x, y) = (\alpha x, \beta y)$. Рассматривается также композиция $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]$ группы $\mathfrak{A}$ с группой $\mathfrak{B}$, введенная Пойа (Polya G., Acta Math., 1937, **68**, 145—254); это группа подстановок элемента множества $X \times Y$, осуществляемых следующим образом: в таблице $\|(x_i, y_j)\|$, где $x_i \in X$, $y_j \in Y$, сначала переставляем строки в соответствии с произвольным элементом $\alpha \in \mathfrak{A}$, а затем в строках делаем перестановки (не обязательно одинаковые) в соответствии с некоторыми элементами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathfrak{B}$. Исследуются три различных произведения конечных симметрических графов без петель: 1) $\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2$ — граф, получаемый соединением каждой вершины графа $\mathfrak{G}_1$ с каждой вершиной графа $\mathfrak{G}_2$; отмечено, что эта операция изучалась ранее рефернтом (Матем. сб., 1949, **24** (66), 163 — 188) под названием произведения; 2) $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ — граф, вершинами которого служат пары (a_1, a_2) вершин $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, причем (a_1, a_2) и (b_1, b_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $a_1 = b_1$ и a_2 смежна с b_2 в $\mathfrak{G}_2$, либо $a_2 = b_2$ и a_1 смежна с b_1 в $\mathfrak{G}_1$; эта операция введена Шапиро (H. S. Shapiro под названием декартова произведения графов; 3) $\mathfrak{G}[\mathfrak{G}_2]$ — граф с тем же множеством вершин, что и в предыдущем случае, но (a_1, a_2) и (b_1, b_2) смежны тогда и только тогда, когда либо a_1 и b_1 смежны в $\mathfrak{G}_1$, либо $a_1 = b_1$ и a_2 смежна с b_2 в $\mathfrak{G}_2$; эту операцию автор называет композицией $\mathfrak{G}_1$ с $\mathfrak{G}_2$. Пусть $\Gamma(\mathfrak{G})$ означает группу автоморфизмов графа $\mathfrak{G}$. Утверждается: 1) $\Gamma(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2)$ подстановочно изоморфна $\Gamma(\mathfrak{G}_1)+\Gamma(\mathfrak{G}_2)$ тогда и только тогда, когда граф $\mathfrak{G}_1$ не содержит компоненты, изоморфной некоторой компоненте графа $\mathfrak{G}_2$; 2) $\Gamma(\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2)$ подстановочно изоморфна $\Gamma(\mathfrak{G}_1) \times \Gamma(\mathfrak{G}_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ взаимно просты (с точки зрения операции $\times$); 3) $\Gamma(\mathfrak{G}_1[\mathfrak{G}_2])$ подстановочно изоморфна $\Gamma(\mathfrak{G}_1)[\Gamma(\mathfrak{G}_2)]$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из графов $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ не является полным. Приводятся доказательства; отмечается, что абстрактный изоморфизм $\Gamma(\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2)$ и $\Gamma(\mathfrak{G}_1) \times \Gamma(\mathfrak{G}_2)$ установлен Сабидусси (РЖМат, 1960, 6718).

Примечания референта. Доказательства теорем логически неполноценны, а утверждение 3) (в нашей нумерации) неверно: достаточно за $\mathfrak{G}_1$ взять полный двухвершинный, а за $\mathfrak{G}_2$ — трехвершинный двухреберный графы или же в качестве $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ взять многовершинные графы без ребер. На стр. 3 несколько раз ошибочно фигурирует индекс $m+n$ вместо $m \cdot n$. А. А. Зыков

10123. Композиция графов. Сабидусси (The composition of graphs. Sabidussi Gert), Duke Math. J., 1959, **26**, № 4, 693—696 (англ.)

Указывается, что утверждение Харари о группе автоморфизмов композиции двух графов (реф. 10122) неверно; доказывается теорема, исправляющая и обобщающая утверждение Харари. Пусть $V(\mathfrak{G}; x)$ означает множество вершин графа $\mathfrak{G}$, смежных с его вершиной x, а отношения R, S и Δ на множестве всех вершин графа $\mathfrak{G}$ определены следующим образом: $xRy \Leftrightarrow V(\mathfrak{G}; x) = V(\mathfrak{G}; y)$, $xSy \Leftrightarrow V(\mathfrak{G}; x) \cup \{x\} = V(\mathfrak{G}; y) \cup \{y\}$, $x\Delta y \Leftrightarrow x = y$ (В остальном мы сохраним обозначения Харари.

Теорема. Пусть граф $\mathfrak{G}_1$ таков, что для любых двух его несмежных вершин x и y пересечения $V(\mathfrak{G}_1; x) \cap V(\mathfrak{G}_1; y)$ конечно, а граф $\mathfrak{G}_2$ конечен. Тогда для подстановочного изоморфизма групп $\Gamma(\mathfrak{G}_1[\mathfrak{G}_2])$ и $\Gamma(\mathfrak{G}_1)[\Gamma(\mathfrak{G}_2)]$ необходимо и достаточно, чтобы в случае $R \neq \Delta$ был связен граф $\mathfrak{G}_2$, а в случае $S \neq \Delta$ бы

связен граф $\mathfrak{G}_2'$, дополнительный для $\mathfrak{G}_2$ (отношения R, S и Δ заданы на графе $\mathfrak{G}_1$). А. А. Зыков

10124. Значение для комбинаторики теоремы Пойа. Риордан (The combinatorial significance of a theorem of Pólya. Riordan John), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, **5**, № 4, 225—237 (англ.)

Подробно излагается метод производящих полиномов Пойа (Pólya G., Acta Math., 1937, **68**, 145—253) и указаны его многочисленные применения для различных задач комбинаторного типа.

10125. О числе графов, раскрашиваемых двумя красками. Харари (On the number of bi-colored graphs. Harary Frank), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 4, 743—755 (англ.)

Проводится методом производящей функций Пойа подсчет числа различных графов типа, указанного в заголовке, с заданным числом вершин. Все такие графы получаются из простейших, каковыми являются линейный граф, окружность с четным числом вершин и звезда, композицией их в смысле Пойа. Р. Е. Кричевский

10126. Некоторые комбинаторные задачи на экстремум. Моцкин, Страус (Some combinatorial extremum problems. Motzkin T. S., Straus E. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 6, 1014—1021 (англ.)

Пусть γ — связный граф, у которого каждая вершина и цидентна не более чем с двумя ребрами. Такой граф — это либо прямая, либо полупрямая, либо сегмент, либо окружность. $S=\{a_1a_2...\}$ — множество вещественных чисел, причем $a\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant ...$, а x — любое взаимно однозначное отображение S на множество вершин γ. Для данной функции $F(x)$ ищутся экстремальные значения переменной x. Дается решение в случае весьма ограничивающего условия на F, и оно применяется к задаче о кратчайшем пути, где находятся в явном виде оценки F, и к теории цепных дробей.

Примечание референта. Постановка общей задачи весьма нечетка. А. А. Зыков

10127. Об H-замкнутых пространствах. Папич (Sur les espaces H-fermés. Papić Pavle), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1959, **14**, № 2, 135—141 (франц.; рез. серб.-хорв.)

Автор называет свойством (α) следующее свойство топологического пространства: каково бы ни было бесконечное множество M, существует такая точка p, что для любой окрестности Op этой точки множество $M\setminus[Op]$ имеет ту же мощность, что и все множество M. В работе строится пример T_2-пространства, обладающего свойством (α) и не H-замкнутого (как указывает автор, аналогичный, но более сложный пример содержится в диссертации Киртадзе (РЖМат, 1954, 1597 Д, см. также Матем. сб., 1960, **50**, № 1, 67—90). Называя $\overline{T}_2$-пространством пространство, в котором любые две различные точки имеют окрестности с непересекающимися замыканиями, автор доказывает следующие теоремы: 1. $\overline{T}_2$-пространство, обладающее свойством (α), замкнуто во всяком объемлющем $\overline{T}_2$-пространстве. 2. Во всяком H-замкнутом $\overline{T}_2$-пространстве имеются непостоянные непрерывные функции. Назовем T_γ-пространством хаусдорфово пространство λ, удовлетворяющее следующему условию: Какова бы ни была точка $x\in X$ и ее окрестность Ox, существует окрестность O_1x, замыкание которой лежит в открытом ядре замыкания Ox]; пространство T_γ тогда и только тогда H-замкнуто, когда оно обладает свойством (α). П. С. Александров

10128. Об обобщенных центрированных системах в пространствах близости. Лидер (On clusters in proximity spaces. Leader S.), Fundam. math., 1959, **47**, № 2, 205—213 (англ.)

Автор переносит на пространства близости понятие, указанное в заголовке, являющееся в свою очередь видоизменением понятия центрированной системы замкнутых множеств, и, не желая пользоваться трансфинитной индукцией, с помощью одной из аксиом Тьюки (Tukey G. W., Ann. Math. Studies, 1940, 2), эквивалентной аксиоме произвольного выбора, воспроизводит ту часть теории пространств близости, которая связана с бикомпактными расширениями (Смирнов Ю., Матем. сб., 1952, **31**, № 3, 543—574). В конце на язык пространств близости переводится известная теорема Вейерштрасса — Стоуна: Всякая подалгебра C алгебры $C(X)$ всех ограниченных действительных равномерно непрерывных относительно близости функций, определенных на пространстве близости X, плотна в $C(X)$ (в смысле равномерной сходимости), если, 1) для каждой точки $x\in X$ существует функция $f\in C$ такая, что $f(x)>0$, и 2) для любых далеких друг от друга множеств A и B существует функция $f\in C$ такая, что $f(A)$, $f(B))>0$ в обычной метрике прямой. Ю. М. Смирнов

10129. Ограниченность в равномерных пространствах и топологических группах. Гейцман (Boundedness in uniform spaces and topological groups. Hejcman Jan), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 4, 544—563 (англ.; рез. русск.)

Вводится и исследуется понятие ограниченного множества в равномерном пространстве, инвариантное относительно равномерных гомеоморфизмов (и, следовательно, не совпадающее с обычным определением ограниченного множества для метрического пространства.). Однако для линейных нормированных пространств это новое определение совпадает с обычным, если брать естественное равномерное строение.

Множество A равномерного пространства P с вейлевским равномерным строением Σ автор называет ограниченным, если для любого окружения $U\in\Sigma$ существуют конечное множество $K\subseteq P$ и натуральное число n такие, что $A\subseteq U^n[K]$ (здесь $U^n[K]$ — множество всех таких точек x, для которых $(xy)\in U^n$ хотя бы при одном $y=y(x)\in K$). Если же $A\subseteq U[K]$ для каждого U при некотором конечном множестве K, то множество A называют вполне ограниченным (это эквивалентно обычному определению).

I. Основные результаты для равномерных пространств. Множество A ограничено в пространстве P тогда и только тогда, когда оно ограничено (в обычном смысле) в любой равномерно непрерывной псевдометрике этого пространства; причем для равномерно метризуемого пространства P достаточно брать лишь метрики (с тем же строением Σ). Множество A ограничено в пространстве P тогда и только тогда, когда всякая равномерно непрерывная действительная функция, определенная на всем пространстве P, ограничена на A. Множество A тихоновского произведения ΠP_α равномерных пространств P_α ограничено тогда и только тогда, когда ограничены все проекции множества A на пространства P_α. Если пространство P равномерно локально вполне ограничено (т. е. если существует такое окружение $U\in\Sigma$, что для всех точек x окрестности вида $U[x]$ вполне ограничены), то всякое ограниченное множество в P будет и вполне ограниченным. В равномерно локально бикомпактном пространстве множество A бикомпактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Если пространство P равномерно локально ограничено и если каждое его замкнутое и ограниченное множество бикомпактно, то P равномерно локально бикомпактно. Если подпространство S плотно в пространстве P, то всякое множество A, лежащее в S и ограниченное в P, будет ограничено и в S.

II. Основные результаты для групп. Множество A коммутативной топологической группы G ограничено (в смысле ее естественного равномерного строения) тогда и только тогда, когда оно ограничено в любой инвариантной и непрерывной псевдометрике этой группы; причем для метризуемой группы G достаточно

брать лишь инвариантные метрики. Множество A ограничено в коммутативной топологической группе G тогда и только тогда, когда при всяком гомоморфизме f группы G во всякую метризуемую группу H образ $f(A)$ ограничен в H. Наконец, автор, намереваясь построить теорию двойственности для локально ограниченных коммутативных групп, доказывает несколько общих предложений о группе гомоморфизмов $[G \to H]$ локально ограниченной группы G, в полную группу H и в то же время дает пример такой локально ограниченной группы, группа характеров которой не локально ограничена. Ю. М. Смирнов

10129. Отношения близости и прекомпактные строения. I, II. Гал (Proximity relations and precompact structures. I, II. Gál I. S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 3, 304—314, 315—326; Indagationes math., 1959, **21**, № 3, 304—314, 315—326 (англ.)

1. На пространства, не обладающие аксиомой Куратовского (каждая точка замкнута), распространяются некоторые результаты Ю. Смирнова о пространствах близости (Матем. сб., 1952, **31**, № 3, 543—574): доказывается теорема о взаимно однозначном соответствии между пространствами близости и прекомпактными равномерными пространствами, теорема о взаимно однозначном соответствии пространств близости с бикомпактными расширениями и теорема о том, что равномерно непрерывные с точки зрения прекомпактных строений отображения и только они равномерно непрерывны с точки зрения соответствующих пространств близости.

2. Обобщается одна теорема Фрейденталя (Freudenthal H., Fundam. math., 1952, **39**, 189—210): с помощью теории пространств близости для периферически бикомпактных (каждая точка имеет сколь угодно малые окрестности с бикомпактной границей) регулярных пространств строится пространство близости (а следовательно, и бикомпактное расширение), максимальное из всех тех, в которых обобщенное естественным образом отношение $O \delta U$ Фрейденталя не является отношением близости ($O \wedge U$ по Галу или $\overline{O} \delta U$ по Смирнову). Ю. М. Смирнов

10131. Змеевидные континуумы и обратные спектры. Мардешич (Chainable continua and inverse limits. Mardešić Sibe), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1959, **14**, № 3, 219—232 (англ., рез. сербо-хорв.)

Строится змеевидный континуум C размерности $\operatorname{ind} C = 2$. Так как $\dim C = 1$ для всякого (многоточечного) змеевидного континуума, то отсюда — в силу результатов Б. Пасынкова (РЖМат, 1959, 10927) — вытекает, что континуум C не является пределом обратного спектра, состоящего из простых дуг. (Известные бикомпакты Лунца и Локуциевского, для которых $\dim = 1$, $\operatorname{ind} = 2$ не являются змеевидными). В то же время автор доказывает, что всякий змеевидный континуум является пределом обратного спектра метризуемых змеевидных континуумов и, следовательно, пределом «двойного» обратного спектра простых дуг. П. С. Александров

10132. σ-связные множества и теорема Гемана. Лелек (Ensembles σ-connexes et le théorème de Gehman. Lelek A.), Fundam. math., 1959, **47**, № 3, 265—276 (франц.)

Метрическое пространство со счетной базой X называется σ-связным, если оно не может быть представлено в виде суммы счетного числа непустых непересекающихся замкнутых множеств. Пространство X называется наследственно локально связным, если всякое его связное подмножество локально связно.

Основными результатами работы являются теоремы: 1) Всякое σ-связное пространство X состоит из конечного числа компонент, каждая из которых является σ-связным множеством. 2) Всякое связное подмножество наследственно локально связного плоского континуума является σ-связным. Доказывается σ-связность «веера» Кнастера (Knaster B., Kuratowski, Fundam. Math., 1921, 2, 206—255). Изложен ряд задач, относящихся к кругу идей, рассматриваемых в статье.

А. С. Пархоменко

10133. Обобщение теоремы Жордана на двукратно упорядоченные множества. Лётген, Вагнер (Über eine Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes auf zweifach geordnete Mengen. Löttgen U., Wagner K.), Math. Ann., 1959, **139**, № 2, 115—126 (нем.)

Двукратно упорядоченным пространством $\mathfrak{R}$ называется топологическое произведение двух упорядоченных непрерывных множеств $\mathfrak{R}^1$ и $\mathfrak{R}^2$ без первого и последнего элемента, причем топология в $\mathfrak{R}^1$ и $\mathfrak{R}^2$ определяется отношением порядка, установленным в этих множествах. Множество $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ называется ограниченным, если оно содержится в топологическом произведении замкнутых интервалов пространств $\mathfrak{R}^1$ и $\mathfrak{R}^2$. Пусть $\mathfrak{M}^\rho$ — упорядоченное непрерывное множество, где ρ обозначает отношение порядка в $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}^\rho$ называется линейным производящим множеством, если оно обладает первым элементом a и последним элементом b и $a \neq b$. В случае, когда $\mathfrak{M}^\rho$ имеет первый элемент и не имеет последнего или имеет последний, но не имеет первого, $\mathfrak{M}^\rho$ называется циклическим производящим множеством. Если $\mathfrak{M}^\rho$ — линейное или циклическое производящее множество, то под окрестностью точки c, не являющейся концевой, подразумевается открытый интервал, содержащий внутри себя эту точку. Для линейного производящего множества окрестностями концевых точек называются полуинтервалы $[a, c)$, соответственно $(c, b]$, где $c \in (a, b)$, а для циклического производящего множества окрестностями концевой точки являются множества вида $\mathfrak{M}^\rho \setminus [c, d]$, где c, d не концевые точки.

Если множество $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{R}$ является взаимно однозначным непрерывным образом линейного (соответственно циклического) производящего множества $\mathfrak{C}^\rho$, то $\mathfrak{C}$ называется открытой (соответственно замкнутой) жордановой кривой.

Доказываются теоремы: 1) Если $\mathfrak{C}$ — открытая жорданова кривая, то $\mathfrak{R} \setminus \mathfrak{C}$ есть область. 2) Всякая замкнутая жорданова кривая $\mathfrak{C}$ разлагает $\mathfrak{R} \setminus \mathfrak{C}$ на две (непустые) непересекающиеся области $I(\mathfrak{C})$ и $A(\mathfrak{C})$, из которых $I(\mathfrak{C})$ ограничено, $A(\mathfrak{C})$ не ограничено. Граница $I(\mathfrak{C})$ и граница $A(\mathfrak{C})$ совпадают с $\mathfrak{C}$. А. С. Пархоменко

10134. Дуги в частично упорядоченных пространствах. Кох (Arcs in partially ordered spaces. Koch R. J.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 3, 723—728 (англ.)

Пусть X — бикомпактное хаусдорфово пространство, частично упорядоченное отношением $\leqslant$. Пусть W — открытое подмножество X, график $(\leqslant)$ замкнут и для любого $x \in W$ каждое открытое множество, содержащее x, содержит элемент y такой, что $y < x$. Каждый элемент $x \in W$ содержится в бикомпактной связной цепи C, имеющей непустое пересечение с границей множества W, причем $x = \sup C$. Пусть $L(x)$ — множество всех элементов $y \in X$ таких, что $y \leqslant x$. Если X содержит единственный минимальный элемент O, график $(\leqslant)$ замкнут в $X \times X$ и $L(x)$ связно для всякого $x \in X$, то каждый элемент из X может быть соединен с O бикомпактной связной цепью и, следовательно, X линейно связно. Полученные результаты применены к исследованию хаусдорфовых топологических полугрупп. Пусть S — бикомпактная связная топологическая полугруппа, E — множество ее идемпотентов, S/J — пространство ее F-классов (РЖМат, 1955, 1672). Если $ES \cup SE = E$, то S/J линейно связно. Если полугруппа S содержит единицу u и V — открытое подмножество S, содержа-

щее u, то V содержит дугу. Если S — локально бикомпактная полугруппа с нулем, все элементы которой идемпотентны, то S линейно связна. В частности, любая локально бикомпактная полуструктура (РЖМат, 1958, 17506) линейно связна. Л. М. Глускин

10135. О квазикомпактных отображениях. Цудзимото (On quasi-compact mappings. Tsujimoto Hitoshi), Bull. Univ. Osaka Prefect., 1958, A6, 19—24 (англ.)

Даются условия, при которых отображение $f(A)=B$ является квазикомпактным отображением (образ обратимого замкнутого замкнут: $E=f^{-1}(f(E))$), а именно: 1) для того чтобы f было квазикомпактным непрерывным отображением на всяком обратимом множестве пространства A, необходимо и достаточно, чтобы f было квазикомпактным непрерывным отображением на A и множество $(E)_f$ было замкнуто в A для всякого обратимого множества E. Через E_* обозначим наименьшее обратимое замкнутое подмножество, содержащее E; 2) f квазикомпактно тогда и только тогда, когда $f(E_*)\supseteq\overline{f(E)}$ для всякого обратимого подмножества E пространства A; 3) f квазикомпактно на всяком обратимом множестве тогда и только тогда, когда $f(E)\supseteq\overline{f(E)}$ для всякого обратимого множества E.

А. С. Пархоменко

10136. Свойства пространств с неподвижными точками. Коннелл (Properties of fixed point spaces. Connell E. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 6, 974—979 (англ.)

Строятся примеры: хаусдорфова пространства, обладающего свойством неподвижной точки, но не содержащего никакого бесконечного бикомпакта; некомпактного метризуемого локально стягиваемого пространства со счетной базой, обладающего свойством неподвижной точки; компакта, не обладающего свойством неподвижной точки, но содержащего всюду плотное множество, этим свойством обладающее. Доказывается среди других теорем, что локально компактное, локально связное метризуемое пространство со свойством неподвижной точки есть компакт П. С. А.

10137. Отображения сфер в евклидово пространство. Берштейн (Applications de sphères dans l'espace euclidien. Berstein I.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1957, 2, 375—381 (франц.)

Будем говорить, что замкнутое центрально симметричное подмножество F сферы S^2 принадлежит классу $\mathfrak{M}_k$, если найдется такое непрерывное отображение f сферы S^n в евклидово пространство E^{n-k}, что $x\in F$ тогда и только тогда, когда $f(x)=f(\tau(x))$ (через τ обозначена центральная симметрия сферы S^n). Автор показывает, что $F\in\mathfrak{M}_k$, в том и только в том случае, когда род множества $S^n\setminus F$ относительно инволюции τ не превышает $n-k$ (определение рода пространства относительно инволюции см. у Красносельского). С помощью этого предложения показывается, что любой центрально симметричный полиэдральный комплекс центрально симметричной триангуляции сферы S^n, ациклический в размерностях $<k$, принадлежит классу $\mathfrak{M}_k$.

А. С. Шварц

10138. Гомологии и когомологии Чеха. I, II. Зисман (Homologie et cohomologie de Čech, I, II. Zisman M.), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 11-1—11-9; 14-1—14-10 (франц.)

В первом сообщении излагается теория индуктивных и проективных пределов систем модулей и дается определение групп спектральных гомологий и когомологий. Во втором сообщении формулируются в виде теорем, относящихся к спектральным гомологиям, аксиомы теории гомологий, исходя из которых производится вычисление групп гомологий и когомологий сфер. Большинство предложений приведено без доказательства.

Е. Г. Скляренко

10139. Дифференцируемые многообразия. Зисман (Variétés différentiables. Zisman M.), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 7-1—7-11 (франц.)

Сообщение содержит краткое изложение основных понятий, связанных с дифференцируемыми многообразиями (дифференцируемые функции, дифференцируемые отображения, касательные векторы, векторные поля, дифференциальные формы). Вопросы, связанные с теорией когомологий дифференцируемых многообразий, не затрагиваются. Е. Г. Скляренко

10140. Расслоенные пространства. Расслоенные пространства с векторным слоем. Классы Чжэня. Зисман (Espaces fibrés. Espaces fibrés à fibre vectorielle. Classes de Chern. Zisman M.), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 17-1—17-12; 21-1—21-8; 23-1—23-10 (франц.)

Цикл докладов, посвященных расслоенным пространствам. В первом из них излагается общая теория расслоенных пространств со структурной группой (Стинрод, РЖМат, 1953, 627К). Во втором докладе описываются некоторые известные операции над векторными расслоенными пространствами. В последнем докладе излагается аксиоматическая теория классов Чжэня для векторных расслоенных пространств над полем комплексных чисел Хирцебруха (РЖМат, 1956, 6191К)

Е. Г. Скляренко

10141. Когомологии с коэффициентами в пучке. Зисман (Cohomologie à coefficients dans un faisceau. Zisman Michel), Sémin. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et Pisot. Fac. Sci. Paris. 1957—1958, 11 année, Vol. 1. Paris, 1958, 8-1—8-14 (франц.)

Большая часть сообщения посвящена доказательству теоремы о точной последовательности когомологий с коэффициентами в пучке для паракомпактных пространств. В качестве приложений дается классификация дифференцируемых косых произведений с группой $u(1)$ и доказывается теорема де Рама о когомологиях дифференцируемых многообразий. Е. Г. Скляренко

10142. Когомологии комплексных аналитических многообразий. Зисман (Cohomologie des variétés analytiques complexes. Zisman Michel), Sémin. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot. Fac. Sci. Paris. 1957—1958, 11 année, Vol. 2. Paris, 1958, 21-1—21-19 (франц.)

Обзор основных фактов гомотопической теории комплексных (в частности, келеровых) многообразий (теорема Дольбо, двойственность, обобщенная эйлерова характеристика, дивизоры и т. п.). М. М. Постников

10143. О надстроечной триаде. Джеймс И. М. (James I. M.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, **1**, № 4, 29—80

См. РЖМат, 1960, 1506.

10144. О надстроечной последовательности. Джеймс И. М. (James I. M.). Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 5, 3—32

См. РЖМат, 1960, 1508.

10145. Двойственность в топологии. Уайтхед Дж. Г. (Whitehead J. H. C.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1959, 3, № 1, 3—16

См. РЖМат, 1958, 7597.

10146. Теория носителей и S-теория. Спаньер Э. Г., Уайтхед Дж. Г. (Spanier E. H., Whitehead J. H. C.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1959, 3, № 1, 27—56

См. РЖМат, 1959, 214.

10147. Кольцо когомологий произведения комплексов. Палермо (The cohomology ring of product complexes. Palermo F. P.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 1, 174—196 (англ.)

Решается задача нахождения колец когомологий топологического произведения двух пространств. Приводится пример, показывающий (в силу выводимых в работе формул), что целочисленное кольцо когомологий топологического произведения не определяется заданием целочисленных колец когомологий сомножителей. Далее приводится еще более разительный пример, показывающий, что для этого недостаточно даже задания целочисленных и всех модульных колец когомологий сомножителей, но что нужно знать еще связывающие эти кольца гомоморфизмы (коэффициентные гомоморфизмы, возникающие при изменении группы коэффициентов Z_n и гомоморфизмы референта). Именно, линзовые пространства $L(5,1)$ и $L(5,2)$ имеют изоморфные кольца когомологий (как целочисленные, так и модульные), различаясь лишь гомоморфизмами между ними, однако топологические квадраты этих пространств имеют неизоморфные целочисленные кольца когомологий.

Показывается, что задание спектров колец когомологий (когомологических спектров) пространств X и Y (полных модульных спектров в смысле референта), т. е. их целочисленных колец когомологий и колец когомологий mod n вместе с вышеупомянутыми гомоморфизмами, определяет когомологический спектр произведения $X \times Y$. Автор знаком с работой референта (Докл. АН СССР, 1943, **40**, № 9) и пользуется содержащейся в ней конструкцией для нахождения аддитивного строения искомых колец когомологий, переводя ее на чисто алгебраический язык с использованием понятия тензорного произведения групп, что делает ее гораздо более обозримой и прозрачной и значительно сокращает ее изложение; что же касается мультипликативного строения этих колец, не указанного референтом в упомянутой работе, то он ее находит независимо от референта, так как соответствующая статья референта (РЖМат, 1959, 8935) появилась лишь одновременно с реферируемой статьей.

Получены следующие результаты, которые, хотя по существу, и совпадают с результатами референта, но благодаря использованию адекватного алгебраического аппарата формулируются и доказываются значительно короче. $K = (C(K), \delta, \omega)$ называется коцепным комплексом, если $C(K) = \sum_{r \geq 0} C^r(K)$ есть градуированная дифференциальная группа с однородным дифференциальным оператором δ степени $+1$ и инволюцией $\omega(x) = (-1)^r x$, $x \in C^r(K)$, в которой задано умножение $x \cdot y \in C^{p+q}(K)$ для $x \in C^p(K)$, $y \in C^q(K)$, превращающее ее в ассоциативно кольцо, причем $\delta(xy) = \delta(x)\, y + \omega(x)\, \delta(y)$. Через $H(K) = H(K, 0)$ обозначается кольцо когомологий коцепного комплекса K, а через $H(K, n)$ — его кольцо когомологий по модулю n, т. е. кольцо когомологий комплекса $K \otimes Z_n = (C(K) \otimes Z_n, \delta \otimes 1, \omega \otimes 1)$. Для каждой пары целых чисел $m \geq 0$, $n > 0$ определяется коэффициентный гомоморфизм $h_{n,m} : H(K, m) \to H(K, n)$ посредством формулы $h_{n,m}(x_m) = \left(\frac{n}{(n,m)} x\right)_n$, где $x_n \in H(K, n)$ есть класс когомологий элемента $x \otimes 1_n \in C(K) \otimes Z_n$, причем по предположению δx делится на n, а для $n > 0$ определяется гомоморфизм Бокштейна $\Delta_n : H(K, n) \to H(K)$ посредством формулы $\Delta_n(x_n) = \left(\frac{1}{n} \delta x\right)_0$. Совокупность колец когомологий $H(K, n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ вместе с этими гомоморфизмами называется когомологическим спектром коцепного комплекса K. Оказывается, что если $K = (C(K), \delta, \omega)$ и $L = (C(L), \delta, \omega)$ — два коцепных комплекса без кручения (т. е. группы $C(K)$ и $C(L)$ не содержат элементов конечного порядка), то когомологический спектр коцепного комплекса $K \otimes L = (C(K) \otimes C(L), \delta \otimes 1 + \omega \otimes \delta, \omega \otimes \omega)$, в котором умножение задано формулой $(x \otimes y) \cdot (u \otimes v) = (-1)^{pq} xu \otimes yv$ при $y \in C^p(K)$, $u \in C^q(L)$, определяется когомологическими спектрами комплексов K и L. Строение кольца $H(K \otimes L)$ находится так. Составляем группу $S_0(K, L) = \sum_{n=0}^{\infty} H(K, n) \otimes H(L, n)$ и определяем гомоморфизм $\varphi_0 : S_0(K, L) \to H(K \otimes L)$ как α_0 на $H(K) \otimes H(L)$ и как $\Delta_n \alpha_n$ на $H(K, n) \otimes H(L, n)$, $n > 0$, где α_n определяется тем, что $\alpha_n(x_n \otimes y_n) = (x \otimes y)_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Тогда φ_0 есть эпиморфизм с ядром $Q_0(K, L)$, порожденным следующими элементами группы $S_0(K, L)$: $h_{i,j}(x_j) \otimes y_i - x_j \otimes h_{j,i}(y_i)$ i/j или j/i), $\Delta_i(x_i) \otimes y_0 - x_i \otimes h_{i,0}(y_0)$ $(i > 0)$, $(x_0 \otimes \Delta_i(y_i) - h_{i,0}(\omega(x_0)) \otimes y_i$ $(i > 0)$. Если в $S_0(K, L)$ рассматривать умножение $x * y$, равное xy при $j = 0$, $\omega'(x)\, y$ при $j > 0$, $i = 0$ и $\alpha x D_j(y) + \beta \omega'(D_i(x)) \cdot y$ при $i > 0$, $j > 0$, где $x \in H(K, i) \otimes H(L, i)$, $y \in H(K, j) \otimes H(L, j)$, $\omega' = \omega \otimes \omega$, xy при $i = j$ определяется так же, как выше для $K \otimes L$, а при $i \neq j$ формулой $xy = h_{c,i}(x) \cdot h_{c,j}(y)$, $c = (i, j)$, $\omega' = \omega \otimes \omega$, $D_n = \Delta_{n,n} \otimes 1 + \omega \otimes \Delta_{n,n}$ $(n > 0)$, $\Delta_{n,n} = h_{n,0} \Delta_n$, а целые числа α и β выбраны так, что $\alpha i + \beta j = (i, j)$, то φ_0 есть гомоморфизм колец, т. е. $\varphi_0(x * y) = \varphi_0(x) \cdot \varphi_0(y)$. Строение кольца $H(K \otimes L, n)$ находится так. Составляем группу $P_n(K, L) = \sum_{i|n} H(K, i) \otimes H(L, i)$ (очевидно, $P_n(K, L) = S_0(K, L)$) и ее прямое произведение на себя $S_n(K, L)$ и определяем гомоморфизм $\theta_n : P_n(K, L) \to H(K \otimes L, n)$ как $h_{n,i}\alpha_i$ на $H(K, i) \otimes H(L, i)$ и гомоморфизм $\varphi_n : S_n(K, L) = P_n(K, L) \times P_n(K, L) \to H(K \otimes L, n)$, задаваемый формулой $\varphi_n(x, y) = \theta_n(x) + \Delta_{n,n} \theta_n(y)$. Тогда φ_n есть эпиморфизм с ядром $Q_n(K, L)$, порожденным следующими элементами группы $S_n(K, L)$: $(0, h_{i,j}(x_j) \otimes y_i - x_j \otimes h_{j,i}(y_i))$, $(h_{i,j}(x_j) \otimes y_i - x_j \otimes h_{j,i}(y_i), 0)$, $(D_n(u), -u)$, где $i, j/n$, $x_j \in H(K, j)$, $y_i \in H(L, i)$, $u \in H(K, n) \otimes H(L, n)$. Если в $S_n(K, L)$ ввести соответствующее умножение $**$, то φ_n будет гомоморфизмом колец, т. е. $\varphi_n(u ** v) = \varphi_n(u) \cdot \varphi_n(v)$. Это умножение определяется так: если $x \in H(K, i) \otimes H(L, i)$, $y \in H(K, j) \otimes H(L, j)$ $(i, j/n)$, то $(0, x) ** (0, y) = (0, x * y)$, $(0, x) ** (y, 0) = \left(-\omega'(x) * y, \alpha \frac{i}{c} x \odot y\right)$, $(y, 0) ** (0, x) = \left(y * x, \alpha \frac{i}{c} \omega'(y) \odot x\right)$, $(y, 0) ** (x, 0) = (y \odot x, 0)$, где $x \odot y = \frac{n}{[i, j]} xy$, причем $[i, j]$ означает общее наименьшее кратное чисел i и j, $c = (i, j)$, а α и β — целые числа, для которых $\alpha i + \beta j = c$. Строение составляющих спектр гомоморфизмов определяется так. Вводятся гомоморфизмы $h_{m,n} : S_n(K, L) \to S_m(K, L)$, $\Delta_n : S_n(K, L) \to S_0(K, L)$ и инволюция ω_n на $S_n(K, L)$, а именно

$$h_{m,n}(x, 0) = \frac{[m, n]}{[m, i]} (h'_{c,i}(x), 0),$$

$$h_{m,n}(0, x) = \frac{m}{(m, n)} (\alpha h'_{c,i} D_i(x), \beta h'_{c,i}(x)),$$

где $h'_{c,i} = h_{c,i} \otimes h_{c,i}$, $h_{m,0}(x) = (h'_{m,0}(x), 0)$ при $i = 0$ и $h_{m,0}(x) = (\alpha h'_{c,i} D_i(x), \beta h'_{c,i}(x))$ при $i > 0$, $\Delta_n(x, y) = x$, $\omega_n(x, y) = (\omega'(x), -\omega'(y))$ при $n > 0$, $\omega_0(x) = -\omega'(x)$ при $i > 0$, $\omega_0(x) = \omega'(x)$ при $i = 0$, причем $x' \in H(K, i) \otimes H(L, i)$, $m, n > 0$, i/n, $c = (m, i)$, α и β — целые числа, для которых $\alpha m + \beta i = c$. Тогда эт

гомоморфизмы коммутируют с φ_n, а потому индуцируют искомые гомоморфизмы спектра $h^*_{m,n}, \Delta^*_n, \omega^*_n$ после перехода к кольцам вычетов $R_n(K,L)=S_n(K,L)/Q_n(K,L)$, изоморфным составляющим определяемый спектр кольцам $H(K\otimes L, n)$. Допустимым отображениям комплексов $K\to K'$, $L\to L'$ отвечают очевидным образом определяемые гомоморфизмы колец $R_n(K,L)\to R_n(K',L')$, коммутирующие с этими гомоморфизмами.

Доказательство проводится сначала для элементарных комплексов, т. е. комплексов с одной свободной образующей c, $\delta c=0$ и с двумя свободными образующими a и b, $\delta a=tb$, $\delta b=0$ (t — целое), затем с помощью прямого суммирования — для свободных комплексов с конечным числом образующих, а общий случай комплексов без кручения получается путем прямого предельного перехода. Если рассматривать кольца когомологий в смысле Чеха для бикомпактов, то они, как известно, будут естественно изоморфны кольцам когомологий коцепных комплексов без кручения, однозначно определяемых этими бикомпактами, причем топологическому произведению бикомпактов отвечает тензорное произведение этих комплексов. Поэтому спектр когомологий топологического произведения двух бикомпактов с помощью приведенной конструкции определяется спектрами когомологий сомножителей. То же самое справедливо и для локально бикомпактных пространств, если пользоваться когомологиями с бикомпактными носителями.

М. Ф. Бокштейн

10148. Об изоморфизме при переходе к пространству петель. Сташефф (On the space-of-loops isomorphism. Stasheff James), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 6, 987—993 (англ.)

Пусть X и Y — линейно связные топологические пространства, $x_0\in X$, $y_0\in Y$, ΩX и ΩY — пространства петель в пространствах X и Y с началом соответственно в точках x_0 и y_0, $\widetilde{x}_0\in\Omega X$ и $\widetilde{y}_0\in\Omega Y$ — отображения отрезка в точки x_0 и y_0, $\pi(X,Y)[\pi(\Omega X,\Omega Y)]$ — совокупность гомотопических классов отображений пары (X,x_0) в пару (Y,y_0) [пары $(\Omega X,\widetilde{x}_0)$ в пару $(\Omega Y,\widetilde{y}_0)$]. Множество $\pi(X,Y)$ естественным образом отображается в множество $\pi(\Omega X,\Omega Y)$. Автор показывает, что в случае, когда пространство X является полиэдром с клеточным разбиением, асферичным в размерностях $<n$, а пространство Y асферично в размерностях $>n-1$, это отображение является взаимно однозначным соответствием между множествами $\pi(X,Y)$ и $\pi(\Omega X,\Omega Y)$. (Этот факт может быть получен комбинацией результатов работы Постникова (РЖМат, 1958, 1 2)) с известными фактами о натуральной системе Постникова пространства петель (например, РЖМат, 1957, 21 2). Множество $\pi(\Omega X,\Omega Y)$ обладает групповым строением (так как ΩY — H-пространство) и, следовательно, в рассматриваемом случае естественно вводится групповое строение в множестве $\pi(X,Y)$. Автор указывает более непосредственное определение группового строения в множестве $\pi(X,Y)$.

А. С. Шварц

10149. Косые произведения над комплексным проективным пространством с окружностью в качестве слоя. Лира (On circle bundles over complex projective space. Lyra C. B. de), Anais Acad. brasil. cienc., 1959, **31**, № 1, 17—24 (англ.; рез. порт.)

Доказывается, что классы эквивалентных косых произведений с группой $O(1)$ и базой P_n (P_n — комплексное проективное пространство) находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми неотрицательными числами, причем если $\pi_1(E)=2m$, где $E\xrightarrow{S_1}P_n$ — подобно косое произведение, то класс эквивалентности этого косого произведения определяется числом m. Используя этот результат, автор показывает, что: 1) база произвольного локально тривиального расслоения $S^3\xrightarrow{S^1}B$ гомеоморфна S^2; 2) любые два расслоения сферы S^3 со слоем и группой $SO(2)$ эквивалентны, причем эквивалентность может быть установлена при помощи некоторого гомеоморфизма $g: S^3\to S^3$.

А. М. Виноградов

10150. О лемме Дена и асферичности узлов. Папакирьякопулос С. Д. (Papakyriakopoulos C. D.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, **2**, № 4, 23—47

См. РЖМат, 1959, 7848.

10151. Лемма Дена в случае трехмерной сферы. Хомма (On Dehn's lemma for S^3. Homma Tatsuo), Yokohama Math. J., 1957, **5**, № 2, 223—244 (англ.)

Автор предлагает доказательство леммы Дена только для случая трехмерной сферы. Ранее лемма Дена во всей ее общности была доказана Папакирьякопулосом (РЖМат, 1959, 7849).

R. H. Fox

Перевод из Math. Revs, 1960, **21**, 3, 307.

10152. Изотопии в 3-мерных многообразиях. I. Изотопные деформации двумерных и трехмерных клеток. Сандерсон (Isotopy in 3-manifolds. I. Isotopic deformations of 2-cells and 3-cells. Sanderson D. E.), Proc. Amer. Math. Soc, 1957, **8**, № 5, 912—922 (англ.)

Используя несколько упрощенную технику, автор передоказывает теорему Мойза: Пусть D — полиэдральный диск (полиэдральная 3-мерная клетка) в трехмерном пространстве, σ — любой двумерный (трехмерный) симплекс в D и U — открытое полиэдральное множество в M, содержащее $(D\setminus\sigma)\cap(\Gamma_D\sigma\cup B_H D)$. Тогда D может быть деформировано в единственный симплекс σ симплициальной изотопией M в себя, при котором $M\setminus U$ остается неподвижным.

Разбиение n-мерного многообразия с границей M называется скорлупой, если клетки его можно так занумеровать $C_1\dots C_l$, что C_i отщепляемо от $M\setminus\bigcup_{j<i}C_j$ (т. е. $G_{i+1}\Gamma_D(M\setminus\bigcup_{j<i}C_j)$ гомеоморфно $(n-1)$-мерной клетке). Клеточное разбиение двумерного диска всегда образует скорлупу, а для трехмерной клетки существуют примеры триангуляций, не образующие скорлупы (Frankl F., Monatsh. Math. und Phys., 1931, **38**, 357—364), но всегда существует подразбиение, которое уже образует скорлупу. В частности, трехмерное многообразие тогда и только тогда является 3-мерной сферой, когда существует его конечное клеточное разбиение, образующее скорлупу.

В. К. Белов

10153. Триангуляция тетраэдра, не образующая скорлупы. Рудина (An unshellable triangulation of a tetrahedron. Rudin Mary Ellen), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 3, Part 1, 90—91 (англ.)

Строится пример триангуляции тетраэдра T, не образующей скорлупы, т. е. для любого тетраэдра R этой триангуляции замыкание $T-R$ не гомеоморфно T (реф. 10152). Триангуляция состоит из 41 тетраэдра.

А. Г. Школьник

10154. Еще один пример клеточного разбиения которое не образует скорлупы. Дейвис (Another subdivision which can not be shelled. Davis Chandler), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 735—737 (англ.)

Автор дает разбиение 3-мерной сферы на три клетки, которое не образует скорлупы, а именно фундаментальная группа любого объединения двух клеток нетривиальна, причем возможно такое разбиение, что эта фундаментальная группа будет свободной с v образующими. И вообще, всегда существует при $k\geqslant n\geqslant 3$ n-мерная клетка и k-клеточное разбиение такие, что объединение любых k—1-мерных клеток имеет нетри-

виальную n—2-мерную гомотопическую группу.

В. К. Белов

10155. Минимальные множества: введение в топологическую динамику. Готшок (Minimal sets: an introduction to topological dynamics. Gottschalk W. H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, 64, № 6, 336—351 (англ.)

Обзор некоторых понятий и результатов топологической теории динамических систем, в первую очередь тех, которые непосредственно связаны с понятием минимального множества. В конце обзора указан ряд проблем. Библ. 28 назв.

С. В. Фомин

10156 К. Топологические пространства и многозначные функции. Берж (Espaces topologiques. Fonctions multivoques. Berge Claude. Paris, Dunod, 1959, XI, 272 p., ill.) (франц.)

Книга содержит элементарные сведения из теории множеств, топологических пространств и многозначных функций, причем излагаются эти разделы в плане, удобном в приложениях к теории игр, линейному программированию, и различным другим прикладным вопросам. Эти приложения в большинстве случаев изложены как примеры соответствующих понятий и теорем. Первые семь глав содержат вспомогательные предложения (известные теоремы о топологических пространствах). В восьмой главе излагаются простейшие предложения бистохастических матриц, выпуклые множества, неравенства, связанные с ним, принцип минимакса Шиома. В последней, девятой главе излагается принцип неподвижной точки для общего случая банаховых пространств. Не претендуя на новизну излагаемого материала, книга является хорошим изложением всех перечисленных выше вопросов.

Р. Е. Кричевский

10157 К. Теория графов и ее приложения. Берж (Théorie des graphes et ses applications. Berge Claude. Paris, Dunod, 1958, 275 p., ill.) (франц.)

Эта книга после книги Кёнига (König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936) является второй монографией по теории графов. Она написана в основном с уклоном в сторону приложений теории графов к комбинаторному анализу, к теории игр, транспортным задачам и др. Автор использует свою терминологию, которая позволяет ему рассматривать ориентированные и неориентированные графы одновременно. В гл. I дается общее определение графа и его непосредственных характеристик. В гл. II устанавливается связь теории графов с упорядоченными множествами. В гл. III определяются функции упорядочивания, классическим примером которых служит функция Гранди (определение и свойства см. РЖМат, 1959, 6705). В гл. IV вводятся две основные характеристики графа — его хроматическое число и число внешней и внутренней устойчивости (по поводу последней см. РЖМат, 1960, 6273). Последние применяются в гл. V для нахождения ядра графа и устанавливается связь между существованием ядра и функции Гранди у графа. В гл. V дается общее определение игры с полной информацией на графе и на конкретном примере игры *Nim* дается применение функции Гранди для стратегии игрока.

В гл. VII содержатся элементарные сведения по задаче о наикратчайшем пути, соединяющем все вершины графа, а в гл. VIII излагаются результаты Форда и Фулкерсона о максимальной пропускной способности через вершины графа. В гл. IX вводятся характеристики, связанные с понятием полустепени вершин в графе (внешней и внутренней) — естественное разделение степени неориентированного графа, и устанавливаются критерии Гайля о существовании графа с заданным набором полустепеней. В гл. X вводится понятие паросочетаний и чередующихся цепей в графе и дается несколько алгоритмов, связанных с этим понятием. В гл. XI несколько элементарных предложений о гамильтоновых циклах и их обобщении — факторахподграфах, для которых внешняя и внутренняя вершины имеют полустепени 1. В гл. XII—XIII решается задача о нахождении центра и диаметра графа, причем эти понятия понимаются в метрическом смысле слова, а не как раньше у Кёнига. В гл. XIV—XV изучаются матрицы, которые можно сопоставить графу, и изучаются операции булева сложения и умножения, устанавливается связь с существованием пути в графе определенной длины; матрицы инциденций применяются для различных характеристик электрических сетей. В гл. XVI изучаются вопросы, связанные с существованием деревьев в графе определенного рода. В гл. XVII изучается древняя задача Эйлера о существовании эйлеровых циклов в графе (речь идет об ориентированных графах). В гл. XVIII автор возвращается к понятию паросочетаний и чередующихся цепей и дает несколько новых алгоритмов (РЖМат, 1960, 6273). В гл. XIX рассматривается обобщение понятия фактора—полуфактор и даются необходимые и достаточные условия существования полуфактора. В гл. XX изучаются различные вопросы, связанные со связностью графа, в частности, рассматривается h-связность. В гл. XXI изучаются плоские графы; формулируется теорема Понтрягина—Куратовского о необходимом и достаточном условии для того, чтобы граф был плоским, и изучаются некоторые вопросы, связанные с гипотезой о 4 красках. Кроме того, в книге дано пять приложений; первое относится к постановке общей задачи теории игр с полной информацией, а два других дают приложения к транспортной задаче, в четвертом ставится несколько задач, причем надо отметить, что эти задачи далеко не равнозначны по трудности, в пятом в кратком виде излагается метод производящих функций Пойа.

Если рассматривать книгу с точки зрения теории графов, то здесь довольно ясно формулируются те понятия теории графов, на языке которых можно ставить многочисленные задачи в прикладной математике, что же касается систематического изложения самой теории графов, то оно страдает именно этим недостатком. Слишком сильное стремление автора к изложению прикладных задач лишило той стройности и глубины последовательного изложения самой теории графов, которого она заслуживает на современном этапе ее развития. В подтверждение этой оценки заметим, что в книге не изложены вопросы, относящиеся к раскраске карт на поверхности любого рода, вопросы о существовании графов с заданной группой автоморфизмов, теорему Уитни, а один из самых мощных методов — метод производящих функций Пойа — изложен в виде краткого приложения и нигде в основных главах не используется. В книге несколько досадных опечаток и неверно приписываемых теорем.

Р. Е. Кричевский

См. также: 9844, 9993, 10084, 10092.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков

10158. О понятии предела. Пиконе (Sul concetto di limite. Picone Mauro), Ann. mat. pura ed appl., 1958, **46**, 349—367 (итал.; рез. англ.)

В хаусдорфовом топологическом пространстве A вводятся понятия предела и квазипредела по семейству множеств. Если задано семейство $\{X\}$ множеств $X \subset A$, то точка $x_0 \in A$ называется: а) пределом переменной x по семейству $\{X\}$, если каждая окрестность точки x_0 содержит некоторое множество $X \in \{X\}$; б) квазипределом переменной x по семейству $\{X\}$, если каждая окрестность точки x_0 имеет непустое пересечение с каждым $X \in \{X\}$. Если переменная x имеет предел x_0 по семейству $\{X\}$, то она не может иметь по этому семейству квазипредела, отличного от x_0. Таким образом, если переменная x имеет предел и квазипредел по семейству $\{X\}$, то оба они единственны и совпадают. Однако в общем случае возможно наличие многих пределов и многих квазипределов. В то же время, наличие хотя бы двух различных пределов (квазипределов) исключает наличие квазипредела (предела). Множество всех квазипределов по заданному семейству $\{X\}$ совпадает с пересечением замыканий всех множеств из $\{X\}$. Семейство $\{X\}$ называется тканью, если любые два множества из $\{X\}$ имеют непустое пересечение. Предел переменной x по ткани $\{X\}$ непременно будет и квазипределом и потому переменная не может иметь двух различных пределов по заданной ткани.

Формулируется общее условие сходимости Коши. Пусть $\{\Gamma\}$ — система покрытий Γ пространства A с помощью некоторых окрестностей. Совокупность $\{X\}$ множеств $X \subset A$, по определению, удовлетворяет условию Коши относительно системы $\{\Gamma\}$, если для любого $\Gamma \in \{\Gamma\}$ существует множество $X \in \{X\}$, содержащееся в некоторой окрестности из покрытия Γ. Для того чтобы переменная x имела предел по семейству $\{X\}$, необходимо, чтобы это семейство удовлетворяло условию Коши по отношению к любой системе покрытий. Пространство A называется полным относительно системы $\{\Gamma\}$ его покрытий, если для любой ткани $\{X\}$, удовлетворяющей дополнительному условию: пересечение любых двух множеств из $\{X\}$ содержит третье множество из $\{X\}$ (такая ткань называется группой), а также удовлетворяющей условию Коши относительно заданной системы $\{\Gamma\}$, переменная x сходится по данной ткани $\{X\}$.

Пусть на множестве $E \subset A$ задана функция $y = f(x)$ со значениями в хаусдорфовом пространстве B, $\{X\}$ — семейство множеств из A. Точка $y_0 \in B$ называется пределом (квазипределом) функции $f(x)$ по совокупности $\{X\}$, если y_0 — предел (квазипредел) переменной y по семейству $\{f(X)\}$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если $f(x_0)$ есть предел функции $f(x)$ по семейству $\{E \mid I(x_0)\}$, где $I(x_0)$ — всевозможные окрестности точки x_0. Доказывается теорема, называемая общим принципом теории пределов, о возможности перестановки знаков непрерывной функции и предела (квазипредела). Специально рассматривается случай переменной на вещественной оси. Затем даются достаточные условия полноты метрического пространства, составленного из числовых последовательностей. Изучаются функции ограниченной вариации со значениями в метрическом пространстве. Б. З. Вулих

10159. Аддитивные функции в алгебраической теории меры. Бертолини (Le funzioni additive nella teoria algebrica della misura. Bertolini Fernando), Ann. Scuola normale super. Pisa, 1958, **12**, № 1-2, 155—162 (итал.)

Изучается структура кольца неотрицательных и вполне аддитивных функций, дистрибутивных относительно операции дополнения, содержащего нулевой элемент. Р. С. Гутер

10160. Об одном свойстве инвариантной меры. Проценко Д. Ф., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1959, **22**, № 5, 519—520 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1959, **22**, № 5, 519—520 (русск.)

Доказывается теорема: Если μ — конечно-аддитивная и инвариантная относительно движения мера, определенная на всех подмножествах оси (плоскости), то $\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(e_k)\right\}=0$, где нижняя грань берется по всем счетным разбиениям всего пространства на непересекающиеся множества $e_1, e_2, \ldots$.

Л. М. Абрамов

10161. О конструктивном определении меры Хара на локально компактном метрическом пространстве. Пи-Кальеха (Sobre la determinacion constructiva de la medida de Haar en los espacios métricos localmente compactos. Pi Calleja Pedro), Rev. mat. hisp.-amer., 1959, **19**, № 1, 5—17 (исп.)

Некоторые замечания к вопросу о построении меры Хара на локально компактном линейном метрическом пространстве. Л. М. Абрамов

10162. Определение меры линейных точечных множеств. Берг (Maßbestimmung linearer Punktmengen. Berg Lothar), Math. Nachr., 1959, **17**, № 3-6, 211—218 (нем.)

Используя обозначения из предыдущей работы (РЖМат, 1957, 7953), автор доказывает для линейных функций $f(a, \xi)$ следующую теорему: Если M-измеримое множество элементов x из $(0,1]$ таких, что вместе с каждым x каждое принадлежащее ему x_n и каждое допустимое $\varphi(x)$ принадлежат множеству и для каждой допустимой последовательности $\{a_i\}$ $\xi(a_n)\prod_{i=1}^{n} f_1(a_i) \to 0$, то множество M в случае $a^*=a+2$ гомогенно.

Построен пример функции, для которой множество M для различных k имеет различную меру, а также пример функции, для которой M не является гомогенным. М. Д. Калашников

10163. Теория интегрирования. II. Ревю (Théorie de l'intégration (II). Revuz A.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1959, **38**, № 198, 173—181 (франц.)

Продолжение предыдущей статьи (РЖМат, 1960, 2803). При помощи аддитивной меры m на кольце M_0 вводится внешняя мера m^*, методом Каратеодори определяется система M всех измеримых множеств и показывается, что M есть σ-кольцо, содержащее M_0, и что m^* на M σ-аддитивна; отмечается, что m^* является распространением m тогда и только тогда, когда m σ-аддитивна на M_0. Затем обычным способом определяются измеримые функции. Если на данном σ-кольце задана σ-аддитивная мера, то для ограниченных измеримых функций f таких, что множество $E[x;\ f(x)\neq 0]$ имеет конечную меру, можно определить интеграл способом, известным из теории интеграла Римана. Далее намечается путь к обобщению этого интеграла таким образом, чтобы получить известную теорию интеграла Лебега, и без доказательства приводятся соответствующие основные теоремы. J. Mařík

10164. Замечания к одной главе теории интеграла. Янг (Remarks on a chapter of the integral. Young L. C.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1958, **7**, № 1, 48—54 (англ.)

Содержатся замечания к III гл. книги Сакса „Теория интеграла“ (М., Изд-во ин. лит., 1949). В первом заме-

чании вводится внешняя мера γ в метрическом пространстве X при помощи функции множеств g, определенной для всех множеств с достаточно малым диаметром, неотрицательной, неубывающей и равной нулю на пустом множестве. Функцию g автор называет меркой (gauge). Именно, пусть $E \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Положим $\gamma(E, \varepsilon) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} g(E_n)\right\}$, где $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и диаметр $E_n < \varepsilon$ для $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\gamma(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \gamma(E, \varepsilon)$. Мерка g и внешняя мера γ называются типичными, если $g(E) = \inf\{g(U): E \subset U, U$ — открытое множество$\}$. Следующее замечание касается меры Стилтьеса (главным образом ее получения посредством мерки Стилтьеса из неотрицательной аддитивной функции интервала), измеримых множеств и теоремы Лузина. Под фигурой в работе понимается конечная сумма замкнутых интервалов евклидова пространства. Пусть $\Gamma(I)$ — неотрицательная аддитивная функция интервала, определенная для ограниченных интервалов и равная нулю вне фигуры X. Тогда мерка Стилтьеса определяется равенством $g(E) = \inf\{\Gamma(I)\}$, где E принадлежит множеству внутренних точек куба I.

Последнее замечание касается теоремы Фубини. Пусть X — декартово произведение фигур X' и X''. Для $E \subset X$ символами E', E'' обозначим соответственно проекции множества E в X' и X''. Пусть, далее, $E(x'') = \{x': (x', x'') \in E\}$, γ, γ' и γ'' — соответственно меры в X, X' и X'', определенные при помощи мерок g, g' и g'', причем g'' — мерка Стилтьеса в X'', g' — типичная мерка в X' или — более обще — типичная мерка с параметром $t = x'' \in X''$ и g — типичная мерка в X, определенная для $E \subset X$ следующим образом: если g' не зависит от t, то $g(E) = g'(E')\, g''(E'')$ или $g(E) = g'(E')\, \gamma''(E'')$; если g' зависит от t, то $g(E) = \inf\left\{g(U) = \int_{X''} g'(U(x''))\, d\gamma''\right\}$, где $E \subset U$, U — открытое множество. В последнем определении g предполагается, что имеет смысл $\int_{X''} g'(U(x''))\, d\gamma''$ для каждого ограниченного открытого множества U. При этих обозначениях дается следующая формулировка теоремы Фубини:

Пусть $f(x', x'')$ — действительная функция, определенная на X и интегрируемая по γ. Тогда существует такое подмножество $N'' \subset X''$, что $\gamma''(N'') = 0$ и для любого $x'' \in X'' - N''$ функция $f(x', x'')$ интегрируема в X' по γ'. Пусть $F(x'')$ — произвольное продолжение функции $\int_{X'} f(x', x'')\, d\gamma'$ из $X'' - N''$ на X''. Тогда $\int_X f(x', x'')\, d\gamma = \int_{X''} F(x'')\, d\gamma''$.

В работе содержатся еще два следствия, причем второе из них (обозначенное (c)) не совсем ясно. В доказательстве теоремы Фубини имеются ошибки в обозначениях.

L. Mišík

10165. Заметка о функциях, непрерывных почти всюду. **Левин** (A note on functions continuous almost everywhere. Levine Norman), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 9, 791—792 (англ.)

Рассматриваются действительные функции одного действительного переменного. Основной результат: Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для каждого открытого множества O^* полный прообраз $f^{-1}(O^*)$ можно было представить в виде $O + A$, где O — открытое множество, а $mA = 0$.

Устанавливаются условия, при выполнении которых суперпозиция функций, непрерывных почти всюду, непрерывна почти всюду.

А. Я. Дубовицкий

10166. Заметка о формуле Гаусса — Остроградского. **Краль** (Poznámka ke Gauss—Ostrogradského formuli. Král Josef), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 3, 283—292 (чешск.; рез. русск., англ.)

Главный результат статьи можно сформулировать следующим образом: Пусть r — натуральное число. Если $B \subset E_r$ и $C \subset E_{r+1}$, то обозначим через $\lambda(B)$ внешнюю меру Лебега множества B и через $\chi(C)$ — внешнюю r-мерную меру Хаусдорфа множества C. Пусть A — ограниченное множество в E_{r+1}. Обозначим через $\bar{A}$ и A^0 соответственно замыкание и совокупность внутренних точек множества A; положим $H_A = \bar{A} - A^0$. Пусть G — открытое множество в E_r и $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{m+1}(t)]$ — гомеоморфное отображение множества G в множество H_A такое, что множество $C = H_A - \varphi(G)$ замкнуто и $\chi(C) = 0$. Предположим, что $\chi(\varphi(B)) = 0$ для каждого множества $B \subset G$, для которого $\lambda(B) = 0$. Пусть, далее, существует множество $M \subset G$, обладающее следующими свойствами: 1) $\lambda(G - M) = 0$; 2) функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}$ обладают полным дифференциалом в каждой точке $t = [t_1, \ldots, t_m] \in M$, внешнее произведение $w(t)$ векторов $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_m}$ отлично от нуля для $t \in M$ и $\int_G |w(t)|\, dt < \infty$; 3) для каждого $t \in M$ и каждого $\varepsilon > 0$ существуют положительные числа α_1, α_2 такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 < \varepsilon$ и $\varphi(t) - \alpha_1 w(t) \in A_1$, $\varphi(t) + \alpha_2 w(t) \notin A$. Если, наконец, $v(x) = [v_1(x), \ldots, v_{m+1}(x)]$ — такое непрерывное отображение множества $\bar{A}$ в E_{m+1}, что функции $\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}$ непрерывны на A^0 и что существуют интегралы $\int_A \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}\, dx$ $(i = 1, \ldots, m+1)$, то имеет место формула

$$\int_A \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_G v(\varphi(t))\, w(t)\, dt.$$

Теорема, доказанная автором, является в действительности несколько более общей, чем сформулированное выше утверждение.

J. Mařík

10167. Об асимптотической дифференцируемости функций двух действительных переменных. **Шмидов Ф. И.**, Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 213—216

Доказывается новый критерий асимптотической дифференцируемости функций двух переменных (теорема 1).

Устанавливается теорема 2: Пусть $f(x, y)$ — конечная функция, измеримая на ограниченном множестве E; пусть P — подмножество E, в каждой точке которого существует асимптотическая касательная плоскость к $B(f, E)$, параллельная фиксированной прямой h, причем h не параллельна z. Тогда ортогональная проекция $B(f, P)$ на плоскость, перпендикулярную h, имеет плоскую меру нуль.

В работе содержится теорема 3: Множество точек, в которых существует асимптотическая касательная к $B(f, E)$ плоскость, перпендикулярная к плоскости xOy, имеет плоскую меру, равную нулю.

Примечание референта. Доказательство теоремы 3 некорректно.

А. Я. Дубовицкий

Примечание редакции. Но сама теорема, как сообщил автор статьи, верна.

10168. Об одном характеристическом признаке слабой сходимости последовательности монотонных функций. **Бобров А. А.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 14—25

Работа является развитием прежней работы автора (РЖМат, 1958, 8707). Доказывается несколько теорем,

в которых даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы последовательность монотонных и равномерно ограниченных функций $\varphi_n(t)$ сходилась в основном на некотором интервале (a, b). Эти теоремы позволяют доказать две теоремы о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости последовательности монотонных функций $\varphi_n(t)$ к некоторой ограниченной функции $\varphi(t)$. Непосредственным следствием последних теорем являются теоремы об условиях слабой непрерывности функции $\varphi(t, \lambda)$ по параметру λ. Я. Б. Рутицкий

10169. Представление вполне выпуклых функций. Боас (Representations for completely convex functions. Boas R. P., Jr), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 3, 709—714 (англ.)

Устанавливается, что функция $f(x)$, заданная на $[0, 1]$, бесконечно дифференцируема и обладает свойством $(-1)^n f^{(2n)}(x) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = \sin \pi x \left\{ c + \int_0^\infty \varphi(t) [\operatorname{ch} \pi t + \cos \pi x]^{-1} dt + \right.$ $\left. + \int_0^\infty \psi(t) [\operatorname{ch} \pi t - \cos \pi x]^{-1} dt \right\}$, где $c \geqslant 0$, а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — четные целые функции степени π, у которых все производные в нуле неотрицательны. А. Ф. Тиман

10170. Приближение ограниченных функций с помощью разностей ограниченных полунепрерывных сверху функций. Грушин В. В., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 5, 31—33

Назовем множества A и B отделимыми, если существует множество $H = F_1 - F_2 + F_3 - \ldots - F_{2n}$ (все F_i — замкнутые множества и $F_k \supseteq F_{k+1}$) такое, что $A \subseteq H$, а $B \subseteq CH$. Доказывается, что ограниченную функцию φ можно приблизить с любой степенью точности разностью двух ограниченных полунепрерывных сверху функций тогда и только тогда, когда для любых a и b $(a > b)$ множества $E(\varphi \geqslant a)$ и $E(\varphi \leqslant b)$ отделимы. Г. Х. Синдаловский

10171. О частично равномерной сходимости. Аринь Э. И., Зандер М. К., LatvPSR Zinātņu Acad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1959, № 6, 75—82

Действительная функция, заданная в метрическом пространстве, называется частично непрерывной относительно системы множеств $\mathfrak{M}$, если она непрерывна на каждом множестве $M \in \mathfrak{M}$ (относительно множества M). Последовательность $\{f_n(x)\}$ функций называется сходящейся частично равномерно относительно $\mathfrak{M}$, если она равномерно сходится на каждом $M \in \mathfrak{M}$. Доказывается следующая теорема:

Если в компактном метрическом пространстве задана система $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая определенным условиям, и частично непрерывная относительно $\mathfrak{M}$ функция $f(x)$, то существует последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций, частично равномерно сходящаяся (относительно $\mathfrak{M}$) к $f(x)$.

Этот результат уточняет и обобщает теорему Бэра о том, что непрерывная по каждому действительному переменному функция $f(x, y)$ является функцией первого класса бэровской классификации, а также одну теорему Э. И. Аринь. Г. Х. Синдаловский

10172. Лебегова площадь образов хаусдорфовых пространств. Вильямс (Lebesgue area of maps from Hausdorff spaces. Williams R. F.), Acta math., 1959, **102**, № 1-2, 33—46 (англ.)

Пусть X — компактное m-мерное хаусдорфово пространство и $f(x)$ — отображение X в евклидово пространство E^n. Пара (f, X) называется поверхностью. Вводятся два определения m-мерной площади поверхности (f, X), аналогичные классическому определению Лебега площади кривой поверхности. Рассмотрены некоторые свойства введенных площадей. А. Я. Дубовицкий

10173. Методы гладкости для контуров. Чезари, Фуллертон (Smoothing methods for contours. Cesari L., Fullerton R. E.), Illinois J. Math., 1957, **1**, № 3, 395—405 (англ.)

Пусть T — отображение плоской односвязной жордановой области J в E_3 и f — действительная функция, определенная на E_3. Паре T, f и значению t ставится в соответствие множество $k(t)$, называемое контуром, которое определяется следующим образом. Для некоторого t, $-\infty < t < \infty$, положим $D^-(t) = \{w \in J \mid f(T(w)) < t\}$ и $C(t)$ — множество тех w, для которых $f(T(w)) = t$. Пусть $\{\alpha\}$ — семейство всех компонент $D^-(t)$ и для каждого α $\{\gamma\}_\alpha$ — семейство всех компонент $\gamma - \alpha \subset C$. Контур $k(t)$ есть объединение всех γ для каждого $\alpha \in \{\alpha\}$. Изучаются свойства и гладкость контуров в различных предположениях и использование их свойств в теории поверхностей. Р. С. Гутер

10174 К. Некоторые вопросы сходимости многомерных сингулярных интегралов. Гаврилюк В. Т. Киев, АН УССР, 1958, 50 стр., илл., 1 р. 50 к.

Книга состоит из введения, двух глав и списка литературы (52 назв.). Во введении дается краткий перечень известных результатов (в основном без формулировок) о сходимости сингулярных интегралов. Гл. I (8 параграфов) посвящена установлению необходимых и достаточных условий сходимости многомерных сингулярных интегралов для функций, суммируемых с p-й степенью $(p \geqslant 1)$ на ограниченном m-мерном множестве положительной меры (предел по направленным последовательностям в смысле Мура—Смита—Шатуновского), в тех точках, которые являются как точками Лебега функции (соответствующего порядка p), так и внутренними точками или точками плотности множества. В частности, теорема Д. К. Фадеева о сходимости сингулярных интегралов обобщается на функции многих переменных. Гл. 2 (3 параграфа) посвящена изучению (с применением результатов первой главы) сходимости сингулярных многомерных (повторных) интегралов Пуассона и Фейера для суммируемых функций во всех их точках Лебега. Устанавливается отрицательный результат для обоих интегралов. И. А. Эзрохи

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

10175. О сходящихся к нулю подпоследовательностях частных сумм тригонометрического ряда. Бари Н. К., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 3, 482—483

Обозначим через $S_n(x)$ n-ю частную сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 > 0. \qquad (1)$$

В работе изучается вопрос о том, какой должна быть последовательность номеров $n_1 < n_2 < \ldots$ для того, чтобы существовал тригонометрический ряд указанного вида, обладающий свойством

$$\lim_{k \to \infty} S_{n_k}(x) = 0 \qquad (*)$$

для всех x. Получена следующая теорема:

Теорема. Пусть $g(k) \uparrow \infty$, но в остальном произвольна. Существует тригонометрический ряд (1), для которого $S_{n_k}(x) \to 0$ всюду при $k \to \infty$, и притом равномерно на $[\delta, \pi]$ при любом $\delta > 0$, тогда как $n_{k+1}/n_k \leqslant g(k)$ для $k \geqslant k_0$, где k_0 не зависит от δ.

Высказывается предположение, что для существования ряда, обладающего свойством (2), необходимо выполнение условия $n_{k+1}/n_k \to \infty$ при $k \to \infty$. И. Е. Гопенгауз

10176. О равномерной сходимости некоторых тригонометрических рядов вблизи нуля. Томич (О униформној конвергенцији неких тригонометриских редова у близини нуле. Томић М.), Зб. радова. Српска АН, 1959, кн. 63, 135—147 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Доказываются две теоремы:

1. Пусть $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x$ — ряд Фурье нечетной, ограниченной на (ε, π) функции $g^*(x) \in L(0, \pi)$. Если $g^*(t) = o\left(\frac{1}{t \lg t}\right)(t \to 0)$, то $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} b_\nu \sin \nu x \to 0$ при $x \to 0$ равномерно относительно n.

2. Пусть $a_0/2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$ $(a_\nu \geqslant 0)$ — ряд Фурье четной функции $g(x) \in L(0, \pi)$, имеющей в правой окрестности нуля монотонно убывающую интегрируемую мажоранту. Пусть, далее, $\lambda_\nu \downarrow 0$, $\Delta^2 \lambda_\nu \geqslant 0$ и сумма ряда

$$\frac{\lambda_0 x}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\nu} \sin \nu x \qquad (1)$$

является выпуклой функцией вблизи нуля. Тогда ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu$ будет сходиться, если

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\right) \int_0^{\pi/n} |g(t)|\, dt = O(1).$$

В этой теореме условие выпуклости суммы ряда (1 можно заменить на $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1} \lambda_\nu < \infty$. В частности, для ограниченной $g(t)$ (тогда можно взять $\lambda_\nu \equiv 1$) получаем $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu < \infty$ — результат Пейли. А. А. Шнейдер

10177. К построению рядов Фурье с усиленной сходимостью для функций, определенных в заданном промежутке. Гуревич С. Г., Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1959, вып. 37, 272—277

Выводятся формулы, упрощающие разложение функции (определенной в заданном промежутке) в ряд Фурье с коэффициентами, имеющими высокий порядок малости (Малиев А. С., Изв. АН СССР, 1932, 1437; 1933, 1113). Ш. Е. Микеладзе

10178. Средние коэффициентов Фурье. Голдберг (Averages of Fourier coefficients. Goldberg Richard R.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 3, 695—699 (англ.)

Последовательность $\{a_n\}$ называется p-последовательностью $(1 \leqslant p < \infty)$, если существует $f \in L_p$ такая, что $a_n = \int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Устанавливается теорема:

Теорема 1. Пусть $\psi(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 1]$ и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда, если $\{a_n\}$ есть p-последовательность, то $b_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \psi\left(\frac{m}{n}\right) a_m$ есть также p-последовательность.

Доказывается также теорема 2, формулировка которой получается из теоремы 1 заменой $\cos nt$ на $\sin nt$. В случае $\psi(x) = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ теорема 1 была доказана Харди (Hardy G. H., Messenger Math., 1929, **58**, 50—52). Н. К. Бари

10179. Замечания о процессах суммирования рядов Фурье периодических функций с ограниченным изменением. Фавар (Remarques sur les precédés de sommation des séries de Fourier des fonctions périodiques à variation bornée. Favard J.), Colloq. théorie suites. Bruxelles, 1957. Paris—Louvain, 1958, 54—59 (франц.)

Замечания к работе автора (РЖМат, 1960, 5120). Дается подробное доказательство одной из сформулированных там теорем. Ф. И. Харшиладзе

10180. Ряды Фурье. XV. Явление Гиббса. Исигуро (Fourier series. XV. Gibbs' phenomenon. Ishiguro Kazuo), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 3, 119—123 (англ.)

Устанавливается следующая теорема. Пусть $f(x) = a\psi(x - \xi) + g(x)$, где $\psi(x)$ — периодическая периода 2π функция, равная $(\pi - x)/2$ на интервале $(0, 2\pi)$, а $\lim_{x \downarrow \xi} g(x) = \lim_{x \uparrow \xi} g(x) = 0$, $\lim_{x \downarrow \xi} g(x) \geqslant -a\pi$, $\lim_{x \uparrow \xi} g(x) \leqslant a\pi$, $\int_0^x g(\xi + u)\, du = o(|x|)$ и $\int_0^x \{g(t + u) - g(t - u)\}\, du = o(|x|)$ равномерно по t в окрестности точки ξ. Тогда существует положительное число $r_0 < 1$ такое, что для чезаровских средних (C, r) при $r < r_0$ явление Гиббса имеет место, а при $r > r_0$ нет. Значение r_0 совпадает с константой Крамера (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., ГОНТИ, 1939, 184). А. Ф. Тиман

10181. Об абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье функций из лебеговского класса L_p и некоторых связанных с нею задачах в теории констант Фурье. Пати (On the absolute Cesaro summability of Fourier series of functions of Lebesgue class L_p and some related problems in the theory of Fourier constants. Pati T.), Ann. mat. pura ed appl., 1959, **47**, 181—195 (англ.)

Если $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p \leqslant 2$, $\alpha > p - 1$, $k > \pi$ и

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|^p}{t} \left(\ln \frac{k}{t}\right)^{\alpha} dt < \infty,$$

где $\varphi(t) = \frac{1}{2}\{f(x + t) - 2f(x) + f(x - t)\}$, то при любом $\delta > 1/p$

$$\sum n^{-\delta} \left| \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^{\delta}} \sin\left\{\left(n + \frac{\delta}{2}\right)t - \frac{1}{2}(\delta - 1)\pi\right\} dt \right| < \infty.$$

Рассматриваются также функции $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, аналитические в круге $|z| < 1$, для которых при данных $\delta > 1/p$, $\chi > 1/q$ и $k > \pi$ $f(e^{it}) t^{\delta - \frac{1}{p}} \left(\ln \frac{k}{|t|}\right)^{\chi} \in L_p(-\pi, \pi)$ $(1 < p \leqslant 2)$, и устанавливается, что для них всегда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} |c_n| < \infty$. Это утверждение теряет силу при $\delta = 1/p$. Аналогичная теорема доказана для рядов Фурье. А. Ф. Тиман

10182. О суммируемости по Риссу рядов Фурье. II. Канно (On the Riesz summability of Fourier series (II). Kanno Kôsi), Ямагата дайгаку киё, сидзэн кагаку, Bull. Yamagata Univ. (Natur. Sci.), 1958, **4**, № 3, 323—331 (англ.; рез. японск.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 8551.

Для четной интегрируемой функции $\varphi(t)$ с периодом 2π доказывается следующая теорема:

Пусть $\mu(x)$ удовлетворяет условиям: 1) $\mu(x)$ слабо возрастает и сколь угодно раз дифференцируема, 2) $\mu(x^\lambda) = O(\mu(x))$ при $x \to \infty$ для любого λ, 3) $\exp\{\varepsilon \mu(x) \log x\} |\mu^{(n)}(x)|$ $(\varepsilon > 0)$ не убывает и $\mu^{(n)}(x) = o(\mu(x)/x^n \log x)$ при $x \to \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если $\frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^t (t - u)^{k-1} \varphi(u)\, du = o\left\{t/\mu\left(\frac{1}{t}\right)\right\}$ при $t \to 0$ $(k > 0)$, то ряд Фурье функции $\varphi(t)$ суммируется методом $(R, \exp\{\mu(\omega) \log \omega\}, \tau)$ к нулю при $t = 0$, когда $0 < k < \tau$.

При $\mu(x) \equiv \text{const}$ это результат Бозанке, а при $\mu(x) = (\log x)^{\Delta}$, $\Delta > 0$, — Мацумото. А. А. Шнейдер

10183. О суммируемости по Риссу рядов Фурье. Сиоути (On the Riesz summability of Fourier series. Sunouchi Gen-ichirô), Tôhoku Math. J., 1959, **11**, № 2, 321—326 (англ.)

Доказываются следующие теоремы о суммируемости ряда Фурье

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

функции $f(x) \in L(0, 2\pi)$:

1. Если $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log(\log n) < \infty$, то ряд (1) суммируется методом $(R, \exp(\log n)^{\alpha}, \delta)$ почти всюду при $1 < \alpha < \infty$, $\delta > 0$.

2. Если $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) (\log n)^{\alpha} < \infty$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, то ряд (1) суммируется $(R, \exp\{\exp(\log n)^{\alpha}\}, \delta)$ почти всюду при $\delta > 0$.

Теорема 1 усиливает один результат Вана. Теорема 2 при $\alpha = 1$ совпадает с результатом Колмогорова — Селиверстова — Плеснера, так как (R, e^n, δ)-суммируемость эквивалентна сходимости.

Доказательство обеих теорем вытекает из оценок констант Лебега для метода суммирования Рисса, данных Мацумото, и следующего предложения: Если $w(n)$ — константы Лебега для метода $(R, \lambda_n, 1)$ относительно ортогонального разложения

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad (2)$$

то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(n)$ влечет $(R, \lambda_n, 1)$-суммируемость ряда (2) почти всюду. А. А. Шнейдер

10184. Об абсолютной гармонической суммируемости одного ряда, связанного с рядом Фурье. Варшни (On the absolute harmonic summability of a series related to a Fourier series. Varshney O. P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 5, 784—789 (англ.)

Пусть $f(t) \in L(-\pi, \pi)$ имеет период 2π,

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t).$$

Доказывается теорема: Если функция $\varphi(t) = \{f(x+t) + f(x-t)\}/2$ имеет ограниченную вариацию на $(0, \pi)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)/\log(n+1)$ абсолютно суммируется методом средних гармонических. А. А. Шнейдер

10185. Об одной последовательности коэффициентов Фурье. Варшни (On a sequence of Fourier coefficients. Varshney O. P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 5, 790—795 (англ.)

Через $(N, 1/(n+1)) \cdot C_1$ обозначается метод суммирования, состоящий в применении метода средних гармонических к средним арифметическим первого порядка.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$ — ряд, сопряженный к ряду Фурье функции $f(t) \in L(-\pi, \pi)$ с периодом 2π. Положим $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$. Доказывается теорема: Если

$$\int_0^t |\psi(t)|\, dt = o\{t/\log t^{-1}\}, \qquad (1)$$

то последовательность $\{nB_n(x)\}$ суммируется методом $(N, 1/(n+1)) \cdot C_1$ к l/π.

Применяя тауберову теорему Айенгара для гармонического суммирования, автор получает результат: Если выполняется условие (1), а a_n и b_n равны $O(n^{-\delta})$, $0 < \delta < 1$, то последовательность $\{nB_n(x)\}$ суммируется $(C, 1)$. Применением второй тауберовой теоремы отсюда получается признак Харди и Литлвуда сходимости сопряженного ряда. А. А. Шнейдер

10186. Сопряженные ряды для нескольких переменных. Хелсон (Conjugate series in several variables. Helson Henry), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 2, 513—523 (англ.)

Пусть $f(x, y)$ — суммируемая функция на двумерном торе с рядом Фурье $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{i(mx+ny)}$. Определим сопряженный ряд и сопряженную функцию соответствием

$$\tilde{f}(x, y) \sim \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} -a_{mn} \operatorname{sgn}(mn)\, e^{i(mx+ny)} \quad (\operatorname{sgn} 0 = 0).$$

Применяя дважды неравенство для сопряженных функций от одной переменной, получим

$$\int |\tilde{f}|\, d\sigma \leqslant A \int |f| (\lg^+ |f|)^2\, d\sigma + B. \qquad (1)$$

В этом неравенстве A, B — постоянные, не зависящие от f, $d\sigma$ — инвариантная мера на торе. Доказывается, что в неравенстве (1) показатель 2 не может быть заменен показателем $2 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Имеются также более общие результаты, относящиеся к определению сопряженного ряда для случая компактной абелевой группы, а также оценки соответствующих сопряженных функций. Б. М. Левитан

10187. О невозможности построения линейного полиномиального оператора, дающего приближение порядка наилучшего. Берман Д. Л., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 141—142

Доказывается теорема о том, что не существует последовательности линейных операторов V_n, действующих в пространстве $C[-1, 1]$, для которых при любой $f \in C$ $V_n f$ есть полином степени $\leqslant n$ и $\|f - V_n f\| = O(E_n(f))$, где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f полиномами степени $\leqslant n$. В замечании 3 к теореме указываются для произвольных функциональных нормированных пространств на языке сумм Фурье необходимые и достаточные условия для существования последовательности операторов V_n, аналогичной определенной выше.

Примечание референта. Доказанная теорема для $C[-1, 1]$ эквивалентна теореме С. М. Лозинского и Ф. И. Харшиладзе (Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М. — Л., 1949, стр. 678). А. С. Маркус

10188. О некоторых вопросах теории приближения функций в пространствах $C[a, b]$ и $L^{(s)}[a, b]$. Ценов И. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 184—197

Пусть функции $f, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ принадлежат $L_s[a, b]$, $s > 1$. В предположении, что $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы, устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы полином вида $a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$ осуществлял в метрике $L_s[a, b]$, $s > 1$, наилучшее приближение функции f. Случай $s = 1$ исследован С. М. Никольским (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, 10). Если f непрерывна, а $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ образуют систему Чебышева, то полином, дающий в метрике $L_s[a, b]$, $s > 1$, наилучшее приближение функции f, совпадает с ней не менее чем в $n+1$ точках отрезка $[a, b]$. Доказывается, что если f и φ — функции, имеющие непрерывные на $[a, b]$ производные порядка $n+1$, и $\varphi^{(n+1)}(x) > 0$ на $[a, b]$, то найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$I_n^{(s)}(f)/I_n^{(s)}(\varphi) = |f^{(n+1)}(\xi)|/\varphi^{(n+1)}(\xi),$$

где $I_n^{(s)}(f)$ и $I_n^{(s)}(\varphi)$ — наилучшие приближения в метрике $L_s[a, b]$, $s > 1$, функций f и φ посредством алгебраических многочленов степени n. Соответствующий результат в метрике $C[a, b]$ был получен Шохатом (Shohat J., Duke Math. J., 1941, **8**, № 1). В. С. Виденский

10189. О мере множества точек максимального уклонения. Брудный Ю. А., Голенгауз И. Е., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1960, **24**, № 1, 129—144

Дается подробное изложение результатов работы авторов (РЖМат, 1958, 1974). Из других результатов, содержащихся в реферируемой статье, приведем теорему 3: В случае равномерных наилучших приближений алгебраическими (тригонометрическими) многочленами существует бесконечно дифференцируемая на $[a, b]$ функция $f(x)$, у которой $\operatorname{mes} M_n(f) > 0$ для бесконечной последовательности номеров n. Определение $M_n(f)$ см. РЖМат, 1958, 1974.

10190. Полиномы наилучшего приближения на сегменте. Уолш, Моцкин (Polynomials of best approximation on an interval. Walsh J. L., Motzkin T. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 10, 1523—1528 (англ.)

Рассматриваются свойства разности $f(x) - p_n(x)$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на сегменте E, а $p_n(x)$ — ее наилучший полином в смысле метрики пространства L_E^p. В доказательствах использовано понятие полинома, сопоставленного с данной функцией на данном множестве, введенное авторами ранее (РЖМат, 1958, 3656). Отмечается, что некоторые результаты были получены ранее Джексоном, но что новые доказательства значительно проще. S. Paszkowski

10191. О приближении полиномами Бернштейна. Сиккема (Über die Approximation mit Bernstein-Polynomen. Sikkema P. C.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 394—395 (нем.)

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[0,1]$, $\omega(\delta)$ — ее модуль непрерывности; $B_n(x)$ — полином Бернштейна. Лоренцем (РЖМат, 1955, 166К) были установлены неравенства $\|f - B_n\|_C \leqslant K\omega(n^{-1/2})$ $(1 \leqslant K \leqslant 1{,}25)$. В работе для K указаны неравенства: $1 \leqslant K \leqslant 1{,}093785$. Отмечается также, что в соотношении

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|f - B_n\|_C}{\omega(n^{-1/2})} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

данном Поповичем (Popoviciu T., Mathematica (Cluj), 1935, **10**, 49 — 54), правую часть можно заменить числом $1 + \frac{1}{e^2\sqrt{2\pi}}$. Доказательства не приводятся.

И. Г. Соколов

10192. Асимптотическая оценка остатка при приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, интерполяционными суммами Бернштейна. Корнейчук Н. П., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1959, № 1, 38—41

Пусть $\widetilde{S}_n(f; x)$ — интерполяционный тригонометрический полином порядка n с равноотстоящими узлами $x_k^{(n)}$: $x_k^{(n)} = kh_n$, $h_n = 2\pi/(2n+1)$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots, \pm n)$ для функции f в точке x. Рассматриваются уклонения интерполяционных полиномов Бернштейна $\widetilde{B}_n(f; x) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{S}_n(f; x+h_n) + \widetilde{S}_n(f; x-h_n)\right]$ от функции f в точке x и дается асимптотическое выражение величины $E_n(\widetilde{B}; H^{(\alpha)}; x) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}} |f(x) - \widetilde{B}_n(f; x)|$ для $n \to \infty$, где $H^{(\alpha)}$ — класс функций периода 2π, удовлетворяющих условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ с константой 1. И. Г. Соколов

10193. О римановых суммах для интегралов от модулей некоторых тригонометрических полиномов. Ганзбург И. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 47—48

См. реф. 10194.

10194. О римановых суммах для интегралов от модулей некоторых тригонометрических полиномов. Ганзбург, И. М., Тиман А. Ф., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 3, 123—128

Пусть $K_n(t) = \lambda_0^{(n)}/2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt$, $n = 0, 1, \ldots$, где строки треугольной матрицы $\|\lambda_k^{(n)}\|$ представляют собой выпуклые или вогнутые системы чисел, причем $|\lambda_k^{(n)}| \leqslant A + B|\lambda_0^{(n)}|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где A, B — положительные постоянные. Положим

$$\sigma_n^r(x, \lambda) = \frac{2}{\pi r}\sum_{\nu=1}^{r} |K_n(x - t_\nu)|,$$

где $t_\nu = 2\nu\pi/r$, $\nu = 0, 1, \ldots, r$.

Доказывается: Если $r/(2n+1)$ — целое число, то при $n \to \infty$

$$\sigma_n^r(x, \lambda) = \frac{2(2n+1)}{r\pi}\operatorname{cosec}\frac{\pi(2n+1)}{2r}\left|\cos\left\{\frac{(2n+1)\pi}{r}\left(\frac{1}{2} + \left[\frac{rx}{2\pi}\right] - \frac{rx}{2\pi}\right)\right\}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\right| + O\left(A + B|\lambda_0^{(n)}|\right),$$

где последнее слагаемое — величина, равномерно ограниченная относительно n, x и отношения $r/(2n+1)$.

М. Д. Калашников

10195. Приближение полиномами непрерывных функций, определенных на $(-\infty, \infty)$. Сюй Ли-чжи (The polynomial approximation of continuous functions defined on $(-\infty, \infty)$. Hsu L. C.), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 4, 574—578 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается следующее обобщение полиномов Ландау: $L_n(f; x) = \sqrt{n/\pi}\int_{-1}^{1} f(n^\theta t)[1 - (t - n^{-\theta}x)^2]^n\, dt$, где $0 < \theta < 1/2$.

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна и ограничена на всей оси, то равномерно в каждом конечном интервале $\lim_{n\to\infty} L_n(f; x) = f(x)$. И. Г. Соколов

10196. О наилучших приближениях аналитических функций двух переменных. Юй Цзя-юн, Ухань дасюэ цзыжань кэсюэ сюэбао, Wuhan daxue ziran kexue xuebao, 1959, № 4, 39—46 (кит.)

Обобщается на функции двух переменных теорема С. Н. Бернштейна о приближении полиномами аналитической функции одной переменной.

Пусть $f(x, y)$ — функция, непрерывная в прямоугольнике $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$, а $E_n(f)$ — ее наилучшее приближение полиномами степени k по x и l по y, причем $k + l \leqslant n$.

Пусть $\overline{D}_x$ — замкнутая область комплексной z-плоскости, ограниченная эллипсом с фокусами в точках ± 1 и полусуммой осей $R > 1$, а $\overline{D}_y$ — аналогичная область комплексной w-плоскости. Тогда справедливы теоремы:

1. Если $f(x, y)$ аналитична в области $\overline{D}_x \times \overline{D}_y$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f)} \leqslant R^{-1}$

2. Если $f(x, y)$ аналитична в прямоугольнике

$-1 \leqslant x, y \leqslant 1$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_n(f)} \leqslant R^{-2}$, то $f(x,y)$ можно аналитически продолжить в область $D_x \times D_y$.

Кроме того, приведены аналогичные теоремы для приближений $E_{nm}(f)$ полиномами степени n по x и m по y.

Отметим более сильный результат Н. А. Сапогова (РЖМат, 1957, 381) и примыкающие к этой статье работы М. И. Морозова (РЖМат, 1957, 6277) и М. К. Потапова (РЖМат, 1960, 5135).

Примечание редакции. Реферат составлен на основании рефератов Ши Чжун-цы и М. К. Потапова.

10197. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем чем период. Виденский В. С., Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 1, 13—16

Пусть $s_n(\theta)$ — тригонометрический полином порядка n и $|s_n(\theta)| \leqslant 1$, $-\omega \leqslant \theta \leqslant \omega$, $0 < \omega < \pi$. Тогда:

1) $$|s_n'(\theta)| \leqslant n \cdot \cos\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}, \quad -\omega < \theta < \omega;$$

2) $$|s_n'(\theta)| \leqslant 2 \cdot n^2 \operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}, \quad -\omega \leqslant \theta \leqslant \omega \text{ при}$$

$$\left[1 + 3\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right]^{1/2} < 2n.$$

Равенство в 1) достигается только для полиномов $s_n(\theta) = \gamma t_n(\theta)$, $|\gamma| = 1$, в $2n$ точках, являющихся нулями $t_n(\theta) = \cos 2n \arccos \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$ на $[-\omega, \omega]$, в 2) — для тех же полиномов, но только в точках $\theta = \pm\omega$.

Неравенства 1) и 2) аналогичны неравенствам С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова для алгебраических многочленов. Кроме того, 1) уточняет результат И. И. Привалова (Интеграл Коши, Саратов, 1919), 2) — оценку Джексона (Jackson D., Bull. Amer. Math. Soc., 1931, **37**, 883). Г. К. Лебедь

10198. Функционал первой производной и уточнение теоремы А. А. Маркова. Вороновская Е. В., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 6, 951—962

Для производной полинома во внутренних точках ξ интервала $[a, b]$ строится точная мажоранта $N(\xi)$, являющаяся нормой линейного функционала $F_\xi(P_n) = P_n'(\xi)$. Изучаются свойства нормы и экстремального полинома этого функционала, для чего привлекается аппарат, разработанный автором в ранее опубликованных статьях (РЖМат, 1956, 2119, 2120, 2127; 1958, 9726).

С. И. Зуховицкий

10199. Экстремальные тригонометрические полиномы и их приложения. Вороновская Е. В., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 1, 12—15

Полином $\tau_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$ называется экстремальным, если $\max|\tau_n(\theta)| = 1$ и число его точек отклонения достаточно велико; при $b_k = 0$ получим полином $C_n(\theta)$, а при $a_k = 0$ — полином $S_n(\theta)$. Автор применяет свои результаты по экстремальным полиномам (РЖМат, 1956, 2119, 2120, 2127, 8716 и др.) к построению полиномов $C_n(\theta)$ и $S_n(\theta)$ и пользуется ими при рассмотрении задачи отыскания полинома $C_n(\theta)$, наименее уклоняющегося от заданного полинома $\sum_{k=m+1}^{n} A_k \cos k\theta$, и полинома $S_n(\theta)$, наименее уклоняющегося от полинома $\sum_{k=m+1}^{n} B_k \sin k\theta$. Рассматривается также случай, когда коэффициенты приближающего полинома удовлетворяют некоторой линейной зависимости.

С. И. Зуховицкий

10200. Об одном классе регулярно монотонных полиномов. Файншмидт В. Л., Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 5, 994—996

Рассматриваются полиномы $P_m(x)$ степени m, все производные которых не изменяют знака на отрезке $[0,1]$, причем количества производных, имеющих одинаковые или прямо противоположные знаки на этом отрезке, подчинены определенной закономерности; находится полином этого класса, наименее уклоняющийся от нуля на этом отрезке, если задан ряд старших коэффициентов или один коэффициент этого полинома.

Я. Л. Геронимус

См. также: 9994, 10495, 10496, 10506, 10508, 10525, 11085.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

10201. Замечания об обратных тригонометрических и гиперболических функциях комплексного переменного. Пеннизи, Шеблум (Remarks on the inverse trigonometric and hyperbolic functions of a complex variable. Pennisi L., Sjoblom L.), Math. Mag., 1959, **33**, № 1, 39—42 (англ.)

Несколько подробнее, чем это делается обычно в курсах теории функций комплексного переменного, излагаются свойства в комплексной области обратных тригонометрических и гиперболических функций (ср. Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, М., 1944, стр. 437—441). Г. Ц. Тумаркин

10202. О некотором типе комплексного интеграла. Аспейтия (On a certain type of complex integral. Azpeitia A. G.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 345, 181—182 (англ.)

Рассматриваются интегралы типа $F[\gamma] = \int_\gamma g(z)f'(z)dz$, где $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в связной области Ω, а γ — любая замкнутая кривая в Ω. Доказывается, что $F[\gamma]$ действительна для всех $\gamma \subset \Omega$ тогда и только тогда, когда функции $f(z)$ и $g(z)$ связаны тождеством вида $g(z) \equiv af(z) + m + ni$, где a, m, n — действительные числа. Аналогично, $F[\gamma]$ мнимая тогда и только тогда, когда выполнено $g(z) \equiv bf(z) + p + qi$ для некоторых действительных чисел b, p, q.

Наконец, для того чтобы $F[\gamma] \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна из функций $f(z)$ и $g(z)$ была константой. В. К. Захаров

10203. О некоторых бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, разрешаемых в замкнутой форме. Хайруллин И. Х., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 5, 795—798

Исследуются бесконечные системы линейных уравнений вида

$$x_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}x_k = d_n \quad (n < 0),$$

$$x_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n,k} x_k = d_n \quad (0 \leqslant n \leqslant p-1),$$

$$x_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k} x_k = d_n \quad (n \geqslant p).$$

Воспользовавшись известными свойствами преобразований Лорана (функция $A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ называется преобразованием Лорана последовательности $\{a_n\}$) и накладывая некоторые ограничения на коэффициенты системы, автор сводит ее решения к краевой задаче Римана (в простейшем случае получается задача Римана для круга, в более сложном — для кольца). Зная решение задачи Римана, можно найти функцию $X(z)$, являющуюся преобразованием Лорана последовательности $\{x_n\}$. Аналогично изучаются системы более общего вида.

Примечание референта. В отношении наименования краевых задач автор придерживается книги Гахова Ф. О., Краевые задачи, Физматгиз, М., 1958.

И. Г. Араманович

10204. Относительно теоремы Палея о лакунарных степенных рядах. Вейсс (Concerning a theorem of Paley on lacunary power series. Weiss Mary), Acta math., 1959, 102, № 3-4, 225—238 (англ.)

Доказана теорема: Если коэффициенты лакунарного степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k}$ $(n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1)$ удовлетворяют условиям: $c_k \to 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \infty$, то для любого комплексного числа ζ найдется на единичной окружности такая точка ξ, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^{n_k}$ сходится к ζ.

Эта теорема была сформулирована Палеем, но не была им строго доказана.

Н. А. Давыдов

10205. О свойствах последовательностей линейных агрегатов, образованных из полиномов Якоби, и их применении к вопросу о полноте системы полиномов Якоби. Леонтьев А. Ф., Изв. АН СССР, 1959, 23, 565—594

Известно, что полиномы Якоби $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$Dy \equiv (1-z^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)z]y' = -\nu(\nu+\alpha+\beta+1)y, \quad (1)$$

где α и β — действительные параметры, ν — целое положительное число. Автором доказано (РЖМат, 1959, 3690), что из равномерной сходимости последовательности линейных агрегатов, образованных из полиномов Якоби,

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj} P_{\nu_j}^{(\alpha,\beta)}(z), \quad (2)$$

где $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\nu_k} = 0$, следует, что область существования предельной функции есть внутренность некоторого эллипса с фокусами в точках ± 1.

Доказательство этого утверждения основано на рассмотрении оператора бесконечного порядка

$$N(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k y, \quad (3)$$

где D — левая часть уравнения (1) и $D^k = D(D^{k-1})$.

В настоящей работе автору удалось получить новое интегральное представление для оператора $N(y)$, благодаря ему стало возможным достичь более сильных результатов. Используя тот факт, что это представление имеет смысл в более широкой области, чем представление (3) в форме ряда, автор доказывает следующий результат:

Теорема 2. Решение $y(z)$ уравнения $N(y) = 0$ есть сумма решения $\sum_{j=1}^{\infty} a_j P_{\nu_j}(z)$, регулярного внутри некоторого эллипса γ_1 (с фокусами в ± 1) и решения $\sum_{j=1}^{\infty} b_j Q_{\nu_j}(z)$, регулярного вне некоторого эллипса γ_2 (также с фокусами в ± 1). В итоге решение $y(z) = \lim_{n\to\infty} \sum [a_{nj} P_{\nu_j}(z) + b_{nj} Q_{\nu_j}(z)]$ регулярно в кольце между γ_1 и γ_2. Напомним, что $Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$ есть второе решение уравнения (1), линейно независимое от $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$. Из этой теоремы вытекает основная теорема относительно последовательности агрегатов из полиномов Якоби

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} [a_{nj} P_{\nu_j}(z) + b_{nj} Q_{\nu_j}(z)] \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (4)$$

о которой известно лишь, что она равномерно сходится в некоторой области G, содержащей дугу эллипса l, причем $\lim_{k\to\infty} k/\nu_k = \tau$, а дуга l такова, что при конформном отображении внешности отрезка $[-1, +1]$ на внешность единичного круга переходит в дугу окружности с центром в начале раствора $2\pi\tau$.

Теорема 4. Если последовательность (4) равномерно сходится в области G, содержащей дугу эллипса l, то она равномерно сходится внутри некоторого кольца, ограниченного эллипсами γ_1 и γ_2 с фокусами в точках ± 1.

В заключение автор исследует вопрос о полноте системы полиномов Якоби на кривых в комплексной плоскости. Пусть L — неограниченная кривая с конечным числом ветвей, удаляющихся в бесконечность, не имеющая петель и разбивающая плоскость на конечное число односвязных областей $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Пусть L — спрямляемая в любой конечной части плоскости, причем если $s(z)$ — длина дуги связного куска от какой-нибудь его точки до точки z, то $ds(z) \leqslant M d|z|$ для больших $|z|$ (M—const). Дополнительно предполагается, что в состав L не входит отрезок $[-1, +1]$ и никакая часть этого отрезка вместе с L не образует петель. Пусть, далее, на L задана непрерывная вещественная функция $p(z)$ такая, что при больших $|z|$ $p(z) \geqslant p_0(|z|) = p_0(a) + \int_0^{|z|} \frac{\omega(t)}{t}\, dt$, где $\omega(t) \geqslant 0$ и $\omega(t) \uparrow +\infty$.

Доказывается следующая теорема: Пусть $\{\nu_n\} = \{n\} - \{\mu_n\}$ и $\lim_{n\to\infty} n/\nu_n = \tau$. Допустим, далее, что каждая область G_l содержит угол Δ_l раствора $\pi/\alpha_l > 2\pi\tau$, а одна из областей содержит в себе область E, простирающуюся до отрезка $[-1, +1]$, которая при конформном отображении внешности отрезка $[-1, +1]$ на внешность единичного круга переходит в криволинейный угол раствора более $2\pi\tau$. Если, наконец, выполняется условие $\int^{\infty} \frac{P_0(r)\, dr}{r^{1+\omega}} = \infty$, где $\omega > \max(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $\frac{1}{\beta_i} = \frac{1}{\alpha_i} - 2\tau$, то система полиномов Якоби $\{P_{\mu n}^{(\alpha,\beta)}(z)\}$ $(-1 < \alpha, \beta < 1)$ в классе функций $f(z)$ со свойством $\int_L e^{-p(z)} |f(z)|^2 dz < \infty$ будет полна в том смысле, что $\inf_{\{Q\}} \int_L e^{-p(z)} |f(z) - Q(z)|^2 ds = 0$, где $Q(z)$ — всевозможные конечные линейные комбинации полиномов Якоби из рассматриваемой системы. Доказательство основывается на методе

М. М. Джрбашяна интегрального преобразования Коши, причем используются также свойства решений уравнения $N(y)=0$. На примере полиномов Лежандра автор показывает, что требование, чтобы в состав кривой L не входил отрезок $[-1, +1]$ является существенным.

А. А. Китбалян

10206. О базисах вида $\{z^n + f_n(z)\}$. Казьмин Ю. А., Сб. научн. статей. Азово-Черноморск. ин-т механиз. с. х., 1959, вып. 8, ч. 2, 110—127

Работа состоит из 4 частей. В первой части доказываются две теоремы, дающие достаточные условия для того, чтобы системы функций $\{z^n + f_n(z)\}$ образовывали квазистепенной базис в пространстве функций A_R с коэффициентами из A_r, где A_R — пространство функций, аналитических в круге $|z| < R$, а A_r — числа $\{a_n\}$, удовлетворяющие условиям $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$, $r \leqslant R$. Во второй части автор использует доказанные теоремы для построения примеров базисов вида $\{z^n + f_n(z)\}$, например $\{z^n + f^{(n)}(z)\}$, $\left\{z^n + \frac{1}{n!}\int_0^r f(\zeta)(z-\zeta)^n d\zeta\right\}$, $\{z^n + f(\xi_n z)\}$, $\left\{z^n + \frac{a_0}{1-a_n z}\right\}$, $\left\{z^{n-1} + \frac{z^{-n}}{(n-1)!}\int_0^r f(\zeta)(z-\zeta)^{n-1} d\zeta\right\}$ и т. д. В третьей части результаты, полученные ранее для круга, переносятся на кольцо. Автор доказывает общие теоремы и приводит примеры конкретных систем, образующих базис. В четвертой части рассматривается система функций $\{z^n + \lambda f_n(z)\}$, для которой последовательность $\{f_n(z)\}$, где

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^k \in A_R, \quad R > 1, \tag{1}$$

имеет в A_R общую мажоранту $H(z) = q_0 + q_1 z + \ldots$ $(\overline{\lim}\sqrt[n]{|q_n|} \leqslant 1)$ такую, что $|a_{kn}| \leqslant q_k$ для всех k и n. Множество значений λ, при которых система функций (1) не образует базиса в A_r $(1 < r \leqslant R)$, называется спектром системы (1).

Автор показывает, что: 1) при $|\lambda| = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ система (1) образует квазистепенной базис в круге $|z| < r$, $1 < r \leqslant R$, с коэффициентами из A_r; 2) спектр системы состоит не более чем из счетного множества значений, не имеющих конечной предельной точки; 3) даются условия, необходимые и достаточные, чтобы множество $\{\lambda\}$ состояло из конечного числа точек. Э. З. Шувалова

10207. О квазинормальности некоторых семейств голоморфных в единичном круге функций. Сюн Цин-лай (Sur la quasi-normalité de quelques familles de fonctions holomorphes dans le cercle unité. Hiong King-lai), Sci. Rec., 1959, 3, № 8, 335—341 (франц.)

Автор суммирует и несколько улучшает свои ранее опубликованные результаты (РЖМат, 1956, 7293; 1958, 264, 3676; 1959, 8995; 1960, 276), причем формулирует новые простые следствия из последних своих результатов. Так как, по мнению референта, эти улучшения касаются главным образом доказательств, а сами теоремы не усилены существенным образом, то мы приведем здесь только две из девяти теорем.

Теоремы 5 и 6. Пусть F — семейство функций $f(z)$, голоморфных в $|z|<1$, обращающихся в нуль не более p раз, причем модули нулей равномерно ограничены снизу положительным числом. Если при некотором $k \geqslant 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что для всех $f \in F$ $(f^{(0)} \equiv f)$ $N(r, 1, f^{(k)}) < -\lambda \ln(1-r)$, $f^{(k)}(0) \neq 1$, то семейство F квазинормально в $|z|<1$ порядка $\leqslant p$ (Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936). А. А. Гольдберг

10208. Обобщения неравенства Минковского с приложениями к теории приближения в среднем целыми функциями. Чэнь Цзянь-гун (Generalizations of Minkowski's inequality with applications to the theory of mean approximation by integral functions. Chen Kien-kwong), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1958, 2, № 3, 81—85 (англ.)

Пусть вещественная функция $\varphi(t)$, определенная для $t > 0$, выпукла, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(+0) = 0$, K_1 — полоса, содержащая вещественную ось, $p(z) > 0$ для всех $z \in K_1$ и $\iint_{K_1} p(z)\,dxdy = 1$. Для функций $f(z)$ таких, что $\|f(z)\|_\varphi = \varphi^{-1}\left\{\iint_{K_1} p(z)\,\varphi(|f(z)|)\,dxdy\right\} < \infty$, устанавливаются некоторые соотношения между модулями непрерывности $\omega(\delta; f; K_1)_\varphi = \max_{|h_1| \leqslant \delta} \|f(z+h) - f(z)\|_\varphi$ и наилучшим приближением $E_\sigma^{(1)}(f; K_1)_\varphi = \inf_{g(z) \in G_\sigma^{(1)}} \|f(z) - g(z)\|_\varphi$, где $G_\sigma^{(\varphi)}$ — есть класс всех целых функций порядка ρ и степени σ. Если $\varphi''(t) > 0$, $\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' \leqslant 0$, $\left(\frac{\varphi'}{\varphi''}\right)' \geqslant 0$, $\left(\frac{\varphi'}{\varphi''}\right)'' \leqslant 0$ и $f(z) = O(|z|^q)$ $(q \geqslant 0)$ при $|z| \to \infty$, то из неравенства $\omega(\delta; f; K_1)_\varphi \leqslant \Omega(\delta)$, где $0 \leqslant t\frac{\Omega'(t)}{\Omega(t)} = O(1)$, $\Omega(t) = O(1) + O(t^q)$, $\Omega(+0) = 0$, следует, что $E_\sigma^{(1)}(f; K_1)_\varphi \leqslant c\Omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ (c — константа). А. Ф. Тиман

10209. Линейные операторы в аналитическом пространстве. Хапланов М. Г., Уч. зап. Физ.-матем. фак. Ростовск. ун-т, 1959, **43**, № 6, 83—118

Рассматриваются пространства A_R $(\bar{A}_R)$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$, всех последовательностей $x(x_0, x_1, \ldots)$, координаты которых удовлетворяют условию $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x_n|} \leqslant \frac{1}{R}$ $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x_n|} < \frac{1}{R},\ R < \infty\right)$. Топология в эти пространства вводится методом, изложенным в работе Кете и Теплица (Köthe G., Toeplitz O., J. reine und angew. Math., 1934, **171**, 193—226). Пространства A_R и $\bar{A}_R$ могут быть различными способами реализованы как пространства аналитических функций в определенных областях комплексной плоскости. В частности, если последовательности $x(x_0, x_1, \ldots)$ сопоставить функцию $x(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i$, то A_R $(\bar{A}_R)$ становится пространством аналитических функций в открытом (замкнутом) круге $|z| < R$ $(|z| \leqslant R)$ и введенная топология совпадает при этом с общепринятой в этих пространствах топологией. Первая глава работы содержит характеристику таких топологических понятий в A_R $(\bar{A}_R)$ как сходимость последовательностей, простая и усиленная ограниченность подмножеств и компактность. Вторая глава посвящается описанию линейных непредельных операторов, отображающих одно аналитическое пространство в другое. Основными являются следующие результаты.

Теорема 1. Чтобы матрица $[a_{ik}]$ преобразовывала аналитическое пространство A (любое) в A_{R_1}, $R_2 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $r < R_1$, выполнялось неравенство $|a_{jn}|\,r^j \leqslant c_n$, где $j, n = 0, 1, \ldots$, а точка $c(c_0, c_1, \ldots)$ принадлежит двойственному пространству A^*.

Теорема 2. Чтобы матрица $[a_{ik}]$ преобразовывала пространство $\bar{A}_R$ в A, необходимо и достаточно, чтобы для всех j, n и $r < 1/R$ выполнилось неравенство $-a_{jn} \mid r^n \leqslant c_j$, где точка $c(c_0, c_1, \ldots)$ принадлежит пространству A. Дается также описание матрицы, представляющей линейный непрерывный оператор из банахова пространства l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в аналитическое пространство A_1. Приведенные результаты и некоторые из доказательств опубликованы автором раньше (Докл. АН СССР, 1951, 79, №6; 80, № 1, 2). К. М. Фишман

10210. Основная теорема об интерполировании целой функции. Ли Го-пин, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 2, 268—270 (кит.)

Применяя теорему Бутру—Картана к проблеме интерполяции, автор доказал фундаментальную теорему для случая, более общего, чем случай, уже рассмотренный Тураном. Затем он указал на возможное обобщение 2-й фундаментальной теоремы Турана. K. L. Hiong

10211. О коэффициентах однолистных функций. Хейман (On the coefficients of univalent functions. Hayman W. K.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, 55, № 4, 373—374 (англ.)

Пусть $f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$ и $g(z) = \sum_1^\infty b_n z^n$ регулярны в $\mid z \mid < 1$ и $f(z) \circ g(z) = \sum_1^\infty \frac{a_n b_n}{n} z^n$. Известна гипотеза Мандельбройта и Шиффера, по которой из однолистности функций f и g в круге $\mid z \mid < 1$ следует однолистность в нем и функции $f(z) \circ g(z)$. Строится пример, опровергающий эту гипотезу. Автор отмечает, что остается открытым вопрос о справедливости гипотезы Пойа и Шенберга, по которой из звездообразности f и g следует звездообразность $f \circ g$.

Примечание референта. Опровержение гипотезы Мандельбройта и Шиффера недавно было дано также Эпстейном и Шенбергом (РЖМат, 1960, 7462).

Ю. Е. Аленицын

10212. Элементарные признаки однолистности по граничным характеристикам. Аксентьев Л. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 3—8

Известное условие принадлежности функции $f(z)$ к классу спиральных функций в круге $\mid z \mid < R$, в области $\mid z \mid > r$, в кольце $r < \mid z \mid < R$ формулируется для замкнутых областей: $\mid z \mid \leqslant R$, $\mid z \mid \geqslant r$, $r \leqslant \mid z \mid \leqslant R$.

Далее доказывается, что если в конечной или бесконечной выпуклой области D с границей L задана регулярная функция $f(z)$ с производной $f'(z)$, непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$, за исключением, может быть, конечного числа точек a_k, $k=1, \ldots, n$, в которых она представима в виде $f'(z) = (z-a_k)^{\varkappa_k} f_k(z)$, $0 < \varkappa_k < 1$, $f_k(a_k) \neq 0$. $f_k(z)$ регулярна в D, непрерывна в $\bar{D}$, и если $\operatorname{Re} f'(t) \geqslant 0$, $t \in L$, и $f'(t) \neq 0$ на прямолинейных участках L, то $f(z)$ однолистна в D.

Аналогичное условие формулируется для области G, являющейся внешностью выпуклой кривой L, и для области $\mid z \mid \geqslant R$. Библ. 5 назв. С. А. Касьянюк

10213. Об одной экстремальной задаче в конформных отображениях семиугольника. Оуян Чжан (On an extremal problem in conformal mapping of septagons. Ou—Yang Chang), Sci. Rec., 1958, 2, № 2, 71—75 (англ.)

Пусть S — односвязная область, граница которой разделена простыми концами $A_1, A_2 \ldots A_7$ на семь частей $A_1A_2, \ldots, A_6A_7$ A_7A_1 („семиугольник"); C_k $(k=1, 2, 3, 4)$ — классы лежащих в S кривых Жордана γ_k $(k=1, \ldots, 4)$, соединяющих соответственно A_1A_2 и A_3A_4, A_3A_4 и A_5A_6, A_5A_6 и A_1A_2, A_6A_7 и A_1A_2; $a_1 \ldots a_4$ — неотрицательные числа; $\rho(z)$ — произвольная, определенная при $z \in S$ и удовлетворяющая условиям:

$$\int_{\gamma_k} \rho \mid dz \mid \geqslant a_k \quad (k=1, \ldots, 4) \qquad (1)$$

неотрицательная функция.

Изучается задача о минимуме при условиях (1) интеграла $M = M(a_1, \ldots, a_4) = \iint_S \rho^2 dx dy$. Метод исследования — тот же, что у Дженкинса, который принципиально решил аналогичную задачу для „шестиугольника" (а также для „пяти- и четырехугольника") (Jenkins J. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 367—350). В силу конформной инвариантности $M(a_1 \ldots a_4)$ изучение сводится к случаю, когда S — полуплоскость с разделенной на семь частей границей. Указан вид гиперэллиптического интеграла, отображающего S на канонические прямоугольные (однолистные или двулистные) многоугольники H, для которых функция ρ^*, дающая минимум M, равна единице, и, следовательно, M равно площади H. Перечислены все возможные типы многоугольников H. П. П. Куфарев

10214. О значениях, не принимаемых ограниченными однолистными функциями. Сато (Sato Shigeyoshi), Кэнкю хококу. Сидзэн кагаку, Liberal Arts J. Natur. Sci., 1955, 6, 1—6 (японск.)

Известно, что функция $w = z\theta(qz/p)/\theta(pz/q)$, где $0 < q < p < 1$, $\theta(z) = \prod_{n=1}^\infty (1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1})$, отображает однолистно кольцо $q < \mid z \mid < 1$ на круг $\mid w \mid < 1$ с разрезом по дуге $\mid w \mid = p$, $\mid \arg w \mid \leqslant \delta(p, q)$. Доказываются следующие теоремы. Пусть S_M есть класс функций вида $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, однолистных и с $\mid f(z) \mid \leqslant M$ $(M > 1)$ в круге $\mid z \mid < 1$.

Теорема 1. Пусть $L(r, f)$ — мера множества точек окружности $\mid w \mid = r$, не покрытых значениями $f(z) \in S_M$ для $\mid z \mid < 1$. Тогда для $2M^2 - M - 2M\sqrt{M^2-M} < r < 1$ имеем точную оценку: $L(r, f) \leqslant 2r\varphi(M, r)$, где $\varphi(M, r) = \delta(p, q)$ при p и q, определяемых уравнениями $p = r/M$,

$$\frac{4rM^2}{(M+r)^2} = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + q^n \frac{r}{M}\right)^2 \left(1 + q^n \frac{M}{r}\right)^2 \Big/ \prod_{n=1}^\infty (1+q^n)^4.$$

Теорема 2. Пусть значения функции $f(z) \in S_M$ в круге $\mid z \mid < 1$ не покрывают круга $\mid w - c \mid \leqslant R$, где $2M^2 - M - 2M\sqrt{M^2-M} \leqslant c \leqslant M$. Тогда имеем точную оценку: $R \leqslant Mq(1-p^2)/(1-p^2q^2)$, где p и q определяются уравнениями $\frac{4pM}{(1+p)^2} = \prod_{n=1}^\infty (1+q^n p^{-1})(1+q^n p) \times$

$$\times (1-q^n)^2 / \prod_{n=1}^\infty (1-q^n p^{-1})(1-q^n p)(1+q^n)^2, \quad \mid c \mid = Mp(1-q^2)/(1-p^2q^2).$$

Теоремы 1 и 2 обобщают, соответственно, известные теоремы Дженкинса (РЖМат, 1954, 2940) и Гудмана (Goodman A. W., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 4) для класса S функций $f(z) = z + \ldots$, однолистных в круге $\mid z \mid < 1$. Доказательство проводится методом круговой симметризации. Теоремы, аналогичные теореме 2, доказываются также для подкласса функций из S

с $\mathrm{Re}\, f(z) > -k$ $(k \geqslant 1/2)$ в $|z|<1$. Отмечается возможность получения аналогичных результатов для p-листных ограниченных функций. Ю. Е. Аленицын

10215. О малых угловых коэффициентах. III. Набэсима, Сугаку, 1957, 8, № 3, Часть II, 1952, 4, 228—230 (японск.)

10216. Асимптотические свойства p-листных функций. Хейман У. К. (Hayman W. K.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 1, 55—80 См. РЖМат, 1956, 7287

10217. Локально p-листные функции. Пу Дэ-цянь, Ланьчжоу дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Уч. зап. Ланьчжоуск. ун-та (сер. естеств. н.), Lanchow. Univ. J., Nature Sci., 1958, № 2, 1—8 (кит.; рез. русск.)

Функцию $f(z)$, аналитическую в ограниченной области D, автор называет локально p-листной в D, если существует открытое непустое множество Ω и число p такие, что каждая точка w (Ω покрывается значениями $f(z)$ при $z \in D$ не более чем p раз. Доказывается что для локальной p-листности необходимо и достаточно выполнение одного из следующих трех условий:

1. Множество точек w, принимаемых в области D функцией $f(z)$ бесконечное число раз не может быть множеством второй категории.

2. Множество всех предельных значений функции $f(z)$ не может совпадать со всей плоскостью.

3. Функция $f(z)$ допускает в D представление вида $f(z)=p(z)/b(z)+a$, где $p(z)$ — многочлен, нули которого расположены в области D, $b(z)$ — аналитическая и ограниченная в D функция, a — постоянная.

Опираясь на условие 3, автор отмечает, что локально p-листные функции должны быть функциями ограниченного вида. Последний факт — частный случай хорошо известной теоремы Фростмана, делающей тот же вывод, но при более общих предположениях о множестве Ω: множество Ω-значений, принимаемых функцией $f(z)$ в области D равномерно ограниченное число раз может иметь положительную емкость (см., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, стр. 183, где приведен даже еще более общий результат).

С помощью указанных выше результатов устанавливается, что если множество всех предельных значений гармонической в круге $|z|<1$ функции $u(z)$ не совпадает с расширенной комплексной плоскостью, то $u(z)=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $|z|<1$. В заключение рассматриваются вопросы, связанные с обобщением теоремы Фату: Приводятся достаточные условия для того, чтобы из существования $\lim_{z_n-z_0} f(z_n)=a$ можно было сделать вывод о наличии $\lim f(z)$ при $z \to z_0$ по любому некасательному пути.

Примечание референта. Некоторые из результатов, приведенных в работе, либо были известны ранее, либо легко сводятся к результатам, ранее доказанным другими авторами, с которыми, по-видимому, автор не был знаком. Отметим, например, работу Коллингвуда и Картрайт (Collingwood, Acta Math., 1950, 87, 83—146 (следствие 82)). Г. Ц. Тумаркин

10218. О предположении Гудмана для почти ограниченных функций. Лай Вань-цай (Lai Wan-tzei), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, 9, № 3, 292—294 (кит.; рез. нем.)

Гудман доказал (РЖМат, 1956, 2936), что если функция $f(z)$, $f(0)=0$, однолистна и почти ограничена в $|z|<1$ относительно некоторой группы дробно-линейных преобразований, то $|f'(0)| \leqslant 1$ и знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $f(z) \equiv \eta(z)$, $|\eta| = 1$. Гудман высказал предположение, что условие однолистности может быть отброшено. Автор доказывает справедливость предположения Гудмана для регулярных почти ограниченных функций. С. А. Гельфер

10219. Об одной теореме для аналитических функций в кольце. Кубо (On a theorem of analytic functions in an annulus. Kubo Tadao), Math. japon., 1958, 5, № 1, 17—20 (англ.)

Доказывается следующая теорема. Пусть γ есть класс функций $\zeta = \varphi(z)$, однозначных и аналитических (необязательно однолистных) в кольце $D: Q < |z| < 1$, множества D_ζ значений которых в D лежат в полосе T: $0 < \mathrm{Im}\, \zeta < 1$ и для которых граничная компонента $\mathrm{Im}\, \zeta = 0, 1$ соответствует окружности $|z| = 1$. Пусть некоторая функция $\zeta = \varphi(z) \in \gamma$ и $\omega(\mathrm{Re}\, \zeta)$ обозначает колебание $\mathrm{Re}\, \zeta$ на компоненте E_j $(j = 1, 2, \ldots)$ дополнения к D_ζ относительно T. Тогда $\omega(\mathrm{Re}\, \zeta) \leqslant \max_{\zeta \in E_j}$

$\leqslant \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{k'(Q)}$, где $k'(Q)$ есть дополнительный модуль эллиптической sn-функции с основными периодами 2π, $2i \log \frac{1}{Q}$. Это неравенство не может быть усилено.

Доказательство основано на использовании результатов, недавно полученных автором для аналитических функций в кольце (РЖМат, 1960, 3929). Ю. Е. Аленицын

10220. Об одном применении метода позитивных функционалов для C-функции. Монастырский М. Л., Уч. зап. Шахтинск. гос. пед. ин-та, 1959, 2, № 6, 109—117

Пусть $M(a;b)$ — класс функций $\mu(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, не убывающих на промежутке $[a;b]$; $C(\tau)$ $(0 < \tau \leqslant \pi)$ — класс функций $w = f(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, представимых в круге $|z|<1$ интегралом Стилтьеса:

$$f(z) = \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t), \quad \mu(t) \in M(-\tau;\tau).$$

(класс $C = C(\pi)$ — известный класс Каратеодори). Пусть даны комплексные числа

$$c_0 > 0, \quad c_1, \ldots, c_{n-1}, w. \tag{1}$$

Составим числа

$$c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{n-2}^*, w^*, \tag{2}$$

где $c_k^* = c_{k-1} - 2c_k \cos\tau + c_{k+1}$, $c_{-k} = \bar{c}_k$, $w^* = \left(z - 2\cos\tau + \frac{1}{z}\right) w + \frac{1}{2}(c_{-1} - c_1) + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) c_0$.

Теорема. Для того чтобы существовала функция $f(z) \in C(\tau)$ $(\tau \neq \pi)$, имеющая началом разложения в степенной ряд полином $\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k z^k$ и принимающая в данной точке z из круга $|z|<1$ данное значение w,

необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матриц

$$D=\begin{Vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & \dfrac{\overline{w-s_0(z)}}{z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_0 & \dfrac{\overline{w-s_{n-1}(z)}}{z^n} \\ \dfrac{w-s_0(z)}{z} & \dfrac{w-s_1(z)}{z^2} & \dots & \dfrac{w-s_{n-1}(z)}{z^n} & \dfrac{w+\overline{w}}{1-|z|^2} \end{Vmatrix},$$

$$D^*=\begin{Vmatrix} c_0^* & c_1^* & \dots & c_{n-1}^* & \dfrac{\overline{w^*-s_0^*(z)}}{z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-n+2}^* & c_{-n+3}^* & \dots & c_0^* & \dfrac{\overline{w^*-s_{n-2}^*(z)}}{z^{n-1}} \\ \dfrac{w^*-s_0^*(z)}{z} & \dfrac{w^*-s_1^*(z)}{z^2} & \dots & \dfrac{w^*-s_{n-2}^*(z)}{z^{n-1}} & \dfrac{w^*+\overline{w}^*}{1-|z|^2} \end{Vmatrix},$$

где $s_k(z)=\dfrac{c_0}{2}+c_1z+\dots+c_kz^u$, $s_k^*(z)=\dfrac{c_0^*}{2}+c_1^*z+\dots$ $\dots+c_k^*z^k$, были не отрицательны. Если $\tau=\pi$, то из формулировки теоремы исключается матрица D^*.

Примечание референта. Сформулированный результат фактически доказан автором. Однако автором сформулирован более слабый результат. В работе встречаются опечатки. Н. А. Лебедев

10221. Замечание о произведениях Бляшке для полуплоскости. Гольдберг А. А., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 2, 210—213

Пусть $B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\dfrac{1-a_k^{-1}z}{1-\overline{a_k^{-1}}z}\cdot\dfrac{a_k}{|a_k|}$, $a_k=r_ke^{i\theta_k}$, $0<\theta_k<\pi$, $r_k\to\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\theta_k}{r_k}<\infty$, — произведение Бляшке для полуплоскости. Изучается рост неванлинновской функции $m(r,B)=$ $=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\ln^+|B(re^{i\varphi})|\,d\varphi$. Хейман (РЖМат, 1960, 5160) установил, что для всех $r>0$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины,

$$m(r,B)=o(r). \qquad (1)$$

Автор строит пример, показывающий, что оценка (1) вообще говоря, не выполняется для всех $r>0$, и дает более грубую оценку:

$$m(r,B)=o\left(r\left[1+\ln^+\frac{n(\lambda r)-n(\lambda^{-1}r)}{r}\right]\right),\quad \lambda>1,$$

выполняющуюся, однако, для всех $r>0$. (Из этой оценки следует, что если $B(z)$ — функция конечного порядка, то для всех $r>0$ $m(r,B)=o(r\ln r)$, а если $B(z)$ — функция первого порядка и нормального типа, то для всех $r>0$ $m(r,B)=o(r)$). Автор также показывает, что (1) будет выполняться для всех $r>0$, если потребовать, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\theta_k}{r_k}\ln\dfrac{2}{\sin\theta_k}<\infty$. Несколько дополняет результат Хеймана следующая теорема.

Теорема 2. Если $B(z)$ — функция конечного порядка, то при всяком $\lambda>1$ множество, где не выполняется $m(r,B)=O(r)$, можно покрыть последовательностью интервалов $(\lambda^{n_\nu},\lambda^{n_\nu+1})$, где n_ν — последовательность натуральных чисел такая, что $\sum_{\nu=1}^{\infty}n_\nu^{-1}<\infty$, а множество, где не выполняется (1), можно покрыть последовательностью интервалов $(\lambda^{m_\nu},\lambda^{m_\nu+1})$, где m_ν — последовательность натуральных чисел такая, что $\sum_{\nu=1}^{\infty}(m_\nu\ln m_\nu)^{-1}<\infty$. И. В. Островский

10222. Устойчивость краевой задачи Римана. Чикин Л. А., Уч. зап. Физ.-матем. фак. Ростовск.-н/Д. ун-т, 1959, **43**, № 6, 119—126

В плоскости комплексной переменной z задается простая замкнутая кривая L, разграничивающая плоскость на внутреннюю область S^+ и внешнюю S^-. Исследуется вопрос об устойчивости по отношению к вариации контура L однородной задачи Римана, состоящей в определении кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$, предельные значения которой удовлетворяют на контуре L условию: $\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)$, где $G(t)$ — заранее заданная на L функция. Контур L аппроксимируется последовательностью контуров $\{L_n\}$, сходящейся к L так, что последовательность областей $\{S_n^+\}$, ограниченных этими контурами, сходится к S^+ как к своему ядру. Причем автор считает допустимыми для рассматриваемого им гладкого контура L лишь такие деформации $\{L_n\}$, которые составлены из кривых L_n, удовлетворяющих при всех n следующим условиям Варшавского (Warschawski, Math. Z., 1932, **35**,): 1) отношение длины a всякой хорды кривой L_n к длине σ наименьшей из дуг, стягиваемой этой хордой $\geqslant c$, где c — постоянная >0; 2) кривая L_n обладает непрерывно вращающейся касательной, причем угол $\theta_n(S)$, составленный ею и осью OX, удовлетворяет условию Гёльдера $|\theta_n(S'')-\theta_n(S')|\leqslant A|S''-S'|^\alpha$, где A и α — постоянные, $0<\alpha<1$.

Используя результат Варшавского о сходимости последовательности конформных отображений, автор устанавливает следующую теорему.

1. Пусть L — гладкая кривая и $G(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и не обращается в нуль на L. Продолжим $G(t)$ на всю комплексную плоскость z, чтобы определенная таким образом функция $G(z)$ удовлетворяла внутри S^+ и S^- условию Гёльдера (т. е. на всяком замкнутом подмножестве указанных областей) и непрерывно переходила на L в $G(t)$. Рассмотрим теперь какую-либо допустимую деформацию $\{L_n\}$ контура L и будем решать на контурах L_n однородную задачу Римана с краевым коэффициентом $G(z)$. Тогда канонические функции $X_n(z)$ — решения задачи Римана для контура L_n — равномерно ходятся внутри областей S^+ и S^- к канонической функции однородной задачи Римана для контура L.

В конце статьи автор кратко останавливается на устойчивости неоднородной задачи Римана.

Г. Ц. Тумаркин

10223. О средних целой функции и ее производных Сривастава (On the means of an entire function and its derivatives. Srivastava K. N.), Quart. J. Math., 1959, **10**, № 39, 230—232 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и нижнего порядка λ и $\mu_\delta(r,f)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\delta d\theta$. Доказано, что при $\delta\geqslant1$ $\overline{\lim_{r\to\infty}}\dfrac{\ln[r\{\mu_\delta(r,f')/\mu_\delta(r,f)^{1/\delta}\}]}{\ln r}=\begin{cases}\rho\\ \lambda\end{cases}$.

Примечание референта. При ссылках на литературу спутана нумерация работ. А. А. Гольдберг

10224. **Необходимые и достаточные условия для теоремы Карлсона о целых функциях.** Рубел (Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions. Rubel L. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 83, № 2, 417—429 (англ.)

Основной результат опубликован раньше (РЖМат, 1956, 5196). Применением основной теоремы доказано: Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность целых положительных чисел. Для того чтобы всякая функция вида $g(z) = \sum_0^\infty a_n z^{\lambda_n}$ аналитически продолжалась на весь отрицательный луч $-\infty \leqslant x \leqslant 0$, необходимо и достаточно выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} > 0$.

Обобщая основной результат автор получает: Для того чтобы из условий: $f(z)$ — целая функция, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \gamma > 0$, $|f(z)| = 0(1)\exp(\tau|z|)$ для некоторого $\tau < \infty$; $|f(iy)| = 0(1)\exp(c|y|)$; $f(\lambda_n) = 0$ — следовало $f(z) \equiv 0$, необходимо и достаточно

$$\inf_{\lambda>1} \overline{\lim_{t\to\infty}} \left\{(\ln\lambda)^{-1} \sum_{t<\lambda_n<\lambda t} \lambda_n^{-1}\right\} > \frac{c}{\pi}.$$

Б. Я. Левин

10225. **О максимальном модуле некоторых трансцендентных целых функций.** Кюнци, Виттих (Sur le module maximal de quelques fonctions transcendantes entières. Künzi Hans, Wittich Hans), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 14, 1103—1106 (франц.)

Пусть целая функция $w = g(z)$ отображает $z \neq \infty$ на риманову поверхность F с одним периодическим концом (Виттих Г., Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., 1960). Известно квазиконформное отображение $w = h(\zeta)$ конечной ζ-плоскости на F такое, что $\iint\limits_{|\zeta|>R} (p(\zeta) - 1)\frac{d\xi d\eta}{|\zeta|^2} < \infty$, $\zeta = \xi + i\eta$, где $p(\zeta)$ — характеристика отображения, причем кривая, на которой достигается максимум $|h(\zeta)|$ на $|\zeta| = r$, является или лучом, или логарифмической спиралью. В силу теоремы П. П. Белинского (РЖМат, 1954, 2110) существует конечный отличный от нуля предел $\lim z(\zeta)/\zeta$ при $\zeta \to \infty$, где $z(\zeta) = g^{-1}(h(\zeta))$. Авторы отмечают, что этот результат Белинского позволяет утверждать, что для $g(z)$ кривая максимального модуля асимптотически приближается к лучу или к логарифмической спирали. А. А. Гольдберг

10226. **Распределение a-точек некоторых мероморфных функций.** Кюнци, Виттих (The distribution of the a-points of certain meromorphic functions. Künzi H. P., Wittich H.), Michigan Math. J., 1959, 6, № 2, 105—121 (англ.)

Замечание о возможности применения при исследовании асимптотического поведения некоторых классов мероморфных и целых функций одной теоремы П. П. Белинского (РЖМат, 1954, 2110) о квазиконформных отображениях, анонсированное ранее авторами в двух заметках (РЖМат, 1958, 7653; реф. 10225), в настоящей статье изложено очень подробно и проиллюстрировано большим числом примеров.

Примечание референта. Результат П. П. Белинского в указанном в реферируемой статье направлении использовался референтом (РЖМат, 1956, 390 Д). А. А. Гольдберг

10227. **О фундаментальных неравенствах без привлечения полюсов.** Се Хуэй-чунь (Shieh Hui-chun), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, 9, № 3, 281—291 (кит.; рез. англ.)

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $f(z)$ и $\varphi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ мероморфны в $|z| < \infty$ и при $r \to \infty$ $T(r, \varphi_1^{(k)}) = o[T(r, f^{(k)})]$, $T(r, \varphi_2) = o[T(r, f^{(k)})]$ и $T(r, \varphi_3) = o[T(r, f^{(k)})]$, где $\varphi_\nu(z)$ все попарно различны. Тогда выполняется неравенство $[1 - o(1)]T(r, f) < N(r, 0, f - \varphi_1) + N(r, 0, f^{(k)} - \varphi_2) + N(r, 0, f^{(k)} - \varphi_3) + S_k(r)$, где для остаточного члена $S_k(r)$ справедливы обычные в неванлинновской теории оценки.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ и $\varphi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ мероморфны в $|z| < \infty$ и при $r \to \infty$ $T(r, \varphi_\nu) = o[T(r, f)]$ $(\nu = 1, 2, 3)$, где $\varphi_2(z)$ и $\varphi_3(z)$ отличны от $\varphi_1(z)$ и не равны тождественно нулю. Тогда выполняется неравенство $[1 - o(1)]T(r, f) < 4N(r, 0, f - \varphi_1) + 3N(r, 0, f - \varphi_2) + N(r, 0, f^{(k)} - \varphi_3) + S_k(r)$, где для остаточного члена $S_k(r)$ справедливы обычные в неванлинновской теории оценки.

Эти теоремы обобщают результаты Мийу (Milloux H., J. math. pures et appl., 1940, 19, 179—210) и Сюн Цзин-лая (РЖМат, 1958, 275). А. А. Гольдберг

10228. **О мероморфных функциях, принимающих некоторые значения в точках, лежащих вблизи конечной системы лучей.** Островский И. В., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 5, 970—972

Приводится следующая теорема, которую мы сформулируем в несколько ослабленном виде. Пусть $f(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция, $r_k e^{i\varphi_k}$ — a-точки, $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика, $\delta(a, f)$ — дефект $f(z)$ в точке a. Скажем, что a-точки $f(z)$ близки к системе лучей S; $\arg z = \Theta_n$, $n = 1, 2, \ldots, m$, $\Theta_1 < \Theta_2 < \ldots < \Theta_m < 2\pi$ $(\gamma_n = \Theta_{n+1} - \Theta_n$, $\Theta_{m+1} = \Theta_1 + 2\pi)$, если для $n = 1, \ldots, m$ выполняется

$$\sum_{\substack{1 < r_k < R \\ \Theta_n < \varphi_k < \Theta_{n+1}}} \left(\frac{1}{r_k^{\pi/\gamma_n}} - \frac{r_k^{\pi/\gamma_n}}{R^{2\pi/\gamma_n}}\right) \sin\frac{\pi}{\gamma}(\varphi_k - \Theta_n) \leqslant$$

$$\leqslant KR^{k_1}T(R, f)^{k_2},$$

где $K > 0$ — постоянная, $0 \leqslant k_1 < \infty$, $0 \leqslant k_2 > 1$.

Теорема. Порядок ρ функции $f(z)$ конечен и $\rho \leqslant (k_1 + \pi/\gamma)/(1 - k_2)$, $\gamma = \min\gamma_n$, $n = 1, \ldots, m$, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий: А) нули и полюсы $f(z)$ близки к S, $\delta(a, f^{(l)}) > 0$ для некоторого $l = 0, 1, \ldots$ и $a \neq 0, \infty$; Б) полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ при некотором $a \neq 0, \infty$ и целом $l \geqslant 0$ близки к S, $\delta(0, f) > 0$; В) нули и полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ при некотором $a \neq 0, \infty$ и целом $l \geqslant 0$ близки к S, $\delta(\infty, f) > 0$.

В этой теореме неванлинновский дефект можно заменить введенным автором $*$-дефектом, лежащим между дефектами в смысле Неванлинна и Валирона. Доказательство использует оценку модуля логарифмической производной в секторе, представляющую самостоятельный интерес.

Получена также теорема, относящаяся к гиперболическому случаю, которая, в частности, утверждает, что если у $f(z)$, мероморфной в $|z| < 1$, нули и единицы лежат на конечном числе радиусов и $\delta(\infty, f) > 0$, то $\overline{\lim\limits_{r\to 1}} \ln T(r, f)/(-\ln(1 - r)) \leqslant 4$.

Результаты статьи содержат как частный случай теорему 1 Эдрея (РЖМат, 1956, 6537). А. А. Гольдберг

10229. **Открытые римановы поверхности.** Ройден (Open Riemann surfaces. Royden H. L. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AO1, № 249/5, 13 pp.) (англ.)

Изложение обзорного доклада, сделанного автором на Коллоквиуме по теории функций в Хельсинки.

В первой части доклада, названной «Классификация открытых римановых поверхностей», автор приводит хорошо известные результаты П. Мюрберга, Альфорса, Сарио и других, посвященные выяснению соотношений между классами римановых поверхностей, на которых или не существует функция Грина (класс O_G), или не существует, не равных тождественно константе ограниченных гармонических функций (класс O_{HB}), или то же самое для ограниченных аналитических функций (класс O_{AB}) и другими подобными же образом, определяемыми классами поверхностей. Полученные результаты позволяют написать следующую цепочку включений:

$$O_G \subset O_{HB} \subset O_{HB} \subset O_{HD} = O_{HBD}$$
$$\cap \qquad\qquad \cap$$
$$O_{AB} \subset O_{AD}$$

Для поверхностей конечного рода $O_G = O_{HD}$, но Токи (РЖМат, 1955, 3728) показал, что для произвольных римановых поверхностей все указанные включения являются строгими. Далее автор останавливается на результатах Одзава и Л. Мюрберга (РЖМат, 1956, 1289, 2164), связанных с рассмотрением на открытых римановых поверхностях эллиптических дифференциальных уравнений вида $\Delta u - P \cdot u = 0$, $P \geqslant 0$. В заключение этого раздела рассматривается вопрос об инвариантности введенных классов римановых поверхностей при квазиконформных отображениях. Пфлюгером для класса O_G, а Ройденом (РЖМат, 1955, 4395) для класса O_{HD} была доказана инвариантность при квазиконформных отображениях. В то же время автор приводит простую конструкцию примера (подобного указанных ранее Мори), показывающего, что классы O_{AD} и O_{AB} не сохраняются при квазиконформных отображениях.

Во втором разделе доклада «Структура алгебр функций на римановых поверхностях» автор описывает полученные в последнее время результаты, связанные с характеристикой конформной структуры некомпактных римановых поверхностей в терминах структуры алгебр, составленных из функций, определенных на рассматриваемых поверхностях. Так, Берс (Bers L., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54) показал, что две плоские области тогда и только тогда конформно эквивалентны, когда изоморфны кольца всех аналитических функций в них. Какутани, Шеваллей и позднее Рудин доказали, что кольцо всех ограниченных аналитических функций характеризует конформную структуру плоских областей, не имеющих AB — устранимых граничных точек, т. е. областей, для граничных точек которых не найдется хотя бы одной точки такой, что всякая ограниченная и аналитическая в рассматриваемой области функция была бы в этой точке регулярна (подробнее см. работу Рудина РЖМат, 1957, 2233). В то же время пример, принадлежащий Мюрбергу, показывает, что существуют римановы поверхности бесконечного рода, для которых кольцо ограниченных аналитических функций изоморфно кольцу всех ограниченных аналитических функций в круге. Однако теорему Шевалле—Какутани автору удалось распространить на римановы поверхности конечного рода (РЖМат, 1959, 9023). Третий раздел доклада — «Компактификация открытой римановой поверхности». Под компактификацией открытой римановой поверхности W подразумевается компактное хаусдорфово пространство, которое содержит W в качестве открытого плотного подмножества. Точки множества $X - W$ считаются граничными (или точками идеальной границы). Для того чтобы введенная компактификация могла быть успешно использована для целей теории функций, необходимо наложить на нее некоторые естественные топологические ограничения. Автор указывает основные требования, которым должна удовлетворять компактификация открытых римановых поверхностей. После чего дает сравнительную характеристику различных видов компактификации. Среди них — компактификация Х. Керекьярто — Стойлова, компактификация Х. Мартина, которая оказывается весьма полезной при изучении HB и HP классов функций. Последняя компактификация была первоначально предложена Мартином для изучения проблемы Дирихле для областей в трехмерном пространстве (Martin, Trans. Amer. Math. Soc., 1941, 49). В связи с компактификацией X_1 отмечается важная роль для изучения HB функций понятия броуновского движения на римановой поверхности, рассматривавшегося Какутани (РЖМат, 1956, 3781) и Дубом (РЖМат, 1959, 3799, где имеются ссылки и на более ранние работы). Для рассмотрения вопросов, связанных с HD функциями, используется другая компактификация X_2, построение которой проводится, опираясь на гельфандовскую теорию нормированных колец. Библ. 67 назв.

Г. Ц Тумаркин

10230. О сингулярных частях идеальной границы. Корня (Despre părți singulare ale frontierei ideale. Corneа A.), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 7, 639—642 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть R — открытая риманова поверхность, α — идеальная граница R, S — подобласть R, относительная граница которой γ является аналитической простой замкнутой кривой и пусть $\beta \subset \alpha$ — идеальная граница S. Говорят, что β является сингулярной частью α типа O_{HE} ($E = B$ или D), если удовлетворены следующие условия: 1) гармоническая мера β по отношению к S положительна; 2) любая функция $u \in HE$ на S с $u = 0$ на γ и $\int_\gamma du = 0$ равна тождественно нулю.

Доказана следующая теорема: Если α содержит сингулярную часть β типа O_{HE} ($E = B$, D), то $R \in O_{AE}$.

Эта теорема обобщает известную теорему Курамоти (РЖМат, 1959, 3734). Доказательство автора имеет следующие преимущества по отношению к доказательству Курамоти: 1) оно получается одновременно для $E = B$ и $E = D$ и 2) не использует теории униформизации.

M. Turchescu

10231. Двойственность в теории функций на римановых поверхностях. Тильман (Dualität in der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen. Tillmann Heinz Günther), J. reine und angew. Math., 1956, 195, № 1-2, 76—101 (нем.)

Автор развивает теорию двойственности пространств аналитических функций, построенную в работах А. И. Маркушевича (Матем. сб., 1945, 17, (59), 211), Кёте (РЖМат, 1955, 1377), Себаштьян-и-Сильвы (Sebastiao e Silva J., Thèse, Lissabon, 1948. Veröffentlicht in Portug. math., 1950, 9), Гротендика (РЖМат, 1956, 1484), рассматривая аналитические функции, заданные на римановых поверхностях со значениями в локально выпуклом линейном топологическом пространстве E. Функцию $f(z)$, заданную в области D комплексной плоскости и со значениями в линейном локально выпуклом топологическом пространстве E, называют аналитической, когда для всякого непрерывного линейного функционала x' над E ($x' \in E'$, где E' — двойственное к E пространство, состоящее из непрерывных функционалов над E) функция $x'[f(z)]$ — аналитическая в обычном смысле функция. Это определение естественным образом распространяется на риманову поверхность R путем использования локально униформизирующего параметра: функция $f(p)$ со значениями в локально выпуклом линейном топологическом пространстве E

называется аналитической в области $D \subseteq R$, если у каждой точки $p_0 \in D$ имеется окрестность $U(p_0)$, являющаяся образом круга комплексной плоскости локального параметра:

$p = p(t)$, $p \in U(p_0)$ такая, что функция $f[p(t)]$ аналитична в этом круге.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное подмножество римановой поверхности R. Функцию $f(p)$ со значениями в линейном локально выпуклом топологическом пространстве E называют аналитической (локально аналитической) на E, если $f(p)$ определена и однозначна в некоторой окрестности U множества $\mathfrak{M}$ и аналитична в каждой компоненте U.

Рассматриваются следующие типы пространств аналитических функций:

1. Пространство $B(U, E)$. Пусть U — открытое, относительно компактное подмножество R. $B(U, E)$ состоит из аналитических в U, непрерывных в $\overline{U}$ функций (со значениями в E) с топологией равномерной сходимости в $\overline{U}$.

2. Пространство $\mathfrak{H}(D, E)$ для произвольного открытого множества D. Будем исчерпывать D возрастающей последовательностью относительно компактных областей U_k: $D = \bigcup_1^\infty U_k$ и положим $\mathfrak{H}(D, E) = \bigcap_{k=1}^\infty B(U_k, E)$, определив в $\mathfrak{H}(D, E)$ топологию проективного предела последовательности пространств $B(U_k, E)$; эта топология соответствует равномерной сходимости на компактных подмножествах D.

3. Пространство $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, E)$ для произвольного $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ — система всевозможных открытых множеств $D \supseteq \mathfrak{M}$, в каждой связной компоненте которых найдется по крайней мере одна точка $\mathfrak{M}$. Очевидно, что $\mathfrak{M} = \bigcap_{D \in \mathfrak{H}(\mathfrak{M})} D$. Положим $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, E) = \bigcap_{D \in \mathfrak{H}(\mathfrak{M})} \mathfrak{H}(D, E)$, определив в $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, E)$ топологию локально выпуклой оболочки пространств $\mathfrak{H}(D, E)$.

Рассматриваются разнообразные свойства введенных пространств и множеств в них. Приведем несколько доказанных в работе предложений.

Теорема 2. Пространство $B(U, E)$ тогда и только тогда полно (соответственно нормируемо или метризуемо), когда E полно (соответственно нормируемо или метризуемо). $A(p, q)$ — элементарная функция первого рода на поверхности R, играющая роль ядра Коши $1/(\zeta - z)$. В случае, когда $\mathfrak{M}$ — область комплексной плоскости, бианалитичность $u'(z)$ означает: $u'(z)$ — аналитична в $C\mathfrak{M}$ и $u'(\infty) = 0$.

Теоремы 8 — 9. Всякий линейный функционал над $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, E)$ имеет вид: $u(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Rdm} \langle f(q), u'(q) \rangle dq$, где $u'(q)$ — локально равномерно непрерывная функция в $C\mathfrak{M}$. Два различных представителя $u_1'(q)$ и $u_2'(q)$ одного и того же функционала $u(f)$ отличаются на функцию, аналитическую на всей поверхности R. Дуальное к $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, E)$ пространство $\mathfrak{H}'(\mathfrak{M}, E)$ изоморфно пространству $\mathfrak{H}_A^0(C\mathfrak{M}, E')$, состоящему из локально непрерывных бианалитических функций на $C\mathfrak{M}$ и изоморфно также фактор-пространству $\mathfrak{H}_0(C\mathfrak{M}, E')/\mathfrak{H}_0(R, E')$, где $\mathfrak{H}_0(C\mathfrak{M}, E')$ состоит из локально равномерно непрерывных на $C\mathfrak{M}$ функций (со значениями в E'), $\mathfrak{H}_0(R, E')$ — такое же пространство из функций, аналитических на всей поверхности.

Далее исследуются различные топологии в $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, E)$ и $\mathfrak{H}'(C\mathfrak{M}, E')$ и пространство линейных отображений пространства $\mathfrak{H}(\mathfrak{M}, E)$ в некоторое другое линейное пространство.

С. Я. Хавинсон

10232. Явное определение граничных поверхностей фундаментальной области модулярной группы второй степени. Готшлинг (Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades. Gottschling Erhard). Math. Ann., 1959, **138**, № 2, 103—124 (нем.)

Обозначим через H_n совокупность всех таких комплексных симметрических матриц $Z = X + iY$ порядка n, что $Y > 0$. Как известно, аналитические автоморфизмы H_n записываются в следующем виде: $Z \to W = (AZ+B) \times (CZ + D)^{-1}$, причем матрица $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ является симплектической матрицей. Совокупность аналитических автоморфизмов, соответствующих целочисленным симплектическим матрицам M, образует модулярную группу Зигеля.

В работе для случая $n = 2$ дано явное описание фундаментальной области для модулярной группы Зигеля. Положим

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Автор показывает, что фундаментальная область может быть задана следующими 28 неравенствами:

$$-\frac{1}{2} \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$y_2 \geqslant y_1 \geqslant 2y_3 \geqslant 0, \tag{2}$$

$$|z_1| \geqslant 1, \quad |z_2| \geqslant 2, \quad |z_1 + z_2 - 2z_3 + e| \geqslant 1, \tag{3}$$

$$|\det(Z + S)| \geqslant 1, \tag{4}$$

где S одна из следующих 15 матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix} \tag{5}$$

(e означает ± 1). В статье также показано, что ни одно из этих 28 неравенств не является следствием остальных 27.

И. И. Пятецкий

10233. Явная конструкция ортогональных автоморфных функций в мультипликативных дифференциальных классах. Петерссон (Explizite Konstruktion der automorphen Orthogonalfunktionen in den multiplikativen Differentialklassen. Petersson Hans). Math. Nachr., 1957, **16**, № 5-6, 343—368 (нем.)

Статья посвящена изучению автоморфных форм размерности -2 относительно дискретных подгрупп движений плоскости Лобачевского. Пусть Γ — дискретная фуксова группа первого рода, содержащая матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и реализованная в виде подгруппы группы вещественных матриц второго порядка с определителем 1, v — мультипликатор на Γ, τ и z — точки верхней полуплоскости комплексного переменного. Ряд

$$\sum_{M \in \Gamma} v^{-1}(M) \left(\frac{dM\tau}{d\tau}\right)^{r/2} (M\tau - z)^{\nu} (M\tau - \bar{z})^{-\nu} = \psi_{-r}(\tau, z, v, \nu, \Gamma)$$

абсолютно сходится при $r > 2$, $\tau \not\equiv z \bmod \Gamma$ и представляет при фиксированном z автоморфную форму от τ, удовлетворяющую соотношению: $\psi_{-r}(M\tau) = v^{-1}(M) \times (m_1\tau + m_2)^{-r} \psi_{-r}(\tau)$, где (m_1, m_2) — вторая строка матрицы $M \in \Gamma$. Изучается поведение функции $\psi_{-r}(\tau, z, v_r, -\nu, \Gamma)$, где v_r — мультипликатор, непрерывно зависящий от r, при $r \to 2 + 0$. Оказывается, что при всех τ, z, таких, что $\tau \not\equiv z \bmod \Gamma$, существует конечный предел, который обозначается $\psi_{-2}(\tau, z, v_2, -\nu, \Gamma)$. Автор доказывает, что $\psi_{-2}(\tau, z, v_2, -\nu, \Gamma)$ — автоморфная форма размерности -2, голоморфная при

$\tau \not\equiv z \bmod \Gamma$, и дает явное выражение для главного члена разложения $\psi_{-2}(\tau, z, v_2, -\nu, \Gamma)$ в окрестности точки $\tau_0 \equiv z \bmod \Gamma$. Особого рассмотрения требует случай $v_2 \equiv 1$, $\nu = 1$, соответствующий абелевым дифференциалам третьего рода. Изучается также поведение рядов Пуанкаре параболического типа для форм размерности $-r$ при $r \to 2+0$. В статье используются обозначения и результаты других работ автора. А. А. Кириллов

10234. О системе мультипликаторов для группы целых модулярных подстановок n-й степени. Кристиан (Über die Multiplikatorensysteme zur Gruppe der ganzen Modulsubstitutionen n-ten Grades. Christian Ulrich), Math. Ann., 1959, 138, № 5, 363—397 (нем.)

Обозначим через H_n совокупность всех квадратных симметрических матриц $Z = X + iY$ порядка n с положительной мнимой частью Y. Совокупность аналитических автоморфизмов H_n вида $Z \to Z^* = U'ZU + S$, где U — целочисленная унимодулярная матрица, а S — целочисленная симметрическая матрица, образуют группу Δ. Пусть $f(Z)$ — голоморфная в H_n функция, удовлетворяющая функциональному уравнению $f(U'ZU + S) = J(U, S; Z) f(Z)$ для всех преобразований из Δ. $J(U, S; Z)$ означает голоморфную в H_n функцию, всюду в H_n отличную от нуля. Функция $J(U, S; Z)$ называется мультипликатором. Два мультипликатора J_1 и J_2 называются эквивалентными, если существует такая голоморфная в H_n функция $K(Z)$, что

$$J_2(U, S; Z) = K(U'ZU + S) K^{-1}(Z) J_1(U, S; Z).$$

В работе доказано, что при нечетном n все мультипликаторы между собой эквивалентны и что при четном n ($n \neq 2$) есть два класса неэквивалентных между собой мультипликаторов, а именно $J(U, S; Z) = 1$, $J(U, S; Z) = \det U$. И. И. Пятецкий

10235. О нормальности семейств квазиконформных отображений. Белинский П. П., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 4, 651—652

Рассматриваются квазиконформные отображения $w = f(z)$ области, которые определяются требованием, чтобы в каждой точке z_0 области при $0 < r < r(z_0)$ выполнялось неравенство

$$\frac{\max\limits_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)|}{\min\limits_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)|} \leqslant q. \qquad (1)$$

Доказывается теорема: Пусть $\mathfrak{M}$ — семейство функций $\{w = f(z)\}$, обладающих следующими свойствами: 1) функции $f(z)$ определены в областях и осуществляют гомеоморфные отображения; 2) вспомогательные преобразования $z' = az + b$ и $w' = aw + b$ не нарушают принадлежности функций семейству; 3) всякую последовательность функций $w = f_n(z)$ семейства $\mathfrak{M}$, определенных в областях D_n с ядром D, отличным от нуля, можно превратить в компактную при помощи нормировки вида $w' = a_n f_n(z) + b_n$. Компактность понимается в смысле равномерной сходимости внутри D к отображению семейства. Тогда отображения семейства оказываются квазиконформными с некоторыми q.

Из теоремы следует принципиально важный вывод, что класс квазиконформных отображений является единственным возможным расширением класса конформных отображений, сохраняющим свойства 1), 2), 3).

Примечание референта. Истолкование неравенства (1) как условия компактности, в случае монотонных отображений прямой на себя, принадлежит Альфорсу и Бейрлингу (РЖМат, 1960, 6406).

И. Н. Песин

10236. Теория квазиконформных отображений. Лаврентьев М. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3. М., АН СССР, 1958, 198—208

Дается краткий обзор теории квазиконформных отображений, одним из создателей которой является автор. Внутренние отображения, отображения с ограниченным искажением, а также отображения, порождаемые эллиптическими системами (двух уравнений) с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными составляют класс квазиконформных отображений. После краткого разъяснения основных свойств отображения (плоских областей) с ограниченным искажением автор приводит важнейшие свойства отображений, порождаемых системами двух уравнений с частными производными первого порядка, сильно эллиптическими в смысле автора. К таким свойствам относятся, например: 1) теорема о существовании и единственности квазиконформного отображения данной односвязной области плоскости (x, y) на данную односвязную область плоскости (u, v) при произвольном соответствии трех граничных точек, 2) теорема о граничных свойствах квазиконформных отображений, 3) экстремальные свойства квазиконформных отображений и др. Эти теоремы, наряду с их теоретической важностью, имеют большое применение в гидродинамических задачах. В последнем разделе статьи автором выдвинуты проблемные вопросы, связанные с отображениями многомерных областей. А. В. Бицадзе

10237. О компонентах множеств уровня функции—расстояния до плоского континуума. Ионин В. К., Суворов Г. Д., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 3, 496—498

Пусть $\rho(M) = \rho(M, K)$ есть расстояние от произвольной точки M на плоскости до ограниченного континуума K. Уровнем E_r функции $\rho(M)$ называется множество всех точек M, для которых $\rho(M) = r$. В статье дается метрическая характеристика всех уровней E_r для $r > 0$, из которой следует, например, что, за исключением не более чем счетного множества значений r, каждая компонента уровня E_r есть либо точка, либо замкнутая жорданова спрямляемая кривая, имеющая касательную во всех своих точках, исключая не более чем счетное множество угловых точек. Приводятся также некоторые оценки сверху для длины этих замкнутых кривых.

Ю. Ю. Трохимчук

10238. Теорема о последовательностях топологических отображений областей, принадлежащих компактам. Суворов Г. Д., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 4, 744—746

Дается обычное определение ядра A_0 последовательности областей $\{A_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ некоторого компакта X, содержащих фиксированную точку o. Для последовательности топологических отображений $T_n(x)$, $x \in A_n$, $T_n(o) = o'$ этих областей в другой компакт Y приводится теорема о равномерной сходимости внутри A_0 некоторой ее подпоследовательности. Ю. Ю. Трохимчук

10239. О некоторых алгебрах аналитических функций. Хасуми (On certain algebras of analytic functions. Hasumi Morisuke), Ибараки дайгаку бунри гакубу киё (сидзэн кагаку), Bull. Fac. Liberal Arts Ibaraki Univ. (Natur. Sci.), 1958, № 8, 7—23 (англ.)

Пусть E — локально выпуклое линейное топологическое пространство, f — отображение открытого множества O комплексной z-плоскости в E. f называется слабоаналитическим, если функция $x'(f(z))$ регулярна в O, каков бы ни был непрерывный линейный в E функционал x'. Изучаются следующие множества слабоаналитических отображений: 1) $H(O, E)$ — множество всех слабоаналитических отображений f, заданных в открытом множестве O римановой числовой сферы (при этом считается, что $f(\infty) = 0$, если $\infty \in O$); в $H(O, E)$ вводится топология равномерной сходимости на всяком компактном подмножестве O; 2) $B_0(O, E)$ — множество всех слабоаналитических отображений f, непрерывных в замыкании O с топологией равномерной сходимости

в $\overline{O}$; 3) $H(S, E)$ — множество всех отображений f, слабоаналитических в некотором открытом множестве $O \supset S$ (множество O меняется вместе с f); два отображения f_1 и f_2, совпадающие в некоторой окрестности S, отождествляются. $H(S, E)$ снабжается топологией индуктивного предела пространств $H(O, E)$ $(O \supset S)$.

Пусть теперь A — такая локально m-выпуклая алгебра (Майкл, Mem. Amer. Math. Soc., 1952, № 11), что выпуклая замкнутая оболочка любого компактного в A множества компактна. Тогда $H(O, A)$, $B_0(O, A)$, $H(S, A)$ тоже оказываются локально m-выпуклыми алгебрами (при естественном определении умножения).

Теорема 5. Пусть φ — линейный функционал в $H(O, A)$. Для того чтобы φ был мультипликативным, необходимо и достаточно существование точки $z_\varphi \in O$ и мультипликативного линейного функционала $\widetilde{\varphi}$ в A так, что $\varphi(f) = \widetilde{\varphi}(f(z_\varphi))$ при любом $f \in H(O, A)$. Функционал $\widetilde{\varphi}$ и точка z_φ определяются по φ единственным образом. φ непрерывен в том и только в том случае, когда $\widetilde{\varphi}$ непрерывен. Топологическая алгебра называется функционально непрерывной, если всякий линейный мультипликативный функционал, заданный в ней, непрерывен. Алгебры $H(O, A)$ и $H(S, A)$ функционально непрерывны в том и только в том случае, когда A функционально непрерывна. Далее дается описание максимальных идеалов в $H(S, A)$ и $B_0(O, A)$.

Теорема 8. Алгебра $H(S, A)$ полупроста в том и только в том случае, когда A полупроста и S не содержит изолированных точек. Используя результаты Гротендика (РЖМат, 1956, 1484), автор находит общий вид ограниченных и непрерывных гомоморфизмов алгебры $H(O, A_1)$ в алгебру A_2 (гомоморфизм называется ограниченным, если образ некоторой окрестности нуля в $H(O, A_1)$ ограничен в A_2). В. П. Хавин

10240. Смешанная плоская задача теории упругости для квадранта. Куршин Л. М., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 5, 981—984

Решается задача о напряжениях в упругом квадранте $x>0$, $y>0$ под действием сосредоточенной силы $Q+iP$, приложенной в точке $z_0=x_0+iy_0 (x_0>0, y_0>0)$, при условии, что на границе $y=0$ равны нулю смещения, а на границе $x=0$ — внешние усилия. Квадрант дополняется до полуплоскости введением силы $Q-iP$ в точке $\overline{z_0}$, и рассматривается напряженное состояние полуплоскости под действием сил $Q+iP$, $Q-iP$ и произвольной пока нагрузки $q(x)$, действующей вдоль оси Ox ($q(x)$ суть касательные напряжения на границе квадранта); при этом $v(x, 0)=0$.

Воспользовавшись известными формулами Мелана, автор записывает выражения для комплексных потенциалов напряженного состояния и, исходя из условия $u(x, 0)=0$, получает для определения функции $q(x)$ сингулярное интегральное уравнение

$$2\varkappa \int_0^\infty \frac{q(t)}{t-x}\,dt - \int_0^\infty \left[\frac{s+x^2}{t+x} + \frac{4t(x-t)}{(t+x)^3}\right] q(t)dt = F(x),$$

где $\varkappa$ — упругая постоянная, а $F(x)$ — известная функция, зависящая от Q, P и z_0. После применения двустороннего преобразования Лапласа к уравнению, полученному из приведенного заменами

$$t = e^\tau,\ x = e^\xi,\ q(x) = \frac{1}{\pi i \sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{r(t)}{t-x}\,dt,$$

выражение для функции $q(x)$ получается в виде интеграла, который может быть вычислен при помощи вычетов. И. Г. Араманович

10241. Изгиб бесконечной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием, край которой подкреплен тонким кольцом. Шереметьев М. П., Инженерный сб., 1959, 25, 51—63

Рассматривается задача о поперечном изгибе бесконечной изотропной пластинки с эллиптическим отверстием, подкрепленным тонким упругим кольцом, которое предполагается нерастяжимой упругой линией, работающей на изгиб и кручение. Отображая внешность эллипса на внешность единичного круга и специальным образом преобразовывая граничные условия, автор сводит рассматриваемую задачу к граничной задаче для аналитических функций, которая затем решается методом последовательных приближений. Показана сходимость процесса в среднем на контуре единичного круга и дальше отмечается, что, например, для медной пластинки со стальным кольцом при отношении полуосей $b/a=1/3$ можно ограничиться нулевым приближением. В этом случае, а также если отображающая функция рациональна, решение, как замечает автор, получается в замкнутой форме. В конце статьи приведена таблица численных значений изгибающих и крутящих моментов в трех приближениях. Г. Н. Савин

10242. Об однолистном изменении профиля плотины. Аксентьев Л. А., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 52—54

Рассмотрена следующая задача. Пусть в плоскости z_0 задан подземный контур (профиль) плотины, который характеризуется функциями: $\Theta_0(\varphi)$ — угол, составленный касательной к контуру с положительным направлением вещественной оси; $v_0(\varphi)$ — скорость фильтрационного потока вдоль контура; φ — потенциал скоростей на контуре — $\frac{kH}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{kH}{2}$. Задано новое распределение скорости в виде

$$v(\varphi) = \left(1 + \sin\frac{\pi\varphi}{kH}\right)^{\alpha - \frac{1}{2}} \left(1 - \sin\frac{\pi\varphi}{kH}\right)^{\beta - \frac{1}{2}} v_1(\varphi),$$

где $v_1(\varphi)$ удовлетворяет условию Гёльдера и не обращается в нуль в промежутке $-\frac{kH}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{kH}{2}$. Требуется найти условия, при выполнении которых подземный контур плотины, соответствующий этому распределению скорости и расположенный в плоскости z, не будет иметь самопересечений. Постановка задачи принадлежит В. С. Рогожину, который получил достаточное условие решения этой задачи (РЖМат, 1959, 8671К). Доказана теорема, которая уточняет результат В. С. Рогожина. На основании этой теоремы формулируются достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации, которые были исследованы М. Т. Нужиным (РЖМат, 1955, 1728). Библ. 3 назв. П. Ф. Фильчаков

10243. * Об одном случае фильтрации из канала. Ляшко (Про один випадок фільтрації з каналу. Ляшко І. І.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 3, 241—244 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается задача фильтрации из канала с водопроницаемым горизонтальным дном заданной ширины, наклонными водонепроницаемыми стенками, к одной из которых примыкает шпунт заданной длины, при произвольной линии подземного водоупора, на одном из участков которого расположена проницаемая щель. Щель для простоты изложения принимается горизонтальной, расположенной на глубине T, ниже дна канала. Применяя метод мажорантных областей, автор выводит формулы, устанавливающие достаточно точную верхнюю оценку фильтрационного расхода из канала.

Рассмотрены конкретные примеры, из анализа которых вытекает, что в самом неблагоприятном случае (т. е. при отсутствии шпунта) при произвольной ширине щели и канала полный фильтрационный расход будет

меньше чем $0{,}1\varkappa H$ (где $\varkappa$ — коэффициент фильтрации, H — уровень жидкости в канале), если начальная точка щели удалена от дна канала больше чем на 4l. Полученные формулы позволяют установить область, где целесообразно проводить более детальное геологическое исследование грунта, а также область, в которой эти исследования проводить нет никакой необходимости.

П. Ф. Фильчаков

10244. О применимости теории Герца к одной пространственной контактной задаче. Красненьков В. И. Изв. высш. учебн. заведений. Машиностроение, 1958, № 1, 16—26

См. РЖМех, 1959, 53934.

10245. Напряжения в эллиптическом кольце под действием сосредоточенных нагрузок. Сейка (The stresses in an elliptic ring under concentrated loading. Seika M.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 3-4, 99—105 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Задача о напряжениях, возникающих в эллиптическом кольце, к краю которого приложены две сосредоточенные силы, решается при помощи альтернирующего метода. Автор, по-видимому, не знаком с работами М. П. Шереметьева (РЖМех, 1953, 277) и А. И. Каландия (РЖМех, 1957, 2156), где рассмотрены более общие задачи об упругом равновесии эллиптического кольца.

И. Г. Араманович

10246. Напряженное состояние многосвязной полуплоскости от запрессовки в нее дисков. Тарабасов Н. Д., Инженерный сб., 1959, 25, 136—144

Рассмотрена плоская задача теории упругости для изотропной полуплоскости с отверстиями произвольной формы; в некоторые из них запрессованы диски из того же материала, что и полуплоскость. Упругое состояние создается напряжениями, заданными на свободных границах, а также силами, приложенными в произвольных точках полуплоскости и в центрах тяжести дисков. При помощи метода Д. И. Шермана (Докл. АН СССР, 1940, 27, 907—910) определение комплексных потенциалов приводится к первой основной задаче теории упругости для многосвязной области: полуплоскости с отверстиями, незаполненными дисками. В случае, когда все отверстия круглые и заполнены дисками, решения даются в замкнутом виде; приводится числовой пример.

И. Г. Араманович

10247. Напряжения изгиба в тонкой плите при соединениях с натягом (Напруження згину в тонкій плиті при з'єднаннях з натягом. Вайнберг Д. В., Угодчиков А. Г.), Прикл. механіка, 1958, 4, № 4, 396—400 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается задача о напряженном состоянии тонкой изотропной плиты, когда область, занятая плитой, состоит из многосвязной области S_0 и некоторого числа круговых шайб, вставленных «с натягом» в круглые отверстия плиты. При этом предполагается, что материал плиты и шайб одинаковый и что натяг (т. е. разность радиусов отверстия в плите и шайбы до посадки) изменяется по линейному закону по высоте плиты; последнее предположение позволяет свести задачу к плоской. Вводя комплексные представления функций напряжения (в плите и в шайбах) и пользуясь методом Д. И. Шермана (Докл. АН СССР, 1940, 27, 907—910), авторы приходят к первой основной задаче теории изгиба тонких плит для многосвязной области S_0.

И. Г. Араманович

10248. Напряженное состояние в диске, вращающемся эксцентрически. Шелёнговский (The state of stress in a disc rotating about an eccentric axis. Szelągowski F.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, 6, № 2, 63—73, VII (англ.; рез. русск.)

Выводятся формулы, определяющие значения напряжений в произвольной точке диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг оси, отстоящей на некотором расстоянии от центра диска.

Из резюме автора

10249 К. Функции комплексного переменного. Франклин (Functions of complex variables. Franklin Philip. London, Pitman, 1959, ix, 246 pp., 25 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 514, 11 (англ.)

10250 К. Аналитические функции. 3 изд. стереотипное. Сакс, Зыгмунд (Funkcje analityczne. 3 wyd. niezmien. Saks Stanisław, Zygmund Antoni. Warszawa, PWN, 1959, 431 s., 45 zł.) (польск.)

10251 Д. Линейные операторы в аналитическом пространстве и их приложения. Хапланов М. Г. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1960

См. также: 9946, 10315, 10367 К, 10487, 10490, 10509, 10566, 10577.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

10252. Об одной теореме существования. Юровский А. В., Тр. Ленингр. электротехн. ин-та связи, 1959, вып. 1(38), 85—92

Методом последовательных приближений доказывается теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = P_{i1}x_1 + P_{i2}x_2 + \ldots + P_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $P_{ik} = P_{ik}(t)$ — абсолютно интегрируемые функции в промежутке (a, b). Автор обращает внимание на то, что приведенное доказательство позволяет установить быстроту сходимости процесса, однако во многих случаях сделать это не легче, чем при классическом доказательстве теоремы Пикара. Примеров нет.

А. Н. Черкасов

10253. О решениях уравнения $d^2x/dt^2 = F(x, dx/dt)$. Черкасов А. Н., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 208—218

При помощи теоремы Чаплыгина получены некоторые результаты об оценках решений уравнения, указанного в заголовке. Предполагается, что функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и единственность решений (вне оси Oy); $F(0, 0) = 0$, если $x \neq 0$, то $F(x, 0) \neq 0$; отношение $F(x, y)/y$ ограничено при $|y| > d$, а $\lim\limits_{y \to 0} |F(x, y)/y| = \infty$.

Теорема 4. Выберем функцию $\varphi(t) > 0$ такую, что $\varphi'(t) < 0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \varphi'(t) = 0$. Пусть $w(x) = \varphi'(\varphi_1(x))$, где $\varphi_1(x)$ — функция, обратная к $\varphi(x)$: $\varphi(\varphi_1(x)) \equiv x$. Если $dw/dx > F(x, w)/w$ при $0 < x < \xi$, то существует решение уравнения $x(t)$, удовлетворяющее неравенству $x(t) < \varphi(t)$ при $t \geqslant \varphi_1(\xi)$.

И. М. Соболь

10254. Обобщение теоремы об однозначности интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Борувк

(Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung $y'=f(x, y)$. Boruvka O.), Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math., 1956, 1, № 4-6, 155—167 (нем.; рез. чешск., русск.)

Пусть непрерывная и непрерывно дифференцируемая в области $\omega: \xi < x \leqslant \xi + a, \quad \eta - b < u \leqslant v < \eta + b$ функция $\varphi(x, u, v)$ удовлетворяет условиям: $\varphi(x, u, u) \equiv 0$ и $\varphi(x, u, v) > 0$ при $u < v$. Пусть для любых двух решений $u(x)$ и $v(x)$ задачи

$$y' = f(x, y), \quad y(\xi) = \eta, \tag{1}$$

удовлетворяющих неравенству $\eta - b < u(x) \leqslant v(x) < \eta + b$, выполнено соотношение $\lim\limits_{x \to \xi + 0} \varphi[x, u(x), v(x)] = 0$. Пусть непрерывная в области $\xi \leqslant x \leqslant \xi + a$, $|u - \eta| \leqslant b$, $z \geqslant 0$, функция $\Phi(x, u, z)$ обладает тем свойством, что тождественный нуль является единственным решением задачи $z' = \Phi[x, u(x), z]$, $z(\xi) = 0$, каково бы ни было решение $u(x)$ задачи (1).

Основной результат: для единственности решения задачи (1) достаточно, чтобы в области ω выполнялось неравенство

$$\varphi'_x(x, u, v) + \varphi'_u(x, u, v) f(x, u) + \varphi'_v(x, u, v) f(x, v) \leqslant$$

$$\leqslant \Phi[x, u, \varphi(x, u, v)].$$

Доказательство основано на дифференциальных неравенствах. Автор показывает, как из его теоремы при различных конкретных $\Phi(x, u, z)$ вытекают многие ранее известные результаты.

М. А. Красносельский

10255. Заметка о единственности и сходимости последовательных приближений. Брауэр (A note on uniqueness and convergence of successive approximations. Brauer Fred), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 1, 5—8 (англ.)

Рассматривается задача

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

в конечномерном пространстве. Правая часть непрерывна по совокупности переменных в соответствующей области и удовлетворяет условиям $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant$

$$\leqslant A |x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad t \cdot |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant k |x_1 - x_2|,$$

$$0 < k < \frac{1}{1 - \alpha}.$$

В этих предположениях С. Г. Крейн и референт (РЖМат, 1956, 8778) доказали единственность решения задачи (1). Кой (РЖМат, 1959, 9059) и Люксембург (РЖМат, 1959, 6867; 1960, 2882) показали, что в указанных предположениях решение задачи (1) может быть получено обычным методом последовательных приближений $x_n(t) = \int_0^t f[\tau, x_{n-1}(\tau)]\, d\tau$, причем они ограничились случаем скалярного уравнения. Автор доказывает сходимость последовательных приближений для векторных уравнений и указывает несколько более простое, чем известные ранее, доказательство теоремы единственности. Также простое доказательство автора сходимости последовательных приближений (как указано в статье) использует общие идеи Левинсона и Коддингтона (РЖМат, 1960, 3002 К) доказательства сходимости последовательных приближений и построения Люксембурга.

М. А. Красносельский

10256. Дополнение к трудам Камке. Заметка VI. Митринович (Compléments au traité de Kamke. Note VI. Mitrinović D. S. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Mat. i fiz., 1959, № 27, 4 p.) (франц.)

Указаны некоторые дополнительные к справочнику Камке случаи интегрируемости в квадратурах.

В. В. Немыцкий

10257. Решение в квадратурах уравнений Риккати и линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Мостафа А. Абделькадер (Solutions by quadrature of Riccati and second-order linear differential equations. Mostafa A. Abdelkader), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 10, 886—889 (англ.)

Рекуррентно определяется последовательность линейных дифференциальных уравнений второго порядка, каждое из которых интегрируемо в квадратурах. В явном виде записаны только простейшие среди них: $z'' + 2e^x(1 + e^x)^{-2}z = 0$ и $(\cos x - 1)z'' + z = 0$.

И. М. Соболь

10258. Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения второго порядка в области, содержащей точки поворота и регулярные особенности. Торн (The asymptotic solution of linear second order differential equations in a domain containing a turning point and regular singularity. Thorne R. C. Techn. Rept., Dept. Math., Calif. Inst. Technol., 1956, № 12, i, 21 pp.) (англ.)

Пусть u — положительный параметр с достаточно большими значениями и z — комплексная переменная, пробегающая открытую односвязную область D, содержащую $z=0$ и точку $z=z_0$. Пусть $p(z)$ и $q(z)$ регулярны в D и действительны только тогда, когда z принимает действительные значения. В этих предположениях выводятся асимптотические разложения решений дифференциального уравнения

$$d^2w/dz^2 = [u^2(z_0 - z)z^{-2}p(z) + z^{-2}q(z)]w, \tag{1}$$

которые равномерны по z в области, включающей $z=0$, $z=z_0=i$, 0, когда $u \to \infty$. В разложении участвуют функции Бесселя высших порядков, независимая переменная в которых может быть либо очень большой, либо очень малой. Эти рассмотрения опираются на работу Олвера (РЖМат, 1957, 3087). Оттуда же взяты многие из доказательств?

Основным уравнением, сравнение с которым проводится при изучении (1), является $d^2y/dt^2 = [u^2(1 + \alpha^2 t^{-2}) - (2t)^{-2}]y$; $\alpha = m/u$ — фиксировано. Точки $t = \pm i\alpha$ соответствуют точкам $z = z_0 \pm i \cdot 0$. Решения этого уравнения имеют форму $t^{1/2}G_m(ut)$, где G_m — цилиндрическая функция порядка m.

N. D. Kazarinoff

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 393.

10259. Асимптотические теории для линейных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Лангер (Asymptotic theories for linear ordinary differential equations depending upon a parameter. Langer Rudolph E.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 3, 298—305 (англ.)

Излагаются (без доказательств) результаты одной из работ автора (РЖМат, 1957, 2274).

М. В. Федорюк

10260. Уравнения и системы дифференциальных, операторных, функциональных уравнений, функции в алгебре. Андреоли (Equazioni e sistemi differenziali, operatori funzionali, funzioni nelle algebre. Andreoli Giulio), Giorn. mat. Battaglini, 1958, 86, № 1, 1—65 (итал.)

Автор рассматривает ряд формальных свойств линейных систем дифференциальных уравнений. Показывается, что если $(z_1, \ldots, z_n)$ — решение линейной системы, то каждая z_k удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению порядка n; все эти уравнения получаются одно из другого или из исходной системы путем одних рациональных операций и дифференцирований. Если известно z_k, то остальные z_e выражаются линейно через z_k и ее производные до порядка $n-1$. Аналогичные свойства имеют все линейные комбинации z_k и ее производных. Даются правила для образования систем, решениями которых являются часть функций z_k

и их производных. Определяются симметрические функции от решений как выражения, которые не изменяются при переходе от одной системы линейно независимых решений к другой; такие функции выражаются с помощью некоторых миноров вронскиана. Во второй главе рассматриваются системы Риккати. Эти системы получаются из линейной системы переходом к неизвестным z_n/z_1 или требованием, чтобы замена $\zeta_1=z_1+\eta_2 z_2+\ldots+\eta_n z_n$, $\zeta_2=z_2, \ldots, \zeta_n=z_n$ приводила к $\zeta'_1=k\zeta_1$, или, исходя из уравнения n-го порядка, требованием, чтобы $\zeta=\eta_{n-1}z^{(n-1)}+\ldots+\eta_0 z$ удовлетворяла уравнению $\zeta'=k\zeta$. Для систем Риккати обобщается известное свойство сложного отношения и устанавливается ряд других свойств. A. Halanay

10261. Замечания о монотонных решениях дифференциальных уравнений. Исэки (A remark on monotone solutions of differential equations. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1959, **35**, № 7, 370—371 (англ.)

Доказывается известная теорема: Если матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ абсолютно интегрируемы на $[a, +\infty)$, то каждое монотонное решение $x(t)$ системы $dx/dt=P(t)x+Q(t)$, ограничено и имеет конечный предел: $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Результат представляет собой доказательство теоремы референта (РЖМат, 1957, 7869) с излишними ограничениями. Имеются очевидные опечатки. Например, напечатано: $Q(t)$ есть $n\times n$ матрица, вместо $n\times 1$ матрица, $x(T)\int_T^\alpha P(u)\,du$ вместо $\int_T^\alpha P(u)\,du\,x(T)$ и др.

Примечание референта. Для справедливости заключения теоремы достаточна интегрируемость матриц $P(t)$ и $Q(t)$ на $(t_0, +\infty)$. Если $P(t)$ и $Q(t)$ абсолютно интегрируемы на $(t_0, +\infty)$, то для каждого решения $x(t)$ существует $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ без предположения монотонности. Б. П. Демидович

10262. О накоплении возмущений в линейных системах. Гноенский Л. С., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1959, № 1, 24—29

Рассмотрена задача об определении максимально возможной в данный момент времени T величины модуля решения линейного дифференциального уравнения $x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)x=f(t)$ для случая, когда правая часть $f(t)$ этого уравнения ограничена по модулю $[|f(t)|\leqslant M_0]$ и имеет ограниченную производную первого порядка $[|f'(t)|\leqslant M_1]$. Частное решение уравнения записывается в виде $X(T)=\int_0^T G(T,u)f(u)du$, причем импульсная переходная функция $G(T,u)$ предполагается известной. При некоторых ограничениях, накладываемых на M_0 и M_1, разыскивается закон изменения $\varphi(t)=f'(t)$, при котором решение $X(T)$ принимает в момент T наибольшее возможное значение. На примере линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами показано, что при соблюдении условий $|f(t)|\leqslant M_0$, $|f'(t)|\leqslant M_1$ максимальное значение решения $X_{\max}(T)$ получается меньше, чем при соблюдении лишь одного условия $|f(t)|\leqslant M_0$. Н. Т. Кузовков

10263. Решение одной задачи для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Кривошеин Л. Е. В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 31—34

Пусть $y(x)$ есть решение линейного дифференциального уравнения $L[y(x)]=f(x)$, где $L[y(x)]=\sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(n-i)}(x)$, причем $a_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ непрерывны на $[a, b]$ и $a_0(x)=1$. Для случая $\theta_i\neq 0$ изучается существование и структура решений регулярной (в смысле теории интегральных уравнений) задачи

$$\theta_i y^{(i)}(x_0)=\alpha_i+\int_a^b \beta_i(t)\,P[y(t)]\,dt \qquad (1)$$

$(i=0, 1, \ldots, n-1;\quad x_0\in[a, b])$, где $P[y(t)]=\sum_{i=0}^m b_i(t)y^{(i)}(t)\not\equiv 0$. Если известна фундаментальная система решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ однородного уравнения $L[y(x)]=0$, то задача (1) сводится к исследованию решений линейной алгебраической системы уравнений. При $\theta_i=\alpha_i=0$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ получается задача, рассмотренная З. Ф. Суриковой (Докл. АН СССР, 1936, **1**, № 4). Б. П. Демидович

10264. Применение теории матриц к решению систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Байчаи (Anwendung der Matrizenrechnung zur Lösung gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten. Bajcsay P.), Period. polytechn. Electr. Engng, 1959, **3**, № 3, 217—231 (нем.)

Для линейной дифференциальной системы $dx/dt=[A(t)+B(t)]x$, $0\leqslant t\leqslant a$, с непрерывными матрицами $A(t)$ и $B(t)$, первая из которых диагональна, исследуется процесс последовательных приближений для нахождения решения, построенный по схеме:

$$x_1(t)=e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}x_0,$$

$$k>1,\ x_k(t)=e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}\left[x_0+\int_0^t e^{-\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma}B(\tau)\,x_{k-1}(\tau)\,d\tau\right].$$

Дается оценка погрешности k-го приближения (порядок погрешности $1/k!$). Ю. С. Богданов

10265. О некоторых свойствах линейных дифференциальных уравнений. Долежал, Курцвейль (O některých vlastnostech lineárních diferenciálních rovnic. Doležal Václav, Kurzweil Jaroslav), Aplikace mat., 1959, **4**, № 3, 163—176 (чешск.; рез. русск., англ.)

Исследуются свойства системы линейных дифференциальных уравнений $\dot{x}_i(t)=\sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k(t)+w_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, коэффициенты которых $a_{ik}(t)$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, и правые части $w_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, являются функциями, интегрируемыми по Лебегу.

Доказываются две теоремы (краткие обозначения: $x(t)=[x_i(t)]$, $w(t)=[w_i(t)]$, $c=[x_i(0)]$ — векторы, $A(t)=[a_{ik}(t)]$ — матрица). В первой из теорем найдена оценка отклонения решений двух (векторных) уравнений в случае, когда коэффициенты и правые части обоих уравнений близки друг другу в смысле метрики пространства L, т. е. предполагается, что

$$\rho(w_1, w_2)=\int_0^\pi \|w_1(\tau)-w_2(\tau)\|\,d\tau,\quad w_1, w_2\in L.$$

Теорема 1. Пусть $A_1(t)$, $A_2(t)$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ интегрируемы на $\langle 0, T\rangle$. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — векторы решений уравнений. Если

$$\alpha_i(t)=\exp\left(\int_0^t \|A_i(\tau)\|\,d\tau\right),$$

$$\beta_i(t)=\|c_i\|+\int_0^t \|w_i(\tau)\|\,d\tau,\quad i=1, 2,$$

то для $t \in <0, T>$ $\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant (\| c_1 - c_2 \| + \int_0^t \| w_1(\tau) - w_2(\tau) \| d\tau)\, \alpha_{1,2}(t) + \left(\int_0^t \| A_1(\tau) - A_2(\tau) \| d\tau\right) \alpha_1(t)\, \alpha_2(t)\, \beta_{2,1}(t)$

(где $\alpha_{1,2}(t)$, $\beta_{2,1}(t)$ означает $\alpha_1(t)$, $\beta_2(t)$ или же $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$).

Теорема 2. Пусть $w(t)$, $\widetilde{w}(t)$ интегрируемы, $A(t)$ непрерывна на $<0, T>$. Если вектор $z(t)$ есть решение уравнения $\dot{z}(t) = A(t)\, z(t) + A(t)\, \widetilde{w}(t)$, $z(0) = c$, то для вектора решения $x(t)$ уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + w(t), \quad x(0) = c$$

будет $x(t) = w^{(-1)}(t) + z(t) + r(t)$, причем для вектора $r(t)$ при любом $t \in <0, T>$

$$\| r(t) \| \leqslant \left\{\alpha(t) \exp\left(2 \int_0^t \| A(\tau) \| d\tau\right\} \times \right.$$

$$\times \int_0^t \| \widetilde{w}(\tau) - w^{(-1)}(\tau) \| d\tau,$$

причем $\alpha(t) = \max\limits_{\tau \in <0,t>} \| A(\tau) \|$, $w^{(-1)}(t) = \int_0^t w(\tau)\, d\tau$.

При помощи теоремы 2 авторы исследуют в особенности тот случай, когда элементы вектора $w(t)$ близки, в определенном смысле, к δ-функции Дирака. Использование изложенных методов показано на следующих примерах: установить прохождение тока в модуляторе с периодически переменным сопротивлением, дать оценку точности приближенного решения дифференциального уравнения $\xi''(t) + G^2(t)\, \xi(t) = 0$, проследить поведение налаженной цепи суперрегенеративного приемника, возбуждаемого импульсом напряжения. В заключение определена зависимость решения от k-й примитивной функции от функции $w(t)$ (обобщение теоремы 2).

O. Konícek

10266. Теоретическое и экспериментальное исследование колебаний линейных систем при прохождении через критические области. Пландер (Teoretické a experimentálne vyšetrovanie kmitania lineárnych sústav pri prechode cez kritické oblasti. Plander Ivan), Strojnícky časop., 1959, **10**, № 1, 5—30 (словацк.; рез. русск., нем.)

Решается задача перехода затухающей линейно колебательной системы с n степенями свободы ($n \geqslant 1$) через критические области. Приводятся экспериментальные методы исследования нестационарных явлений, связанных с прохождением через критические области. Для произвольного n решение разбирается лишь в общих чертах, в случае $n=2$ система разбирается детально. Решение получено при помощи преобразования Лапласа. Теоретический анализ дополнен экспериментальными результатами, полученными на механической испытательной системе и на электрической модели этой системы. При этом показано влияние затухания на характер переходного явления. V. Zdeněk

10267. Порядок особенности в теории Фукса. Мозер (The order of a singularity in Fuchs' theory. Moser Jürgen), Math. Z., 1960, **72**, № 4, 379—398 (англ.)

Линейные дифференциальные системы

$$dy/dx = A(x)\, y \tag{1}$$

и

$$dz/dx = B(x)\, z, \tag{2}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — аналитические матрицы-функции n-го порядка с полюсами при $x = 0$, названы эквивалентными вблизи начала, если существует преобразование

$$y = T(x)\, z, \tag{3}$$

переводящее (1) в (2), причем $T(x)$ имеет при $x = 0$ разве лишь полюс и $\det T(x) \neq 0$. Автор расширяет таким образом понятие эквивалентности систем (1) и (2) в смысле Г. Д. Биркгофа, где требуется, чтобы $T(0)$ была единичной матрицей E (аналогичная обобщенная эквивалентность вводилась, как указывает автор, ранее (A. Loewy, Math Ann., 1918, 78, 1—51, 343—369). Хорном (J. Horn) было доказано, что $x = 0$ является регулярной особой точкой для (1) в том и только в том случае, когда (1) эквивалентна системе

$$du/dx = C(x)\, u \tag{4}$$

с $C(x)$, имеющей при $x = 0$ полюс 1-го порядка. В статье изложен метод, позволяющий выяснить с помощью конечного числа операций, эквивалентнали данная система (1) какой-нибудь системе (4), и указан способ построения $T(x)$. Порядком особенности $A(x) \equiv x^{-p} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu$ ($A_0 \neq 0$, p — целое) названо число $m(A) \equiv \max\left\{0,\ p - 1 + \frac{r}{n}\right\}$, где r-алгебраический ранг матрицы A_0. Далее вводится $\mu(A)$ — наименьший из порядков особенностей систем (2), эквивалентных (1): $\mu(A) \equiv \min\limits_T m(T^{-1}AT - T^{-1}T')$. Величина $\mu(A) - 1$ является обобщением ранга в смысле Пуанкаре системы (1). Если $\mu(A) < m(A)$, то $A(x)$ называется редуцируемой. Показано, что при $m(A) > 1$: а) необходимым и достаточным условием редуцируемости $A(x)$ служит тождественное (относительно λ) обращение в 0 полинома $x^r \det(\lambda E + x^{p-1}A(x))|_{x=0}$; б) матрица $T(x)$, осуществляющая уменьшение порядка особенности $m(A)$ при преобразовании (3), имеет вид

$$T = (P_0 + xP_1)[1, 1, \ldots, 1, x, x, \ldots, x],$$

где P_0, P_1 — постоянные матрицы, P_0 — неособенная, $[\alpha, \beta, \ldots, \omega]$ — диагональная матрица. Для матрицы $A(x)$ в том частном случае, когда (1) является линейным дифференциальным уравнением, записанным в матричном виде, всегда справедливо $m(A) = \mu(A)$ (последний факт можно рассматривать как обобщение известной теоремы Фукса о форме линейного дифференциального уравнения, имеющего $x = 0$ регулярной особой точкой). В статье доказан ряд содержательных вспомогательных предложений и рассмотрен интересный пример. Библ. 7 назв. Ю. С. Богданов

10268. Заметка о разложении на уравнения первого порядка линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами высшего порядка. О'Брайен (Note on decomposition into first order of multi-order linear differential equations with constant coefficients. O'Brien J. P.), Comput. J., 1959, **2**, № 3, 144 (англ.)

10269. Операционное решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Коппел (The operational solution of linear differential equations with constant coefficients. Coppel W. A.), Ann. polon. math., 1959, **7**, № 1, 113—126 (англ.)

Дается символическое решение задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и системы таких уравнений. Метод основывается на теореме об однозначной разре-

щимости в промежутке $0 \leqslant t < T$ при нулевых начальных данных уравнения $P(D)X = f(t)$, где $D = \frac{d}{dt}$, $P(D) = \sum_{l=0}^{n} p_l D^l$, p_l — const, $f(t)$ непрерывна, причем X называется решением покоя. С помощью этого понятия определяются рациональные функции от D и устанавливается ряд свойств, в частности, доказывается формула, позволяющая сразу учитывать начальные условия. Для перехода от символической формы решения к обычной привлекается свертка. Метод применим к линейным разностным уравнениям с постоянными коэффициентами. С. И. Осипов

10270. О почти периодических решениях систем дифференциальных уравнений. Харасахал В. Х., КазССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1959, вып. 8(12), 92—97 (рез. каз.)

1. Для линейных систем вида: $dx_s/dt = \sum_{j=1}^{n} p_{sj} x_j + f_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, где $p_{sj}(t)$ и $f_s(t)$ — почти периодические функции, высказываются условия существования единственного почти периодического решения.

2. Методы доказательств теорем Фавара, приведенные в книге „Почти периодические функции" Б. М. Левитана (ГТТИ, 1953), переносятся на случай нелинейных систем вида: $dx_s/dt = \omega_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, где функции ω_s почти периодические по t. Б. Ф. Былов

10271. Асимптотические ряды для решений линейных дифференциально-разностных уравнений. Белман (Asymptotic series for the solutions of linear differential-difference equations. Bellman Richard), Rend. Circolo mat. Palermo, 1958, 7, № 3, 261—269 (англ.)

Рассматривается скалярное линейное дифференциально-разностное уравнение

$$u'(t) = a(t)\,u(t) + b(t)\,u(t-1), \qquad (1)$$

где коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ при $t \to +\infty$ допускают асимптотические разложения $a(t) \sim a_0 + a_1/t + a_2/t^2 + \ldots$, $b(t) \sim b_0 + b_1/t + b_2/t^2 + \ldots$ Доказывается, что если характеристическое уравнение $z = a_0 + b_0 e^{-z}$ имеет единственный действительный корень λ и этот корень простой, то для уравнения (1) существует решение вида $u(t) \sim e^{\lambda t} t^r (1 + c_1/t + c_2/t^2 + \ldots)$, где

$$r = (a_1 + b_1 e^{-\lambda})/(1 - b_0 e^{-\lambda}).$$

Высказывается утверждение, что аналогичный результат может быть получен также для матричных линейных дифференциально-разностных уравнений, коэффициенты которых допускают асимптотические разложения. Б. П. Демидович

10272. О приложениях операторного исчисления к линейным дифференциально-разностным уравнениям с постоянными коэффициентами. Влока (Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wloka Josef), J. reine und angew. Math., 1959, 202, № 1-2, 107—128 (нем.)

Операторное исчисление Микусинского применяется к дифференциально-разностным уравнениям вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} x(t) - \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i}{dt^i} x(t-\tau) = f(t),$$

где a_i, b_i и τ — действительные постоянные, $\tau > 0$, $f(t)$ — непрерывная функция, с граничными условиями $x^{(k)}(+0) = d_k$ $(k = 0, 1, \ldots, (n-1))$, $x(t) = 0$ при $t < 0$. Исследуется не только случай $n \geqslant m$, но и случай $n < m$. Приведено несколько примеров. Рассматривается также применение операторного метода к решению дифференциально-разностных уравнений в частных производных с отклонением аргумента лишь по одному переменному следующего вида:

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial\lambda^{\mu}\,\partial t^{\nu}} + \sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{n_1} \beta_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t-\tau)}{\partial\lambda^{\mu}\,\partial t^{\nu}} = \varphi(\lambda, t),$$

$a_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$ и τ — постоянные, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, $0 \leqslant t < \infty$, $\tau > 0$, $x(\lambda, t) = 0$ при $t < 0$. Рассматриваются пять примеров: $\partial x(\lambda, t)/\partial\lambda = x(\lambda, t-1)$, $x(\lambda_0, t) = f(t)$, $\partial^2 x(\lambda, t)/\partial\lambda^2 - \partial^2 x(\lambda, t-2)/\partial t^2 = 0$, $x(0, t) = f(t)$, $x_\lambda(0, t) = g(t)$, $x(\lambda, 0) = 0$, $x_t(\lambda, 0) = 0$ и др. Изложенные методы без существенных изменений переносятся на уравнения с несколькими отклонениями аргумента, кратными одному из них. Л. Э. Эльсгольц

10273. Теория устойчивости и сопряженные операторы для дифференциально-разностных уравнений. Белман, Кук (Stability theory and adjoint operators for linear differential-difference equations. Bellman Richard, Cooke Kenneth L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 92, № 3, 470—500 (англ.)

Рассматривается линейное уравнение с запаздывающим аргументом нейтрального типа

$$z'(t+h_m) + \sum_{n=0}^{m-1} A_n(t)\,z'(t+h_n) + \sum_{n=0}^{m} B_n(t)\,z(t+h_n) = 0, \qquad (1)$$

где h_n — постоянные, $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m$, $z(t)$ — n-вектор, $A_n(t)$ и $B_n(t)$ — (n, n)-матрицы, и соответствующая возмущенная система

$$z'(t+h_m) + \sum_{n=0}^{m-1} [A_n(t) + C_n(t)]\,z'(t+h_n) + \sum_{n=0}^{m} [B_n(t) + D_n(t)]\,z(t+h_n) = 0. \qquad (2)$$

Устанавливаются условия, при которых из ограниченности решений уравнения (1) следует ограниченность решений уравнения (2). Если уравнения (1) и (2) являются уравнениями с запаздывающим аргументом (т. е. $A_n = C_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots, (m-1)$), а также при постоянных матрицах A_n и B_n, $n = 0, 1, \ldots, m$, условия теоремы значительно упрощаются. При доказательстве основных теорем существенно используется некоторое интегральное представление решений линейных неоднородных уравнений с постоянными отклонениями аргумента. Ядром этого представления служит удовлетворяющее вполне определенным условиям решение некоторого уравнения, называемого автором сопряженным. Л. Э. Эльсгольц

10274. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. Гельфанд И. М., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 191—198

Пусть $p(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, определенная на интервале $(0, \pi)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + p(x)\,y = \lambda y \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0. \qquad (2)$$

равнение (1) сокращенно можно записать в виде $-D^2+p(x))y=\lambda y$. Если обозначить через λ_n собст-енные значения задачи (1) — (2), то, очевидно,

$$\mathrm{sp}\,(-D^2+p+\zeta E)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n+\zeta}. \qquad (3)$$

Изучается асимптотическое поведение левой и правой астей равенства (3) и на основе этого выводятся важ-ые тождества для регуляризованных сумм степеней обственных значений задачи (1) — (2). Регуляризован-ой суммой $\sum_{n=1}^{\infty}{}'\lambda_n^k$ (k фиксировано) называется сум-а, члены которой получаются вычитанием из λ_n^k той асти их асимптотики, которая дает расходимость.

Доказывается, что если $p(x)$ бесконечно дифференци-уема и обращается в нуль в окрестности точек 0 и π, о.

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\lambda_n^k=0. \qquad (4)$$

Если функция $p(x)$ в окрестности концов отрезка $[0, \pi]$ е равна нулю, то в правой части равенства (4) будет тоять выражение, вообще говоря, отличное от нуля.

Б. М. Левитан

10275. Системы дифференциальных уравнений с гра-ничными условиями более чем в двух точках. У а й-б е р н (Differential systems with boundary conditions at more than two points. Whyburn William M. Proc. conf. different. equations, College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 1—21) (англ.)

Эта работа связана с системами n обыкновенных ифференциальных уравнений с граничными условиями, аданными более чем в двух точках из фиксированного нтервала $X: a\leqslant x\leqslant b$. Для систем, включающих на-альные значения более чем в одной точке, кратко из-агаются известные результаты; в случае, когда систе-а представима в виде

$$y_n'=f_n(x, y),\ y_i'=f_i(x, y)+g_i(x, y)\,y_{i+1}, \qquad (1)$$

втор, применяя теорему Конти (РЖМат, 1955, 3757), станавливает различные предложения, относящиеся к ависимости решений от начальных точек и начальных начений. Теорема существования решений с начальны-и значениями более чем в одной точке устанавливает-я и для систем более общего вида, чем (1). Последние ва раздела работы посвящены литературе о системах инейных дифференциальных уравнений с граничными словиями в конечных точках отрезка и в точках задан-ого подмножества $a<x<b$ подходящего характера; бращается особое внимание на случай разрывных ре-лений, ограниченных некоторыми специальными усло-иями.

W. T. Reid

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 6, 481.

10276. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения при общих краевых условиях. Т о д о-р о в И в., Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959; 4, 131—142 (болг.; рез. русск., франц.)

Изучается уравнение

$$L(u)\equiv u^{(n)}(x)+p_1(x)\,u^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)u(x)=f(x) \qquad (1)$$

ри условиях

$$A_i(u)=0\ (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

де $p_k(x)$ и $f(x)$ заданы и непрерывны на конечном сег-енте $[a, b]$, а $A_i(u)$ — линейные функционалы, опреде-енные на $C^{(n)}_{[a,b]}$ и такие, что определитель

$$D[A_i(y_k)]=\begin{vmatrix} A_1(y_1)\ldots A_1(y_n)\\ \ldots\ldots\ldots\\ A_n(y_1)\ldots A_n(y_n)\end{vmatrix}$$

отличен от нуля для любой фундаментальной системы $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ решений однородного уравнения $L(u)=0$.

Для того чтобы решение $u(x)$ уравнения (1) при условиях (2) было представимо в виде $u(x)=\int_a^b f(t)\,d_t\gamma(x, t)$, где $\gamma(x, t)$ — некоторая функция с ограниченной вариацией, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие константы M_i, что $|A_i(u)|\leqslant M_i \max\limits_{k=0,1,\ldots,n}\sup\limits_{a<x<b}|u^{(k)}(x)|$. Для существования ограниченной и измеримой функции Грина $G(x, t)$ такой, что $u(x)=\int_a^b G(x, t)f(t)\,dt$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие константы M_i, что

$$|A_i(u)|\leqslant M_i\left\{\max_{k=0,1,\ldots,n-1}\sup_{a<x<b}\left[|u^{(k)}(x)|+\int_a^b|u^{(n)}(x)|\,dx\right]\right\}.$$

Далее приводятся аналогичные условия существования суммируемой и непрерывной функции Грина.

Г. А. Каменский

10277. О краевых задачах для дифференциального уравнения второго порядка. О п я л ь (Sur un problème aux limites pour l'équation différentielle du second ordre. Opial Z.), Ann. polon. math., 1960, 7, № 2, 223—231 (франц.)

Изучается уравнение

$$u''=f(t, u, u') \qquad (1$$

с краевыми условиями

$$u'(a)=A,\ u(b)+hu'(b)=B, \qquad (2)$$

где $a<b$, h, A, B — заданные постоянные, $f(t, u, v)$ определена и непреры на в пространстве t, u, v.

Т е о р е м а 1. Предположим, что функция $f(t, u, v)$ определена внутри обла и R: $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<u<+\infty$, $-\infty<v<+\infty$, первые производные по отношению к переменным u и v непрерывны, внутри области R $|f_u(t, u, v)|\leqslant M$ и для K неотрицательного $f_v(t,u,v)\leqslant K$. В этих предположениях краевая задача (2) для уравнения (1) допускает единственное решение, если длина $(b-a)$ интервала (a, b) меньше, чем длина интервала $[0, \alpha]$, в котором интеграл $w(t)$ уравнения Ри ккати $w'=w^2+Kw+M$ такой, что $w(0)=0$, удовлетворяет неравенству $w(t)\leqslant\frac{1}{|h|}$ в случае, когда $h\neq 0$, и меньше длины интервала $[0, \alpha)$, в котором существует интеграл $w(t)$, в случае $h=0$.

Далее рассматривается уравнение

$$u''=f(t, u) \qquad (3)$$

со следующими краевыми условиями:

I. $u(0)=A$, $\sup|u(t)|<\infty$, $0\leqslant t<\infty$;

II. $u'(0)=B$, $\sup|u(t)|<\infty$, $0\leqslant t<\infty$;

III. $u'(0)-hu(0)=c$ $(h>0)$, $\sup|u(t)|<\infty$, $0\leqslant t<\infty$.

Т е о р е м а II. Предположим, что функция $f(t, u)$ определена и непрерывна в области $0\leqslant t<\infty$, $-\infty<u<\infty$, и что существуют числа a и b $(a<b)$ такие, что $f(t, u)\leqslant 0$ для $t\geqslant 0$ и $u\leqslant a$, $f(t, u)\geqslant 0$ для $t\geqslant 0$ и $u\geqslant b$. В этих предположениях краевые задачи I и III для уравнения (3) имеют по крайней мере одно решение.

Т е о р е м а III. Предположим, что функция $f(t, u)$ определена и непрерывна в области $0\leqslant t<\infty$, $-\infty<u<\infty$, и что существуют три числа a, b $(a<b)$ и $m>0$ такие, что $f(t, u)\leqslant -m$ для $t\geqslant 0$ и $u\leqslant a$, $f(t, u)\geqslant m$ для $t\geqslant 0$ и $u\geqslant b$. При этих предположе-

ниях краевая задача II для уравнения (3) допускает по крайней мере одно решение.

Теорема IV. Если непрерывная функция $f(t,u)$ не убывает относительно переменной u, то тогда краевые задачи I и III для уравнения (3) не могут иметь более одного решения. Если непрерывная функция $f(t,u)$ строго возрастает относительно переменной u, то краевая задача II для уравнения (3) допускает не более одного решения.

Эти теоремы обобщают результаты, полученные ранее Кордуняну (РЖМат, 1957, 4785; 1958, 7700).

Ю. А. Клоков

10278. О почти периодических решениях дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Опяль (Sur les solutions presque-périodiques des équations différentielles du premier et du second ordre. Opial Z.), Ann. polon. math., 1959, **7**, № 1, 51—61 (франц.)

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$x' = f(t,x), \qquad (1)$$

где функция $f(t,x)$ определена и непрерывна на плоскости (t,x), почти периодическая по t равномерно относительно x и монотонна по x. Доказывается, что всякое ограниченное решение уравнения (1) есть почти периодическое. Дополнительно устанавливается, что решения уравнения (1), ограниченные в интервале $(t_0,+\infty)$ или в интервале $(-\infty,t_0)$, представляют собой асимптотически почти периодические функции в смысле Фреше. Теорема обобщает результаты референта (РЖМат, 1954, 3693) и Георгиу (РЖМат, 1957, 4792).

Для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$x'' = f(t,x,x'), \qquad (2)$$

где функция $f(t,x,u)$ непрерывная, почти периодическая по t равномерно относительно совокупности переменных (x,u) и не убывающая по x, получено обобщение результата Кордуняну (РЖМат, 1956, 4477).

Б. П. Демидович

10279. О монотонных и положительных решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Джонс (On monotone and positive solutions of second order nonlinear differential equations. Jones John, Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 570—573 (англ.)

Изучается поведение при $x \to \infty$ решений уравнения

$$y'' + f(y,y')y' + g(y) = 0, \qquad (1)$$

где $f(y,y') \geqslant 0$, $yg(y) \geqslant 0$ при всех y и y'. Получены достаточные условия монотонности решений при $x \to \infty$, а также условия, обеспечивающие колебательный характер решений. В формулировках теорем требуется сходимость или расходимость интегралов, зависящих не только от известных функций f и g, но и от неизвестного нам решения $y(x)$ уравнения (1). А. Ф. Филиппов

10280. О периодическом решении одного нелинейного дифференциального уравнения. Морimoto (On the periodic solution of a certain non-linear differential equation. Morimoto Hiroshi), Math. japon., 1958, **5**, № 1, 39—43 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + f(x,t)\dot{x} + g(x,t) = p(t), \qquad (1)$$

где функции f, g, p непрерывны и имеют период ω по t; функции f и g удовлетворяют условию Липшица по x и имеют непрерывные производные по t; $\int_0^\omega p(t)dt = 0$. Предполагается, что $F(x,t)\operatorname{sgn} x \to \infty$ при $|x| \to \infty$, $G(x) > 0$ при $x \neq 0$, $g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant b_0 > 0$ при $|x| > c_0$, $b_1 |g(x,t)| < F(x,t)\operatorname{sgn} x \geqslant |\partial G/\partial t + \sqrt{2}\,\partial F/\partial t|$ при $|x| > c_1$, где $0 < b_1 < 1$, $F(x,t) = \int_0^x f(x,t)\,dx$, $G(x,t) = \int_0^x g(x,t)\,dx$. Тогда уравнение (1) имеет решение периода ω.

А. Ф. Филиппов

10281. Простые самовозбужденные колебания. Рейссиг (Einfache selbsterregte Schwingungen. Reissig Rolf), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959, 4, 55—60 (нем.; рез. болг., русск.)

Излагается содержание одной из ранее опубликованных работ автора (РЖМат, 1957, 7024). А. Ф. Филиппов

10282. Об устойчивости вынужденных колебаний с трением. Рейссиг (Über die totale Stabilität erzwungener Reibungsschwingungen. Reissig Rolf), Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. Kl. Math., Phys. und Techn., 1959, № 1, 28 S., ill.) (нем.)

Исследуется устойчивость решений уравнения

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + \mu\operatorname{sgn}\dot{x} + G(x) = E(t), \qquad (1)$$

описывающего вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при наличии вязкого трения $F(\dot{x})$ и сухого трения $\mu\operatorname{sgn}\dot{x}$. Предполагается, что функция E непрерывна, а F и G удовлетворяют условию Липшица; функция $E(t)$ при $t \to \infty$ колеблется между $-M$ и M; функции F и G возрастающие, $F(0) = G(0) = 0$; $F(+\infty) \geqslant F > M - \mu$, $F(-\infty) \leqslant -F$; $G(+\infty) \geqslant G > 2M$, $G(-\infty) \leqslant -G$. При этих условиях доказывается существование ограниченного при $t \to +\infty$ решения уравнения (1). Если, кроме того, при любых y_1 и y_2 $|F(y_1) - F(y_2)| \geqslant 2D|y_1 - y_2|$, производная $G'(x)$ непрерывна, $0 < k_1^2 \leqslant G'(x) \leqslant k_2^2$, $k_1 > 2D\sqrt{2} > 2(k_2 - k_1)$, то любое ограниченное решение является устойчивым относительно постоянно действующих возмущений; если же $4k_1D > k_2^2$, то ограниченное решение асимптотически устойчиво (при достаточно малом начальном возмущении). Исследуется также устойчивость решений уравнения (1) в случае $G(x) \equiv x$ по отношению к замене постоянного коэффициента трения μ на функцию $\mu(t)$. Полученные результаты применимы, в частности, тогда, когда трение покоя больше трения скольжения, что обычно бывает в случае трения твердых тел.

А. Ф. Филиппов

10283. Свободные колебания системы с выпукло-вогнутой характеристикой упругости. Вальдман А. П., LatvPSR Zinātņu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1959, № 5, 65—72

Рассматриваются свободные незатухающие колебания системы с одной степенью свободы $\ddot{\psi} + V(\psi) = 0$. Пользуясь приближенной формулой для частоты колебаний из книги Пановко Я. Г., Основы прикладной теории упругих колебаний, Машгиз, 1957, автор определяет частоту колебаний в том случае, когда график функции $V(\psi)$ (характеристика упругой силы) — ломаная, состоящая из 5 звеньев, несимметричная относительно начала координат.

А. Ф. Филиппов

10284. Ограниченность решений линейного уравнения. Уц (Boundedness of solutions of a linear equation. Utz W. R.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 4, 356—358 (англ.)

Изучается вопрос об ограниченности при $t \to +\infty$ решений дифференциального уравнения

$$d^2x/dt^2 + \frac{a}{t}\,dx/dt + q(t)x = 0. \qquad (1)$$

Доказывается: 1) что все решения (1) ограничены при $t \to +\infty$, если $0 \leqslant a \leqslant 2$ и при всех достаточно больших t $q'(t) \leqslant 0$ и $t^a q(t) > \delta > 0$; 2) что для всех решений $x(t)$, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, если $a \geqslant 0$ и при достаточно больших t, $q'(t) \geqslant 0$ и $q(t) > 0$.

Примечание референта. При формулировке второго предложения автор ошибочно допускает возможность случая $a = 0$. Л. И. Камынин

10285. Об отсутствии сопряженных точек у линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Мак-Карти (On the disconjugacy of second-order linear differential equations. McCarthy P. J.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 10, 892—894 (англ.)

Предположим, что функции $r(x) > 0$ и $p(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$. Если существует положительная непрерывно дифференцируемая функция $w(x)$ такая, что внутри интервала (a, b)

$$\left|\frac{w}{r} + \frac{p}{w}\right| + \left|\frac{w}{r} - \frac{p}{w}\right| + \left|\frac{w'}{w}\right| \leqslant \frac{2\pi}{b-a}$$

и хотя бы в одной точке справедливо строгое неравенство, то все решения уравнения $(r(x)y')' + p(x)y = 0$ имеют внутри (a, b) не более одного нуля. Отмечено, что ни это условие, ни его обобщение не являются необходимыми. И. М. Соболь

10286. О степени регулярности поверхностей, образованных из асимптотических решений дифференциальных уравнений. Шмидт (On the degree of regularity of surfaces formed by the asymptotic integrals of differential equations. Szmydt Z.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 294—313 (англ.)

Пусть правые части системы

$$dr_{i_t}/dt = F^{(i)}(r_{i_1}, \ldots, r_{i_n}), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

принадлежит классу C^p (имеют непрерывные производные p-го порядка), $F^{(i)}(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Пусть все характеристические числа матрицы (c_{ij}), $c_{ij} = F^{(i)}_{r_j}(0, \ldots, 0)$, имеют действительные части, отличные от нуля, и пусть существуют характеристические числа с положительной действительной частью и характеристические числа с отрицательной действительной частью. Пусть N — подмножество пространства E_n, образованное из тех решений системы $dr_{i_t}/dt = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} r_{i_j}$, $i = 1, \ldots, n$, которые сходятся к нулю для $t \to \infty$. Пусть S — множество, образованное из тех решений системы (1), которые сходятся к нулю. Доказано, что S есть многообразие класса C^p и что S касается N. Доказательство проведено методом последовательных приближений и довольно сложно. J. Kurzweil

10287. Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами. Митропольский Ю. А., Укр. матем. ж., 1958, 10, № 3, 270—279 (рез. англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{h}/dt &= H(t)\,\mathbf{h} + \mathbf{Q}(t, g, \mathbf{h}, \varepsilon), \\ dg/dt &= \omega(t) + P(t, g, \mathbf{h}, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\mathbf{h}$ и $\mathbf{Q}$ — $(n-1)$-мерные вектор-функции, $H(t)$ — ограниченная $(n-1)\times(n-1)$ матрица, g и P — скалярные функции, $\omega(t)$ — ограниченная функция и ε — малый положительный параметр. Предполагаются выполненными следующие условия: 1) P и $\mathbf{Q}$ определены в области $G(\rho_0, \varepsilon_0) = \{|t| < +\infty, \ |g| < +\infty, \ \mathbf{h} \in U_{\rho_0}(0), \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$; 2) $|P(t, g, \mathbf{0}, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon)$, $|\mathbf{Q}(t, g, \mathbf{0}, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon)$, где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; 3) в любой подобласти $G(\rho, \varepsilon)$, где $\rho \in (0, \rho_0)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, функции P и $\mathbf{Q}$ удовлетворяют условиям Липшица по совокупности переменных g и $\mathbf{h}$, с постоянной Липшица $\lambda(\varepsilon, \rho) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\rho \to 0$; 4) матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпенко (РЖМат, 1955, 724), в частности для канонической фундаментальной матрицы $U(t, \tau)$ укороченной системы $dU/dt = H(t)U$ справедлива оценка $|U(t, \tau)| \leqslant Ke^{-\gamma(t-\tau)}$ при $t \geqslant \tau$, где K и γ — положительные постоянные. Пользуясь методом Н. Н. Боголюбова, автор доказывает следующую теорему: Если система (1) удовлетворяет условиям 1) — 4), то существуют положительные постоянные ρ^* и ε^* такие, что для каждого $\varepsilon < \varepsilon^*$ система (1) имеет единственное однопараметрическое интегральное многообразие

$$\mathbf{h} = \mathbf{f}(t, g, \varepsilon) \quad (|t| < +\infty, \ |g| < +\infty), \qquad (2)$$

где $|\mathbf{f}(t, g, \varepsilon)| \leqslant D(\varepsilon) < \rho^*$, $|\mathbf{f}(t, g', \varepsilon) - \mathbf{f}(t, g'', \varepsilon)| \leqslant \Delta(\varepsilon)|g' - g''|$, причем $D(\varepsilon) \to 0$ и $\Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Это многообразие устойчиво в том смысле, что любое решение $\mathbf{h} = \mathbf{h}_t$ системы (1), с начальными значениями из $U_{\rho^*}(0)$, по экспоненциальному закону неограниченно приближается к многообразию (2) при $t \to +\infty$. Б. П. Демидович

10288. Об операторе преобразования, порождаемом дифференциальным уравнением 2-го порядка и условием на бесконечности. Агранович З. С., Уч. зап. гос. пед. ин-та, 1957, 21, 3—8

Доказана следующая теорема, усиливающая теорему референта об операторе преобразования (РЖМат, 1957, 423). Пусть

$$y'' - v(x)y + \lambda^2 y = 0 \qquad (1)$$

и выполнено условие $\int_0^\infty x\,|v(x)|\,dx < \infty$. Тогда при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ существует решение (1), имеющее вид: $y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)\,e^{i\lambda t}\,dt$, причем $\int_x^\infty |K(x, t)|\,dt < \infty$; $\int_0^\infty \int_x^\infty |K(x, t)|^2\,dt\,dx < \infty$. Б. Я. Левин

10289. К вопросу об устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений. Лыкова О. Б., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 3, 251—255 (рез. англ.)

Исследуется устойчивость изолированного статического решения $x = 0$ нелинейной системы

$$dx/dt = X(x) \qquad (1)$$

($x, X \in E_n$; $X(0) = 0$), когда правая часть ее получает малые возмущения вида $\varepsilon X^*(t, x, \varepsilon)$, где X^* — достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, периодическая по t. Используя теорему усреднения Н. Н. Боголюбова, для критического случая пары мнимых корней уравнения $\det[I_n z - X'_x(0)] = 0$ при остальных корнях, имеющих отрицательные действительные части, автор устанавливает достаточные условия равномерной по параметру $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ устойчивости при $t \to +\infty$ тривиального решения системы (1). Б. П. Демидович

10290. Об одной теореме Перрона. Кордуняну (Sur un théorème de Perron. Corduneanu C.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1959, Sec. 1, № 1, 33—36 (франц.; рез. русск., рум.)

Рассматривается уравнение

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \qquad (1)$$

где $A(t)$ и $f(t, x)$ — вектор-функции, определенные на множестве $J \times \{x; \|x\| \leqslant a\}$, где $x \in R^n$. Вводится функциональное пространство M, состоящее из интегрируемых по Лебегу вектор-функций $\varphi(t)$ таких, что $\int_t^{t+1} \|\varphi(\tau)\|\,d\tau$ равномерно ограничены для $t \in (0, \infty)$ и M; вводится норма с помощью формулы

$$|\varphi|_M = \sup_{t \subset J} \int_t^{t+1} \|f(\tau)\|\,d\tau.$$

Предполагается, что: а) $A(t) \in M$; б) $f(t, x)$ измерима по t и непрерывна по x на множестве $J \times \{x; \|x\| \leqslant a\}$ и существует неотрицательная вектор-функция $\varphi(t) \in M$ та-

кая, что $\| f(t,x) \| \leqslant \varphi(t)$, $\| x \| \leqslant a$; γ) система $dx/dt = A(t)x + f(t)$ допускает по меньшей мере одно ограниченное решение на $J = [0,\infty)$, каким бы ни было $f \in M$.

Устанавливается теорема: Если система (1) удовлетворяет условиям α), β), γ), то система (1) имеет хотя бы одно ограниченное на $[0,\infty)$ решение (удовлетворяющее уравнению почти всюду). Методом доказательства является применение принципа А. Н. Тихонова о существовании неподвижной точки преобразования в локально выпуклом топологическом пространстве. В. В. Немыцкий

10291. Стандартизация и упрощение систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих точку поворота. Территтин, Гаррис (Standardization and simplification of systems of linear differential equations involving a turning point. Turrittin H. L., Harris W. A., Jr), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 3, 316—324 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$\varepsilon^h (dX/dt) = A(t,\varepsilon)X, \qquad (1)$$

где h — целое число, ε — малый параметр, $A = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t)$, ряд сходится при $|t| < t_0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $A_k(t)$ регулярны при $|t| < t_0$. Точка $t = 0$ называется точкой поворота, если при $t = 0$ матрица $A_0(t)$ имеет кратные корни.

Теорема. Если $\det \| \lambda I - A_0 \| = \varphi_1(\lambda,t)\,\varphi_2(\lambda,t)$, где $\varphi_1(\lambda,t)$, $\varphi_2(\lambda,t)$ — полиномы и при $|t| < t_0$ корни φ_1 не совпадают с корнями φ_2, то систему (1) можно с помощью аналитического преобразования $X = [p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \ldots + \varepsilon^M p_M(t)]Y$ привести к виду

$$\varepsilon^h (dY/dt) = \left\{ \sum_{j=0}^{L} \varepsilon^j \begin{pmatrix} B_{1j}(t) & 0 \\ 0 & B_{2j}(t) \end{pmatrix} + \sum_{j=L+1}^{\infty} \varepsilon^j B_j(t) \right\} Y. \qquad (2)$$

Здесь $p_j(t)$ — голоморфные при $|t| < t_0$ матрицы, $\det p_0(0) \neq 0$, B_{1j}, B_{2j}, B_j — голоморфные квадратные матрицы, ряд сходится при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|t| < t_1 \cdot L$ может быть произвольно большим.

Такое приведение авторы называют асимптотическим. Кроме того, приведены все канонические виды систем, к которым можно асимптотически привести систему из двух уравнений в окрестности точки поворота. Доказательства отсутствуют. М. В. Федорюк

10292. Некоторые критерии устойчивости решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Ливартовский И. В., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 4, 733—736

В работах М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера (РЖМат, 1959, 362, 369) дан метод построения системы первого приближения для исследования устойчивости периодических решений в системах

$$dz/dt = f(z,t) \qquad (1)$$

с разрывными правыми частями (z — n-мерный вектор). В реферируемой статье этот метод развивается на случай произвольных неустановившихся движений в разрывных системах (1). В качестве системы первого приближения вдоль невозмущенного движения $z = z^0(t)$ принимается совокупность линейных преобразований $x(t_0) = z(t_0) - z^0(t_0) \to x(t) = z(t) - z^0(t)$, определенных траекториями системы $dx/dt = P(t)x$ ($\{P\}_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{z^0(t)}$) в областях непрерывности $f_i(z(t),t)$ и линейными преобразованиями $x(t_\alpha + 0) = S_\alpha\, x(t_\alpha - 0)$ в точках пересечения t_α кривой $z^0(t)$ с поверхностями разрыва f_i. (Матрицы S_α определены углами между траекторией $z^0(t)$ и поверхностями разрыва f). Для изучаемого разрывного случая устанавливаются критерии устойчивости, соответствующие известным критериям К. П. Персидского (Изв. Физ. матем. о-ва. Казахск. ун-т, 1936, 8, 47), О. Перрона (Perron O., Math. Z., 1930, 32, 703), И. Г. Малкина (Сб. тр. Казанского Авиац. ин-та, 1934, № 2, 21) в случае непрерывных систем. Приведем в качестве примера формулировку модификации критерия О. Перрона. Если для произвольной ограниченной при $t \geqslant 0$ и кусочно-непрерывной вектор-функции $\omega(t)$ с разрывами лишь при $t = t_\alpha$, определяемыми формулами $\omega(t_\alpha + 0) = S_\alpha \omega(t_\alpha - 0)$, любое решение системы $dx/dt = P(t)x + \omega(t)$, удовлетворяющее этим уравнениям внутри каждого интервала $t_\alpha < t < t_{\alpha+1}$ и испытывающее при $t = t_\alpha$ разрывы $x(t_\alpha + 0) = S_\alpha x(t_\alpha - 0)$, ограничено при $t \geqslant 0$, то решение $z = z^0(t)$ системы (1) асимптотически устойчиво, если только постоянная $a > 0$ в неравенстве $\| f(z,t) - f(z^0,t) \| < a \| z - z^0 \|$ ($\| z \|$ — норма z) в окрестности невозмущенного движения достаточно мала. Вводится понятие обобщенной функции Ляпунова для системы первого приближения вдоль невозмущенного движения разрывной системы (1) и выясняются условия существования такой функции. Эти условия обобщают известным образом на разрывные системы условия, приведенные в книге И. Г. Малкина (Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952) для непрерывных систем. Н. Н. Красовский

10293. Замечания к одной работе Вейводы по вопросам устойчивости. Хан (Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Vejvoda über Stabilitätsfragen. Hahn Wolfgang), Math. Nachr., 1959, 20, № 1-2, 21—24 (нем.)

В работе О. Вейводы (Чехосл. матем. ж., 1957, 7, № 82, 137—159) была исследована система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_l = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} z_k + f_l(z_1,\ldots,z_n,t) \quad (l = 1,\ldots,n), \qquad (1)$$

где t — действительная, z_k — комплексные переменные, причем в некритическом случае линейной системы, задача устойчивости была исследована прямым методом Ляпунова, что в комплексной области z_k требует введения соответствующих определений и теорем. Автор показывает, что задача существования функции Ляпунова для линейной системы

$$\dot{z}_l = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} z_k \qquad (2)$$

может быть сведена к известным результатам для линейных систем с действительными коэффициентами и $2n$ переменными $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\} = v$, $dv/dt = Pv$. При этом вопрос о существовании функции V в виде эрмитовой формы $V = \bar{z}^* G z$ для системы (2), где $\dot{V} = -\bar{z}^* H z$, сводится к известной задаче о разрешимости матричного уравнения $P^*Q + QP = -R$ для действительных матриц P, R. Аналогичным образом рассматривается задача о построении формы V_1, удовлетворяющей условию $\dot{V} = 2\beta V_1 - U$ в случае существования характеристических корней с положительной действительной частью. Рассматриваются также изученные О. Вейводой два критических случая (простого чисто мнимого $i\gamma$ и простого нулевого собственного значения), которым в действительной области соответствуют критические случаи пары чисто мнимых корней и двойного нулевого корня с простыми элементарными делителями. В этих случаях задача приводится к исследованию уравнений первого порядка

$$\dot{z} = -\gamma z + \text{члены высшего порядка},$$
$$\dot{z} = cz^k + \text{члены высшего порядка}. \qquad (3)$$

Обсуждается возможность приложения и в этих случаях прямого метода Ляпунова, причем указывается затруднение в применении ко второму уравнению (3) метода функций Ляпунова, связанное с наличием в окрестности невозмущенного движения замкнутых траекторий.

Н. Н. Красовский

10294. Об устойчивости на конечном промежутке. Персидский С. К., КазССР, Ғылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1959, № 9, 75—80 (рез. каз.)

Для системы уравнений $dx_s/dt = p_{s1}(t)x_1 + \ldots + p_{sn}(t)x_n + w_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(s = 1, \ldots, n)$, где $p_{sk}(t)$ непрерывны на промежутке $\sigma = [t_0, t_0 + T]$, в функции w_s удовлетворяют в некоторой области $t \in \sigma$, $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant R$ условию $\| w(t, x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant \alpha \| x \|^{1+\beta}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — некоторые постоянные, получены оценки решения, по которым автор предлагает судить об устойчивости на конечном промежутке времени.

А. А. Лебедев

10295. Кронекеровы произведения и второй метод Ляпунова. Беллман (Kronecker products and the second method of Lyapunov. Bellman Richard), Math. Nachr., 1959, 20, № 1-2, 17—19 (англ.)

Пусть A, B, C — данные $n \times n$-матрицы и $\lambda_i = \lambda(A)$, $\mu_i = \mu(B)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — собственные значения соответственно матриц, A и B. Доказывается, что матричное уравнение $AX + XB = C$, (1) где X — неизвестная $n \times n$-матрица, имеет единственное решение для всех C тогда и только тогда, если $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Для доказательства используется понятие кронекеровых произведений и сумм матриц. Как показал Хан (РЖМат, 1958, 2987), задача (1) при $B = A'$ представляет интерес для теории второго метода Ляпунова

Б. П. Демидович

10296. О существовании и устойчивости периодического решения второго рода для одной механической системы. Вейвода (On the existence and stability of the periodic solution of the second kind of a certain mechanical system. Vejvoda Otto), Чехосл. матем. ж., 1959, 9, № 3, 390—415 (англ., рез. русск.)

Рассматриваются уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon), \qquad \ddot{\varphi} = \varepsilon M(\dot{\varphi}) + \varepsilon^2 g(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon), \qquad (1)$$

где функции f, g и M вместе с первыми частными производными по своим переменным непрерывны по этим переменным и по ε для $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и $x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}$ в некоторой области G, а f и g, кроме того, периодические по φ с периодом 2π. Ставится вопрос о существовании решения системы (1) в виде

$$x = x(t, \varepsilon), \quad \varphi = \omega(\varepsilon)t + \varepsilon\Phi(t, \varepsilon), \qquad (2)$$

где $x(t, \varepsilon)$, $\Phi(t, \varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ непрерывны по ε при достаточно малых ε, причем $x(t, \varepsilon)$, $\Phi(t, \varepsilon)$ — периодические функции t с периодом $T(\varepsilon)$. С помощью анализа общего решения этой системы доказывается, что такое решение существует прежде всего в нерезонансном случае, когда уравнение $M(\omega) = 0$ имеет по крайней мере один вещественный положительный корень $\omega_0^* \neq \frac{N}{n}$ (N и n — натуральные числа) и область G представляет собой окрестность значений $x = \dot{x} = 0$, $\varphi = \omega_0^* t, \dot{\varphi} = \omega_0^*$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi N/\omega_0^*$. При этом $T(\varepsilon) = 2\pi N/\omega(\varepsilon)$ и $\omega(0) = \omega_0^*$.

Существование решения (2) доказывается также и в резонансном случае, когда уравнение $M(\omega) = 0$ имеет по крайней мере один вещественный положительный корень ω_0^*, но при этом $\omega_0^* = N/n$. В этом случае на правые части уравнений (1) накладываются дополнительные условия. Далее при помощи теоремы Андронова-Витта в видоизмененной форме рассматривается вопрос об устойчивости периодического решения (2). Доказывается, что это решение обладает асимптотической орбитальной устойчивостью, если при достаточно малых ε имеют место для резонансного и для нерезонансного случаев некоторые неравенства. Если же какое-либо из этих неравенств не выполняется, то решение неустойчиво.

Ю. А. Рябов

10297. О периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями. Митропольский Ю. А., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 6, 1118—1121

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x), \qquad (1)$$

где $x, X \in E_n$, причем вектор-функция $X(x, t)$ — периодическая по t с периодом 2π. Предполагается, что усредненное уравнение

$$d\xi/dt = \varepsilon \bar{X}(\xi), \qquad (2)$$

где $\bar{X}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(t, \xi)\, dt$ и $\bar{X}'''(\xi)$ ограничена, имеет изолированное статическое решение $\xi = \xi_0$ такое, что $\bar{X}(\xi_0) = 0$, $\bar{X}'(\xi_0) \neq 0$.

Доказывается, что если в некоторой выпуклой окрестности $U\rho$ решения $\xi = \xi_0$, $-\infty < t < +\infty$, функция $X(x, t)$ — ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x, то при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (1) имеет периодическое решение $x(t) \in U\rho$, с периодом 2π. При известных условиях это решение удовлетворяет неравенству $|x(t) - \xi_0| \leqslant \sigma$, где σ — сколь угодно мало. Приводятся достаточные условия единственности периодического решения $x(t)$. Полученный результат дает теоретическое обоснование способа приближенного построения периодических решений нелинейных систем с недифференцируемыми правыми частями, с помощью метода усреднения.

Б. П. Демидович

10298. О почти периодических решениях линейных и нелинейных систем. Иванов В. Н., Тр. Саратовск. ин-та механиз. с. х., 1959, вып. 14, 170—183

Изучается вид решений и условия существования почти периодических решений для линейной системы дифференциальных уравнений $dy/dt = P(t)\,y + f(t)$, где $P(t)$ — почти периодическая $n \times n$ матрица и $f(t)$ — почти периодическая вектор-функция. При доказательствах использованы методы аналитической теории дифференциальных уравнений. Для нелинейной системы $dx_s/dt = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}(t)\, x_k + \sum_{m_1 + \ldots + m_n > 1} P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}(t)\, x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ $(s = 1, \ldots, n)$ с почти периодическими коэффициентами даются необходимые и достаточные условия существования почти периодического решения, аналогичные известной теореме Ляпунова о существовании голоморфного интеграла.

Б. П. Демидович

10299. О почти периодических решениях систем дифференциальных уравнений. Зубов В. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, № 1, 104—106 (рез. англ.)

Высказываются условия существования и устойчивости почти периодического решения для системы дифференциальных уравнений, записанной в векторном виде: $dX/dt = F(X, t)$. При этом предполагается, что вектор

$F(X\ t)$ удовлетворяет ряду условий, из которых наиболее существенны почти периодичность по t и выполнение условия Липшица с неизменной константой. Доказательства теорем не приводятся. Б. Ф. Былов

10300. Релаксационные процессы в многокомпонентных системах. Шулер (Relaxation processes in multistate systems. Shuler Kurt E.), Phys. Fluids, 1959, 2, № 4, 442—448 (англ.)

Исследуются релаксационные процессы в многокомпонентных системах, описываемых линейными кинетическими уравнениями типа

$$dx_n/dt = \sum_{j=0}^{N} (w_{nj}x - w_{jn}x_n) \text{ или } dx/dt = wx, \qquad (1)$$

где вероятности переходов w_{nj} удовлетворяют соотношениям $w_{jn}q_j = w_{jn}q_n$, $w_{nn} = 0$ (принцип детального равновесия), а концентрации $x_n(t)$ удовлетворяют (если система является замкнутой) закону сохранения $\sum_{n=0}^{N} x_n = 1$ (примером системы, описываемой уравнениями типа (1), является совокупность гармонических осцилляторов, находящихся в различных колебательных состояниях, между которыми происходят переходы с вероятностями w_n). Показано, что величина $u = \sum_{n=0}^{N} nx_n(t)$ (первый момент системы (1)) описывается при некоторых специальных предположениях относительно коэффициентов w_{nj} (например, если $w_{jn} = A[(j+1)\delta_{n-1,\ j} + j\delta_{n+1,\ j}]$) одним уравнением вида $du/dt = 1/\tau\,[u(t) - u(\infty)]$, где величина τ, сложным образом зависящая от A, есть время релаксации величины u (для системы, представляющей собой совокупность гармонических осцилляторов, величина $u = E_v/h\nu$ имеет смысл полной колебательной энергии системы $E_v = h\nu \sum_{n=0}^{N} nx_n$). Применительно к исходной системе (1), показано, что из соотношений $\sum_{n=0}^{N} x_n = 1$, $w_{jn}q_n = w_{nj}q_j$ вытекают следующие свойства характеристических чисел λ_i матрицы $\| w \|$: все λ_i действительны и неположительны; существует по крайней мере один нулевой корень $\lambda_i = 0$. Отсюда следует, что система (1) не имеет истинных колебательных решений. Показано, однако, что при некоторых специальных предположениях о начальных значениях $x_n(0)$ решения $x_i(t)$ системы (1) могут иметь один или несколько экстремумов. Такого рода апериодические решения отсутствуют у двухкомпонентных систем типа (1), что свидетельствует о том, что при анализе релаксационных процессов с помощью двухкомпонентных моделей могут быть утеряны существенные черты этих явлений. Ю. С. Саясов

10301. О разложении по собственным вектор-функциям несамосопряженных дифференциальных систем второго порядка. Кабанова В., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 1, 30—33

Обобщаются на системы дифференциальных уравнений 2-го порядка результаты М. А. Наймарка (РЖМат, 1953, 243) и референта (РЖМат, 1957, 423) о разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора на полуоси. Если в матричном уравнении

$$Y'' - YP(x) + \lambda^2 Y = 0 \qquad (1)$$

выполнено условие $\int_0^\infty x \,|\, P(x) \,|\, dx < \infty$; $|\, P \,| = \left\{\sum_{ij} |\, P_{ij}(x) \,|^2\right\}^{1/2}$, то существует такое непрерывное ядро-матрица $K(x,t)$, что $\int_0^\infty \int_x^\infty |K(x,t)|^2 dt dx < \infty$, $\int_x^\infty |\, K(x,t) \,|\, dt < \infty$ $(x > 0)$ и

$$Y(x,\lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x,t)\, e^{i\lambda t} I dt \qquad (2)$$

есть решение уравнения (1). При $f \in L_m^2(0,\infty)$ (m — размерность пространства) существует предел в среднем $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ l.i.m. $\int_0^\infty Y(x,\lambda)\,\mathbf{f}(x)\,dx$. Кроме того, верна формула обращения $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ l.i.m. $\int_0^\infty Z(x,\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda$, в которой $Z(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x R(s,x)\, e^{-i\lambda s} ds$ и $R(s,x)$ — резольвента ядра $K(x,s)$. Преобразование (2) дает отображение всего $L_m^2(0,\infty)$ на все $L_m^{2(+)}$-пространство вектор-функций из $L_m^2(-\infty,\infty)$, голоморфных и ограниченных $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\, \varphi(\sigma + i\tau) \,|^2 d\sigma < M\right)$ при $\tau \geqslant 0$. При этом $c_1 \| \varphi \| \leqslant \| f \| \leqslant c_2 \| \varphi \|$; $c_1 > 0$; $c_2 > 0$ — постоянные. Показано, что матрица $Z(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению $Z'' - P(x)\,Z + \lambda^2 Z = -i\lambda R(0,x) + R_s'(0,x)$. Через $\Phi(x,\lambda)$ — обозначено решение (1), удовлетворяющее условиям $\Phi(0,\lambda) = I$; $\Phi'(0,\lambda) = -H$ и $Y_H(\lambda) = [Y(0,\lambda)\,H + Y'(0,\lambda)]\,(i\lambda)^{-1}$. Комплексные корни уравнения $\det[Y_H(\lambda)] = 0$ образуют весь дискретный спектр соответствующего дифференциального оператора. Пусть на вещественной оси $\det[Y_H(\lambda)] \neq 0$ и G_m^2 — ортогональное дополнение в $L_m^2(0,\infty)$ к пространству, натягиваемому векторами, комплексно-сопряженными инвариантным подпространствам, отвечающим дискретному спектру. Показано, что преобразование $\mathbf{F}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ l.i.m. $\int_0^\infty \Phi(x,\lambda)\,\mathbf{f}(x)\,dx$ отображает все G_m^2 во все H_m^2, где H_m^2 — четные функции из $L_m^2(-\infty,\infty)$. Кроме того, рассматривается матрица-функция $V(x,\lambda)$, удовлетворяющая уравнению

$$V'' - P(x)\,V + \lambda^2 V = A(x), \qquad (3)$$

где $A(x)$ строится по определенному правилу, и дающая обратное преобразование $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ l.i.m. $\int^\infty V(x,\lambda) d\sigma(\lambda) \times$ $\times \mathbf{F}(\lambda)$ $(\sigma'(\lambda) = Y_H^{-1}(\lambda)\,Y(0,\lambda) - Y_H^{-1}(-\lambda)Y(0,\lambda))$. Доказана также теорема о равносходимости.

Примечание референта. В настоящее время автор показал, что в уравнении (3) $A(x) \equiv 0$. Б. Я. Левин

10302. Об изоморфизме динамических систем, различающихся только временем. Грабарь М. И., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 5, 931—934

Рассматриваются две динамические системы $\{S_t\}$ и $\{\widetilde{S}_\tau\}$, расположенные в компакте R. Вторая система получается из первой заменой времени: $d\tau = F(S_t x)\,dt$ ($F(x)$ непрерывна и > 0). В $\{S_t\}$ пусть существует инвариантная неразложимая мера m. Если $\int_R F(x)\,dm = 1$,

то соотношение $dm = \widetilde{F}(x)\,dm$, определяет аналогичную меру в $\{\widetilde{S}_\tau\}$.

Изучается вопрос о метрическом изоморфизме систем $\{S_t\}$ и $\{\widetilde{S}_\tau\}$ с мерами m и $\widetilde{m}$. Пусть $F^*(x) = F(x) - 1$, $\rho(t) = \int_R F^*(S_t x)\,F(x)\,dm$.

Теорема 1. Если при $\lambda > 0$ $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\rho(t)\,dt = O(t)$, то системы $\{S_t\}$ и $\{\widetilde{S}_\tau\}$ изоморфны.

Теорема 3. Если $\int_0^\infty \rho(t)\,dt = 0$ и $\int_0^\tau t\rho(t)\,dt$ ограничен при $\tau \geqslant 0$, то системы $\{S_t\}$ и $\{\widetilde{S}_\tau\}$ изоморфны.

Другие критерии изоморфизма систем $\{S_t\}$ и $\{\widetilde{S}_\tau\}$ были получены автором ранее (РЖМат, 1956, 11050).

С. В. Фомин

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *Л. Д. Кудрявцев, Н. И. Мозжерова*

10303. Современные исследования уравнений с частными производными первого порядка. Чинкуини-Чибрарио (Moderne ricerche sulle equazioni a derivate parziali del primo ordine. Cinquini-Cibrario Maria. Rend. Sem. Mat., Univ. e Politec. Torino 1955—1956, **15**, 5—26) (итал.)

Отчет о конференции, посвященной последним результатам по уравнениям с частными производными первого порядка с точки зрения теории функций действительного переменного. G. Scorza-Dragoni

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 655.

10304. Условия разделимости для некоторых самосопряженных уравнений с частными производными. Уэлс (Separability conditions for some self-adjoint partial differential equations. Wells C. P.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 8, 684—689 (англ.)

Выводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнения

$$L[\psi] = 0 \qquad (1)$$

или

$$L[\psi] + k\psi = 0,\ (k = \text{const}), \qquad (2)$$

где

$$L[\psi] \equiv (A\psi_x)_x + (B\psi_x)_y + (B\psi_y)_x + (C\psi_y)_y\ \ (A = A(x, y), \ldots, AC] - B^2 > 0),$$

после невырожденного преобразования $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ приобрели вид $F(u, v)(L_u[\psi] + L_v[\psi]) = 0$, где каждый из операторов L_u и L_v действует только по одной переменной. Например, для уравнения (1) условие имеет вид: система уравнений Бельтрами $\overline{A}\overline{u}_x + \overline{B}\overline{u}_y = W\overline{v}_y$, $\overline{B}\overline{u}_x + \overline{C}\overline{u}_y = -W\overline{v}_x$ $\left(W = \sqrt{AC - B^2}\right)$ должна обладать функционально независимыми решениями $\overline{u}$, $\overline{v}$, для которых $\partial^2 \ln W/\partial\overline{u}\,\partial\overline{v} = 0$; при этом знание этих решений дает возможность восстановить искомое преобразование. На основе этих общих условий более подробно рассматривается преобразование уравнения (2) в случае $A = C$, $B = 0$. Оказывается, что, за исключением неинтересных случаев, все указанные преобразования задаются формулой $z = \int \chi(w)\exp(-w^2)dw \times (z = x + iy,\ w = u + iv)$, где $\chi(w)$ — одна из функций $C_1 w + C_2$, $\sin(C_1 w + C_2)$, $\theta(C_1 w + C_2)\,\mathrm{sn}(C_1 w + C_2)$, $\{\theta(C_1 w + C_2)[1 + \mathrm{cn}(C_1 w + C_2)]\}^{1/2}$.

А. Д. Мышкис

10305. Об условиях на бесконечности, обеспечивающих корректную разрешимость некоторого класса уравнений вида $p(id/dx)u = f$. Паламодов В. П., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 4, 740—743

Рассматривается оператор $p(id/dx)$, где многочлен $p(s)$ $(s = \sigma + i\tau = \{\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_n + i\tau_n\})$ степени m не обращается в 0 в области $|\tau_1| < b, \ldots, |\tau_n| < b$. Если при этом p-гипоэллиптический оператор (РЖМат, 1957, 2325), то он обладает фундаментальным решением, которое убывает при $|x| \to \infty$ как $e^{-a|x|}$, с некоторым $a = a(p)$; далее, если преобразование Фурье функции $f(x)$ абсолютно интегрируемо, то уравнение

$$p(id/dx)\,u = f \qquad (1)$$

обладает ограниченным решением, которое единственно даже в классе экспоненциально растущих функций с оценкой

$$|u(x)| \leqslant Ce^{(a-\varepsilon)|x|}. \qquad (2)$$

В общем случае оператор p обладает фундаментальным решением, которое экспоненциально убывает (как $e^{-a|x|}$) при $|x| \to \infty$ после применения некоторого дифференциального оператора порядка $2n$; уравнение (1) имеет решение, если преобразования Фурье функции $f(x)$ и ее производных до порядка $n + 2m$ принадлежат L_1, и это решение единственно в классе функций, удовлетворяющих неравенству (2) вместе с производными до порядка $n + 2m$.

Г. Е. Шилов

10306. Краевые задачи. Шлёгль (Randwertprobleme. Handbuch der Physik. Bd. I. Mathematische Methoden I. Schlögl F. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1956, S. 218—352, 72.00 DM) (нем.)

В работе четыре основных раздела: A. Ортогональные системы функций; B. Линейные интегральные уравнения; C. Исчисление вариаций; D. Краевые задачи для математической физики. Раздел A включает ряды по ортогональным функциям, ряды Фурье и линейные преобразования в функциональном пространстве. В разделе B обсуждаются эрнитовы (hermitian) и произвольные ядра и прямые методы решений. Первые три раздела являются введением к разделу D, в котором содержатся такие подразделы как линейные уравнения второго порядка, функция Грина, задача о собственных значениях, связь с вариационным исчислением и другие вопросы. В частности, изучается уравнение Клейна-Гордона

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - x^2\psi = f.$$

J. B. Diaz

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 5, 401.

10307. О некоторых разложениях в ряды. Кучук (Asupra unor dezvoltări in serie. Cuciuc M.), Lucrările Inst. petrol şi gaze Bucureşti, 1957, **3**, 299—312 (рум.; рез. русск., англ.)

После воспроизведения классических результатов, касающихся применения метода Римана для решения уравнений типа Эйлера—Пуассона и формулы Пуассона, автор разлагает в ряды Фурье по функциям Бесселя решения некоторых дифференциальных уравнений. Есть опечатки. Библ. 3 назв. без указания общепринятых дат, как например, места и года издания цитируемых книг и т. д.

D. Mangeron

10308. Формулы для представления решений класса дифференциальных уравнений в частных производных. Пейн (Representation formulas for solutions of a class of partial differential equations. Payne L. E.), J. Math. and Phys, 1959, **38**, № 2, 145—149 (англ.)

Даются формулы для представления общего решения уравнения $L_{\alpha_1} L_{\alpha_2} \ldots L_{\alpha_n} w = 0$ (РЖМат, 1958, 6727; там

же см. обозначения) в исключительном случае, т. е. когда нарушается условие $\alpha_r \neq \alpha_j - 2(r-j)$ $(j<r=2, 3, \ldots, n)$. Если, например, $\alpha_r = \alpha_j - 2(r-j)$ только для одной пары индексов j и r, то

$$w = \sum_{i=0}^{n-1}{}' u^{(\alpha_{n-i}-2i)} + \frac{\partial u^{(\beta)}}{\partial \beta}\Bigg|_{\beta=\alpha_{n-r}-2r},$$

где Σ' означает, что из суммы исключен член с индексом $i=r$. Кроме того, дано несколько различных представлений общего решения уравнения $L_\alpha^m w = 0$, где L_α^m обозначает m-кратную итерацию оператора L_α, например, $w = \sum_{i=0}^{m-1} y^{2i} u^{(\alpha+2i)}$.

Ю. А. Шашкин

10309. Проблемы Неймана на келеровых многообразиях в комплексном случае. Кон, Спенсер (Complex Neumann problems on Kähler manifolds. Kohn J. J., Spencer D. C. Princeton, N. J., Univ., 1956, 115 pp. (Mimeogr.)) (англ.)

Авторы рассматривают и обобщают со скаляров на произвольные формы конструкцию Жиро (и С. Г. Михлина) для обращения оператора $f(x) = I\rho \equiv a(x)\rho(x) + \int_M G(x, y)\rho(y)\,dV_y$, в котором, как и в некоторых случаях краевой задачи Неймана, ядро $G(x, y)$ неинтегрируемо по Лебегу по y в окрестности точек $y=x$, а ведет себя следующим образом: если M — m-мерное риманово пространство и $r(x, y)$ — ее геодезическая, тогда в любом тангенциальном направлении $\lim_{y\to x} r(x, y)\, G(x,y)^m$ существует и его значение в среднем по этой сфере направлений равно 0. В этом случае проблема регуляризации заключается в нахождении такого оператора K, для которого уравнение $KI - P = Kf$ имеет то же решение, что и первоначальное уравнение, но это решение получается уже из обычной теории Фредгольма.

Далее, для комплексного келерова строения авторы с помощью дифференциалов ∂, $\bar\partial$ вводят дифференциал $d\tau = \frac{1}{2}(\tau - i)\partial + \frac{1}{2}(\tau + i)\bar\partial$, причем для τ допускаются все значения комплексной гауссовой сферы. Тогда для каждого τ возникает своя задача Неймана; эта задача допускает регуляризацию для всех τ, кроме $\tau = ir$, где r — рациональное число замкнутого интервала $-1 \leqslant r \leqslant 1$. Основное исключение имеет место при $\tau = i$. Эти проблемы Неймана связаны с построением голоморфных функций по их граничным значениям, что в случае более чем одной комплексной переменной представляет в настоящее время большой интерес.

S. Bochner

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 658.

10310. Локальное элементарное решение для уравнений с частными производными, зависящих от параметра. Цернер (Solution élémentaire locale d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre. Zerner Martin), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 26, 3679—3681 (франц.)

Теорема. Пусть $P(y, D_x)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, зависящий аналитически от параметра $y \in Y$. Y — аналитическое многообразие. Операторы P, соответствующие различным значениям y, эквивалентны в смысле Хёрмандера (РЖМат, 1957, 2325). Тогда для всякого $y_0 \in Y$ найдутся окрестность $V \subset Y$ и функция $F(x,y)$, принадлежащая определенному пространству обобщенных функций от x и аналитически зависящая от $y \in V$, такие, что $P(y, D_x)F = \delta$ в окрестности начала координат. Приводится схема доказательства, использующего представление

$$P(y, D_x) = P(y_0, D_x) + \sum_i z_i(y) Q_i(D_x). \qquad (1)$$

где z_i — аналитические функции y и Q_i — операторы «слабее» (Хёрмандер) P. К представлению (1) применяются результаты Хёрмандера (РЖМат, 1959, 8035).

А. А. Дезин

10311. О продолжении уравнений второго порядка одной неизвестной функции от двух независимых переменных и о преобразовании этих уравнений (Часть II). Хаймович (Despre prelungirea ecuațiilor de ord. II cu o funcție necunoscută de două variabile independente și despre transformările acestor ecuații. Partea A II. Haimovici M.), An. științ. Univ. Iași., 1956, Sec. 1, 2, № 1-2, 105—131 (рум.; рез. русск., франц.)

Ч. I см. РЖМат, 1960, 6915.

В ряде работ (РЖМат, 1957, 842; 1958, 2409) автор исследует частичные продолжения системы Пфаффа 2-го рода, а в первой части одноименной с реферируемой статьи — задачу о продолжении уравнений 2-го порядка с одной неизвестной функцией и двумя независимыми переменными, а также и задачу о преобразовании этих уравнений. Успешно решив, названную Е. Гурса (Goursat E., Leçons..., I, II, Gauthier-Villars, Paris, 1896, Ch. IX) трудной задачу выработки общей теории преобразований вышеупомянутых уравнений, автор изучает здесь вместо дифференциальных конечные соотношения преобразований. Сохраняя обозначения, введенные в первой части этого обширного мемуара, автор показывает (§ 21) существование преобразования вида II с $a=0$, при котором уравнение

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}) = 0,$$

$$p_i = z_{x_i},\ p_{ij} = p_{ji} = z_{x_i x_j}\ (i, j = 1, 2)$$

оказывается типа Монжа—Ампера. Исследуется затем (§ 22) свойство указанных преобразований. Следует сведение общей задачи о преобразованиях II типа к преобразованиям, при которых $a=0$. Статья заканчивается изучением преобразований, при которых дифференциальные соотношения имеют вид III—IV, причем устанавливается, что все эти преобразования не что иное, как произведения преобразований типа II на некоторые простые преобразования, определяемые системой двух уравнений Пфаффа 6-го класса. D. Mangeron

10312. О продолжении уравнений второго порядка одной неизвестной функции от двух независимых переменных и о преобразовании этих уравнений. Часть III. Хаймович (Despre prelungirea ecuațiilor de ord. II cu o funcție necunoscută de două variabile independente și despre transformările acestor ecuații. Part. III. Haimovici M.), An. științ. Univ. Iași. Sec. I., 1957, **3**, № 1-2, 53—75 (рум.; рез. русск., франц.)

В третьей и последней части обширного мемуара (ч. I см. РЖМат, 1960, 6915; ч. II—реф. 10311) продолжается рассмотрение задачи о продолжении уравнений 2-го порядка с одной неизвестной функцией и двумя независимыми переменными, а также задачи о преобразовании этих уравнений. Выводятся, как и в предыдущих случаях, дифференциальные отношения, а затем изучаются и конечные отношения. D. Mangeron

10313. Эллиптические решения уравнения, задающего гессиан. Калаби (Elliptic solutions of the equa-

tion prescribing the Hessian. Calabi E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 42 (англ.)

Сообщение резюмирует некоторые частные результаты, ведущие к решению следующей краевой задачи:

Пусть D — ограниченная, выпуклая область в пространстве E_n, гладкая граница B которой имеет строго положительную кривизну; требуется найти выпуклую функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ в $\bar{D}$ с заданными значениями на B и удовлетворяющую уравнению

$$\det \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi(x_1, \ldots, x_m),$$

где Φ — заданная, непрерывная функция в $\bar{D}$ с положительными значениями. Доказывается единственность решения и устанавливаются границы априори для ее первых производных в D. В частном случае $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 1$ можно также оценить границы в D для вторых и высших производных.

10314. О собственных значениях в задачах со сферической симметрией. III. Титчмарш (On the eigenvalues in problems with spherical symmetry. III. Titchmarsh E. C.), Proc. Roy. Soc., 1959, **A252**, № 1271, 436—444 (англ.)

Ч. I, II см. РЖМат, 1959, 3810; 1960, 4026. Изучаются задачи на собственные значения

$$\Delta u + \{\lambda - q(r)\} u = 0 \qquad (1)$$

во всем пространстве R^3, в которых $q(r)$ зависит только от $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ и $q(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$. Обозначим через $N(\lambda)$ число собственных значений задачи (1), не превосходящих λ. В работе доказывается, что для $q(r) = r^c$, $c = 4$ или $c = 6$

$$N(\lambda) = a\mu^3 + b\mu^2 + O(\mu^{5/3}) \qquad (2)$$

($\mu = \lambda^{1/2 + 1/c} \to \infty$, a и b — постоянные числа). Вывод основан на одной теореме Ван-дер-Корпута о числе целых точек в области произвольного вида. Результат не имеет места в случае $c = 2$, который является исключительным.

Б. М. Левитан

10315. О решении некоторых смешанных граничных задач. I. Разные граничные условия на двух половинах бесконечной поверхности. Танимура (On the solution of some mixed boundary problems. I. Different boundary conditions to each consecutive semi-infinite surface. Tanimura Masayoshi), Technol. Repts Osaka Univ., 1955, 5, March, 77—102 (англ.)

Излагается один метод решения граничных задач для простейших уравнений математической физики, когда на разных частях границы задаются условия различного вида. Вначале метод иллюстрируется на задаче о стационарном распределении температур в бесконечной полосе, на одной части границы которой задана постоянная температура, а другая часть теплоизолирована. Используя методы теории потенциала, автор строит решение этой задачи, а затем указывает другой, операционный подход к получению того же решения. Этот последний состоит в том, что, предполагая неизвестными как значения функции, так и значения ее производной по направлению нормали к границе, автор выводит на основании граничных условий уравнение, связывающее их преобразования Лапласа $\Psi(q)$ и $\Phi(q)$:

$$\Psi(q) = k(q)\,\Phi(q) \qquad (1)$$

с известной функцией $k(q)$. Изучая распределение нулей и полюсов этой функции, автор указывает случаи возможности отыскания решений уравнения (1). Этим методом исследуется, например, задача о стационарном распределении температур в бесконечном цилиндрическом слое $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, на границах которого ($r = R_1$ и $r = R_2$) поддерживается нулевая температура, а внутрь введен полубесконечный цилиндр ($r = b$, $R_1 < b < R_2$), на котором задана постоянная температура U_0, и некоторые аналогичные задачи для нестационарного уравнения теплопроводности и уравнения колебаний.

Ю. Н. Валицкий

10316. Об обобщенных решениях краевых задач. Березанский Ю. М., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 6, 1159—1162

Реферируемая работа примыкает к предыдущей работе автора (РЖМат, 1960, 1650). Пусть G — ограниченная область n-мерного вещественного пространства. $L[u]$ — линейное дифференциальное выражение порядка r с достаточно гладкими коэффициентами в G; $L^+[u]$ — формально сопряженное выражение. Через W_2^l обозначается соболевское пространство функций на G, производные которых в смысле обобщенных функций до порядка l принадлежат L_2, через W_2^{-l} — пространство линейных непрерывных функционалов над W_2^l (т. е. обобщенных функций), снабженное некоторой нормой (РЖМат, 1960, 1650). Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^r$ — замыкание в W_2^r пространства всех функций из W_2^r, равных 0 вблизи границы. Всякое подпространство $W_2^r(\text{гр})$ в W_2^r, содержащее $\overset{\circ}{W}{}_2^r$, автор называет подпространством функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Сопряженное граничное условие определяется подпространством $W_2^r(\text{гр})^+$ таких функций v, что $(L[u], v) = (u, L^+[v])$ для любой $u \in W_2^r(\text{гр})$, где $(,)$ — скалярное произведение в L_2. Обобщенным решением краевой задачи $L[u] = f$, где $f \in W_2^{-r}$, с краевым условием $u \in W_2^r(\text{гр})$ автор называет такую „аппроксимирующую последовательность" $u_n \in W_2^r(\text{гр})$, что $L[u_n] \to f$ в W_2^{-r}. В другой, эквивалентной формулировке обобщенное решение является элементом некоторого гильбертова пространства.

Формулируется теорема 1: Для существования обобщенного решения необходимо и достаточно, чтобы $(f, v) = 0$ для всех $v \in W_2^{-r}(\text{гр})^+$, удовлетворяющих уравнению $L^+[v] = 0$.

Далее рассматривается вопрос о том, когда обобщенное решение совпадает с обобщенной функцией из W_2^{-l}, или совпадает с ней лишь вплоть до некоторых граничных условий, или совпадает с ней лишь внутри области (эти понятия определяются в работе). Достаточные условия для этого (некоторые неравенства) сформулированы в виде теоремы 2. Из нее следует, в частности, что для любого оператора с постоянными коэффициентами обобщенное решение любой краевой задачи совпадает внутри области с обобщенной функцией из W_2^{-m}, если f принадлежит W_2^{-m} ($0 \leqslant m \leqslant r$). Рассмотрен ряд случаев, в которых при помощи теоремы 2 удается доказать совпадение решения с обобщенной функцией вплоть до граничных условий.

М. С. Агранович

10317. О дифференциальном уравнении $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. II. Теоремы существования для характеристической начальной задачи. Вальтер (Über die Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. II Existenzsätze für das charakteristische Anfangswertproblem.

Walter Wolfgang), Math. Z., 1959, 71, № 4, 436—453 (нем.)

В первой части работы (РЖМат, 1960, 4031) доказана единственность решения задачи Дарбу—Гурса. Здесь доказывается (в тех же общих предположениях) существование решения при условии $|f(x,y,u,v,w)-f(x,y,u,v,\overline{w})|\leqslant g(x,|w-\overline{w}|)$ (и аналогичном условии по v), где предположения о g те же, что были применены Камке при доказательстве единственности решения для уравнения $y'=f(x,y)$. Для этого в правые части эквивалентной системы интегральных уравнений вводится запаздывание, которое устремляется к нулю, после чего применяется теорема Асколи. Решение задачи существует также, если f не ограничена, но имеет по u, u_x, u_y не слишком высокий порядок роста (при этом к рассматриваемой задаче применяется теорема о дифференциальном неравенстве). Приведены примеры, в которых решения не существует, а также условия сходимости метода последовательных приближений Пикара, аналогичные условиям Нагумо для обыкновенных дифференциальных уравнений. А. Д. Мышкис

10318. Решения уравнения Гельмгольца для угла. I. Ловерье (Solutions of the equation of Helmholtz in an angle. I. Lauwerier H. A.), Proc. Konink. nederl. akad wet., 1959, A62, № 5, 475—488; Indagationes math., 1959, 21, № 5, 475—488 (англ.)

Статья является первой из четырех, посвященных решению задачи: определить функцию Грина $G(r,\varphi,r_0,\varphi_0)$ для угла $A(\varphi_1<\varphi<\varphi_2)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-r^2\right)G(r,\varphi,r_0,\varphi_0)=-r_0\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$, где r,φ — полярные координаты плоскости, $\delta(x)$ — дельта-функция, и граничному условию $\cos\gamma_j\frac{\partial G}{\partial\varphi}-r\sin\gamma_j\frac{\partial G}{\partial r}=0$, $\varphi=\varphi_j$ $(j=1,2)$, где γ_j — комплексные постоянные, подчиненные ограничению $-\frac{1}{2}\pi<\operatorname{Re}\gamma_j<\frac{1}{2}\pi$. Рассматривается также задача разыскания решения однородного уравнения $F(r,\varphi)\times(\Delta_{r\varphi}-1)=0$, удовлетворяющего тем же граничным условиям. Первая задача названа G-задачей, вторая F-задачей. В первой статье решаются: F- и G-задачи для уравнения Лапласа (а не для уравнения Гельмгольца); рассматривается специальный случай $\gamma_j=0$ F- и G-задач для уравнения Гельмгольца; рассматривается F-задача в общем случае. Под решением F-задачи понимается последовательность функций, удовлетворяющих однородному уравнению и однородному граничному условию, причем иногда ставится также ограничение на поведение функций при $r\to 0$ или $r\to\infty$. Функция Грина в случае оператора Лапласа и оператора Гельмгольца для $\gamma_j=0$ выражается через введенные автором функции. Х. Л. Смолицкий

10319. Решение «в целом» нестационарной граничной задачи для системы Навье — Стокса с двумя пространственными переменными. Ладыженская (Solution «in the large» of the nonstationary boundary value problem for the Navier — Stokes system with two space variables. Ladyzhenskaia O. A.), Communs Pure and Appl. Math., 1959, 12, № 3, 427—433 (англ.)

Рассматривается система уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости

$$\mathbf{V}_t-\nu\Delta\mathbf{V}+\sum_{k=1}^{2}\mathbf{V}_k\mathbf{V}_{x_k}=-\operatorname{grad}p+f(x,t),\quad(1)$$

$\operatorname{div}\mathbf{V}=0$ для функций $\mathbf{V}=(v_1(x_1,x_2,t),\ v_2(x_1,x_2,t))$ и $p(x_1,x_2,t)$ в области Ω евклидова пространства (x_1,x_2) с границей S при граничных и начальных условиях:

$$\mathbf{V}|_S=0,\quad \mathbf{V}|_{t=0}=\mathbf{a}(x)\ (\operatorname{div}\mathbf{a}=0,\ \mathbf{a}|_S=0).\quad(2)$$

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Задача (1) — (2) имеет единственное решение „в целом" (т. е. для всех $t\geqslant 0$) для всех чисел Рейнольдса в начальный момент и для произвольных сил $\mathbf{f}$, если интегралы $\int_\Omega\mathbf{V}^2(x,0)\,dx$, $\int_\Omega\mathbf{V}_t^2(x,0)\,dx$, $\int_0^t\int_\Omega(f^2+f_t^2)\,dx\,dt$ конечны. Область Ω может быть ограниченной или неограниченной.

Доказательство этой теоремы, как показано в ранней работе автора и Киселева (РЖМат, 1955, 1275; 1958, 6726), следует из существования априорных оценок для интегралов $\int_0^t\int_\Omega\mathbf{V}_t^2\,dx\,dt$, $\int_\Omega\sum_{k=1}^{2}v_k^4\,dx$ или для $\max(\mathbf{V})$. Эти априорные оценки и получены в первой части работы. Во второй части разбирается вопрос об устойчивости задачи (1) — (2). В дальнейшем через $\mathbf{f}$ обозначается бездивергентная часть силы, градиентная же часть предполагается включенной в $\operatorname{grad}p$ ($\mathbf{L}_2(\Omega)=\overset{\circ}{J}(\Omega)\oplus G(\Omega)$). Доказываются следующие теоремы:

Теорема 2. Решение $\mathbf{V}$ задачи (1) — (2), для которого $\|\mathbf{V}(x,0)\|$ и $\|\mathbf{V}_t(x,0)\|$ конечны, а силы $\mathbf{f}$ удовлетворяют условию $\int_0^\infty(\|f\|+\|f_t\|)\,dt\leqslant\text{const}$, стремится к нулю при $t\to\infty$ в том смысле, что интегралы $\int_\Omega\sum_{k=1}^{2}\mathbf{V}_{x_k}^2(x,t)\,dx$ и $\int_{\Omega'}\mathbf{V}^2(x,t)\,dx$ стремятся к нулю при $t\to\infty$ (здесь Ω' обозначает любую конечную часть Ω).

Решение (1)—(2) устойчиво относительно возмущений начальных условий и внешних сил:

Теорема 3. Пусть $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}''$ — решения (1) — (2), соответствующие $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}''$ и силам $\mathbf{f}'_{(x,t)}$ и $\mathbf{f}''_{(x,t)}$. Для разности $\mathbf{u}=\mathbf{V}'-\mathbf{V}''$ имеет место оценка

$$\|u\|\leqslant\|a'-a''\|\exp\left\{\frac{2}{\nu}\int_0^t\widetilde{\Phi}^2(\tau)\,d\tau\right\}+$$

$$+\int_0^t\|f'_\xi(x,\xi)-f''_\xi(x,\xi)\|\exp\left\{\frac{2}{\nu}\int_\xi^t\widetilde{\Phi}^2(\tau)\,d\tau\right\}d\xi.$$

Здесь $\widetilde{\Phi}^2(t)=\int_\Omega\sum_{k=1}^{2}\left(\mathbf{V}''_{x_k}(x,t)\right)^2dx$.

Если $\mathbf{f}''$ не зависит от t и если $\mathbf{V}''$ — решение соответствующей стационарной задачи, то при выполнении некоторого условия „малости" обобщенного числа Рейнольдса, соответствующего стационарной задаче, решение нестационарной задачи (1) — (2) с теми же силами $\mathbf{f}''$ стремится к $\mathbf{V}$ при $t\to\infty$. Точнее, если $C_\Omega^2\equiv\sup\frac{\int_\Omega\mathbf{b}^2\cdot dx}{\int_\Omega\sum_{k=1}^{2}b_{x_k}^2\,dx}$, то имеет место

Теорема 4. Если для решения $\mathbf{V}''(x)$ стационарной задачи, соответствующей силам $\mathbf{f}''(x)$, обобщенное число Рейнольдса $2\Phi C_\Omega/\nu$ меньше единицы, то для любого решения $\mathbf{V}'$ задачи (1) — (2), соответствующего тому же $\mathbf{f}''$, интеграл $\int_0^\infty\int_\Omega\sum_{k=1}^{2}\left(\mathbf{V}'_{x_k}(x,t)-\mathbf{V}''_{x_k}(x)\right)^2dx\,dt$ конечен. А. Л. Крылов

10320. Задача Гурса — Бедона для линейного уравнения в частных производных n-го порядка с двумя независимыми переменными. Олару (Problema Goursat-Beudon pentru ecuațiile cu derivate parțiale liniare de ordinul n și cu două variabile independente. Olaru V.), Studii și cercetări mat. Acad.

RPR, 1958, 9, № 1, 191—208 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается линейное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k,k} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_1^{n-k-1,k} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-k-1}\partial y^k} + \ldots + a_n u = f(x, y) \quad (1)$$

в предположении, что известно определенное количество данных на характеристике и на другой кривой (которая может быть и характеристической), имеющей одну общую точку с характеристикой, причем эта кривая не соприкасается с ней в этой точке. Если отнести уравнение (1) к характеристикам, то можно получить вторую форму видоизмененного уравнения:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = b_1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{k-1}\partial y^{n-k+1}} + \ldots + b_k \frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \ldots, \quad (2)$$

где точками указаны члены, содержащие производные порядка $< n$ или

$$\frac{\partial^{n-h} u}{\partial x^p \partial y^{n-h-p}} = a_n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \ldots a_{n-h+1} \frac{\partial^{n-h+1} u}{\partial y^{n-h+1}} + c_1 \frac{\partial^{n-h} u}{\partial x^{p-1}\partial y^{n-h-p+1}} + \ldots c_p \frac{\partial^{n-h} u}{\partial y^{n-h}} + \ldots, \quad (3)$$

где точками указывают члены, содержащие производные порядка $< n-h$. Для уравнения (2) ищется решение, удовлетворяющее n условиям, причем на характеристике $x=0$ k условиям: $\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=0} = A_i(y)$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$, а на не характеристике $y=0$ $n-k$ условиям $\left.\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\right|_{y=0} = B_i(x)$, $(i=0,1,\ldots,(n-k-1))$. Для уравнения (3) имеется решение, удовлетворяющее $n-h$ условиям, причем p условия на характеристике $x=0$: $\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=0} = A_i(y)$ $(i=0,1,\ldots,p-1)$ и $n-h-p$ условия на не характеристике $y=0$: $\left.\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\right|_{y=0} = B_i(x)$ $(i=0,1,2,\ldots,(n-h-p+1))$. В работе показывается, что функции $A(y)$, $B(y)$ не могут быть произвольными в начале координат. Оба случая решаются методом последовательных приближений и доказывается сходимость этого процесса для малого значения x и y.

Е. И. Ким

10321. Об уравнении колебаний струны. Феллер В. (Feller W.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1960, 4, № 4, 135—144. Перев. — J. Math. and Mech., 1959, 8, № 3, 339—348

10322. Несколько результатов обобщающих свойства осесимметрических потенциалов. Хубер (Some results on generalized axially symmetric potentials. Huber Alfred. Proc. Conf. Different. equations. College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 147—155) (англ.)

Для дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа

$$L_k(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{k}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

(k — действительная константа) изучается, во-первых, задача Дирихле для оператора L_k, во-вторых, свойство среднего значения u, и, в-третьих, интегральное представление u в полупространстве $x > 0$. Для целых значений k общий принцип соответствий Вайнштейна сводит изучение u к изучению гармонических функций в $(n+k)$- или в $(n+2-k)$-мерном пространстве и этот подход используется для решения второй и третьей задач. В связи с задачей Дирихле автор доказывает для любого k известные результаты и несколько обобщает их.

M. G. Arsove

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 650.

10323. Функция Грина метагармонического оператора для задач Дирихле и Нёймана для внешности круга и сферы (1-е сообщение). Этьенн (Fonction de Green de l'opérateur métaharmonique pour les problèmes de Dirichlet ou de Neumann à l'extérieur d'un cercle ou d'une sphère. (1-e communication). Étienne J.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, 27, № 5-6, 142—156 (франц.)

Приведены различные представления функции Грина оператора $(-\Delta + k^2)$ для внешности круга. Используя различные разложения функции Ганкеля от чисто мнимого аргумента ($K_0(z)$), автор получает ряд разложений функции Грина, например, такие:

$$a/G(P, P_0) = K_0(kR) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{K_m(kr)K_m(kr_0)\,\chi\, I_m(ka)}{\chi K_m(ka)} \cos m(\theta - \theta_0) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{K_m(kr_0)}{\chi K_m(ka)} \left[I_m(kr)\chi\, K_m(ka) - \right. \\ \left. - K_m(kr)\chi\, I_m(ka)\right] \cos m(\theta - \theta_0) \quad (r < r_0), \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{K_m(kr)}{\chi\, K_m(ka)} [I_m(kr_0)\,\chi\, K_m(ka) - \\ - K_m(kr_0)\chi I_m(ka)] \cos m(\theta - \theta_0) \quad (r > r_0), \end{cases}$$

где (r,θ) — полярные координаты точки P, (r_0, θ_0) — полярные координаты точки P_0, a — радиус круга, χ — оператор, выражающий краевые условия ($\chi \equiv 1$ для задачи Дирихле и $\chi \equiv \frac{\partial}{\partial r}$ для задачи Нёймана), $R = R(P, P_0)$.

$$\partial/G(P, P_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_u(kr)}{\chi\, K_u(ka)} [I_u(kr_0)\chi\, K_u(ka) - K_u(kr_0)\,\chi\, I_u(ka)] \cos u(|\theta_0 - \theta_0| + 2m\pi)\, du \quad (r < r_0);$$

при $r > r_0$ нужно поменять местами r и r_0.

Аналогичные представления в виде рядов и интегралов для решений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ были получены раньше, главным образом, в связи с задачами математической теории дифракции (см., например, Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XX и XXI).

О. И. Панич

10324. К вопросу о единственности решения обратной задачи потенциала. Симонов В. П., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 6, 14—18

Доказываются следующие три теоремы единственности решения обратной задачи логарифмического потенциала:

1. Пусть $\mu(r, \varphi)$ — положительная функция, определенная в плоскости с полярной системой координат (r, φ), и такая, что μr^2 есть возрастающая функция от r при любом φ. Тогда, если две звездные относительно полюса области G_1 и G_2, заполненные притягивающей массой с плотностью $\mu(r, \varphi)$, имеют одинаковые внешние потенциалы, то области G_1 и G_2 совпадают.

2. Решение обратной задачи единственно в классе областей $\{G\}$, определяемом следующим образом. Если

$w = f(z)$, $f(0) = 0$ голоморфна и однолистна в круге $|z| < R$, то существует такое число ρ_0, удовлетворяющее неравенствам $(2-\sqrt{3})R \leqslant \rho_0 \leqslant R$, что $|zf'(z)|$ есть возрастающая функция от $|z|$ при $0 < |z| < \rho_0$. Тогда $\{G\}$ есть класс областей в плоскости w, прообразы которых при отображении $w = f(z)$ звездны относительно точки $z = 0$ и лежат в круге $|z| < \rho_0$. При этом плотность распределения масс постоянна.

3. Пусть односвязная область G_1, ограниченная аналитическим контуром C, является решением обратной задачи при заданной положительной функции $\mu(x, y)$ — плотности массы, заполняющей G_1. Тогда существует такое положительное число ε, зависящее от C, что в ε-окрестности области $\overline{G_1}$ не существует иного решения задачи, кроме области G_1.

Очевидно, что теорема 1 является распространением на случай переменной плотности теоремы единственности Новикова (Докл. АН СССР, 1938, **18**, № 3, 165—168).

Ю. А. Шашкин

10325. О собственных функциях уравнения колебаний мембраны в сингулярном случае. Плейель (On the eigenfunctions of the membrane equation in a singular case. Pleijel Åke. Proc. conf. different. equations, College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 197—207) (англ.)

Рассматривается трехмерная задача о собственных значениях

$$\Delta u + \lambda k(x, y, z)u = 0 \qquad (1)$$

в конечной области V с граничным условием $u = 0$. Ранее (Amer. J. Math., 1948, **70**, 892—907) автор доказал, что если собственными значениями задачи являются числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ и соответствующие им собственные функции в точке p принимают значения $\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots$ то

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} \varphi_n^2(p) = \frac{k^{1/2}(p)\,\lambda^{3/2}}{6\pi^2} + o(\lambda^{3/2}). \qquad (2)$$

В настоящей работе рассматривается случай, когда $k \geqslant 0$ и когда p изменяется во внутренней подобласти V_0 области V, в которой $k = 0$. В этом случае главный член выражения (2) исчезает.

Доказывается, что для p и q из V_0 предел функции Грина $G(p, q; \lambda)$ уравнения (1) при $\lambda \to -\infty$ является значением $g(p, q)$ функции Грина уравнения $\Delta u = 0$ в области V_0. Отсюда и из разложения Фурье функции $G(p, q; \lambda) - g(p, g)$ следует соотношение

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} \varphi_n(p)\,\varphi_n(q) = O(\lambda)$$

для $p, q \in V_0$.

В частном случае, когда k вне V_0 есть положительное постоянное число c^2, авторы указывают более сильный результат:

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} \varphi_n(p)\,\varphi_n(q) =$$

$$= 2\lambda^{1/2}\pi^{-1}c^{-1}\iint_{S_0} \frac{\partial g}{\partial \nu}(p, \cdot)\,\frac{\partial g}{\partial \nu}(q, \cdot)\,dS_0 + o(\lambda^{1/2}),$$

где S_0 — граница V_0 и $p, q \in V_0$. H. F. Weinberger

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 4, 315.

10326. О принципе предельного поглощения. Эйдус Д. М., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 3, 508—511

Для единственности решения краевой задачи для уравнения эллиптического типа

$$gu \equiv -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)u = \lambda u + f(x) \qquad (1)$$

в бесконечной области Ω с границей Γ в том случае, когда λ — точка спектра оператора g, должны быть заданы дополнительные условия на бесконечности. Эти условия можно формулировать в форме „принципа предельного поглощения": решение краевой задачи для уравнения (1) определяется как предел при $\varepsilon \to 0$ соответствующей краевой задачи для уравнения $gu = (\lambda + i\varepsilon)u + f$.

В данной работе проведено обоснование этого принципа для случая области с конечной границей Γ и для случая цилиндрической области. При этом предполагается, что a_{ij} — вещественные, ограниченные и непрерывно дифференцируемые в $\Omega + \Gamma$ функции, q — вещественная, ограниченная и измеримая в Ω функция, f принадлежит $L_2(\Omega)$. Кроме того, для случая конечной границы Γ $a_{ij} = \delta_{ij}$, $|q(x)| \leqslant c_1 r^{-2-\alpha}$, $|f(x)| \leqslant c_2 r^{-3-\beta}$ ($\alpha > 1/6$, $\beta > 0$, $c_k > 0$) вне сферы S_{ρ_0}, содержащей внутри границу Γ (аналогичные условия вводятся и для случая цилиндрической области). Показано, что в любой конечной внутренней подобласти Ω' существует такая постоянная $c_4(\Omega')$, что для любых λ_1 и λ_2 из $a \leqslant \lambda \leqslant b$ ($a > 0$, все точки $[a, b]$ — точки непрерывности спектральной функции оператора g) и для всех $x \in \Omega'$ имеет место неравенство $|u(x, \lambda_1) - u(x, \lambda_2)| \leqslant c_4 |\lambda_2 - \lambda_1|$.

А. Г. Свешников

10327. О первой граничной задаче для уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности. Камке (Über die erste Randwertaufgabe bei der Laplace- und der Wärmeleitungs-Differentialgleichung. Kamke Erich), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1959, **62**, № 1, 1—33 (нем.)

Излагается обобщение и развитие метода Перрона (Perron O., Math. Z., 1923, **18**, 42—54 и Петровский И. Г., Успехи матем. наук, 1941, **8**, 107—114) решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности. С этой целью на плоскости, кроме обычной топологии, вводится и другая более слабая, которая превращает совокупность точек плоскости в некоторое хаусдорфово пространство T; значит всякое открытое (соответственно замкнутое) множество в обычном смысле является и T-открытым (соответственно T-замкнутым) множеством, но, вообще говоря, не наоборот. Для всякого множества $M \subset T$ через $\mathfrak{R}_i^*(M)$, $\mathfrak{R}_a(M)$ и $\mathfrak{R}_T(M)$ обозначается соответственно множество всех внутренних, внешних и краевых точек множества M. Полагается $\mathfrak{R}^*(M) = \mathfrak{R}_a(M) \cup \mathfrak{R}_T(M)$ и $\mathfrak{R}(M) = \overline{\mathfrak{R}^*(M)}$. Рассматривается некоторая фиксированная система $\{G\}$ так называемых элементарных областей G, являющихся системой окрестностей пространства T, образующих его базу и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Для каждой элементарной области G предполагается заданным некоторый оператор $M_G[x; f]$, ставящий в соответствие каждой определенной и непрерывной на $\mathfrak{R}(G)$ функции f функцию $g(x) = M_G[x; f]$, определенную и удовлетворяющую на G определенным условиям по аналогии с понятием субгармонической, супергармонической и гармонической функций. Вводится понятие субоператорной (Subfunktion), супероператорной (Superfunktion) и операторной (Vollfunktion) функции. Доказывается принцип максимума для субоператорной (соответственно принцип минимума для супероператорной) функции. С помощью элементарных областей (для которых решение соответствующей вспомогательной зада-

чи дает оператор $M_G[x;f]$) обобщением метода Перрона для определенного класса областей пространства T решается первая краевая задача (отыскание операторной функции по соответствующим граничным значениям). Даются различные конкретные интерпретации оператора $M_G[x;f]$. Производятся исследования регулярности граничных точек областей, примыкающие к соответствующим исследованиям И. Г. Петровского (Petrowsky I., Compositio math., 1935, 1, 383—419). Л. Д. Кудрявцев

10328. Об уравнениях в частных производных эллиптического типа с сингулярными коэффициентами. Бурнат (Über partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus mit singulären Koeffizienten. Burnat M.), Studia math., 1959, 18, № 2, 137—159 (нем.)

Работа является продолжением исследований автора по задаче рассеивания в квантовой механике (РЖФиз, 1959, 21786; см. также Повзнер А. Я., РЖМат, 1953, 263; Флексер М. Ш., РЖМат, 1959, 3813). Пусть Ω — произвольная (неограниченная) область трехмерного пространства с достаточно гладкой границей, $x=(x_1x_2x_3)$, $Lu=L^0u+q(x)\cdot u$, где $L^0u=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)-$ эллиптический оператор с достаточно гладкими коэффициентами (например, $a_{ik}\in C^4$), чтобы обеспечить существование фундаментального решения $\varphi(x,y)$. Функция $q(x)$ непрерывна всюду, за исключением конечного числа точек, ограниченных линий и поверхностей; для каждого шара $K\int_K q^2(x)\cdot dx<+\infty$; найдутся число N и достаточно большой шар K_N такие, что для $x\in\Omega-K_N$ выполняется неравенство $|q(x)|<N$. Для самосопряженного расширения оператора Lu исследуются поведение резольвентного ядра $H(x,y,\lambda)$ и его производных 1-го и 2-го порядка в точках сингулярности $q(x)$, и аналогичные вопросы для собственных функций. Приводим основные результаты.

Теорема 1. На дискретном спектре оператора собственные функции непрерывны (включая точки сингулярности $q(x)$).

Теорема 3. $|H(x,y,\lambda)-\varphi(x,y)|\leqslant M+N\cdot\int_{K_\varepsilon}\frac{|q(s)|ds}{|P-s|\cdot|s-y|}$, где $P-$ сингулярная точка $q(x)$, $|P-s|$ и $|s-y|$ — расстояния между соответствующими точками; K_ε — некоторый шар с удаленной ε-окрестностью точки P. В частности, если $q(x)=O(1/|P-s|^\alpha)$, то

$$|H(x,y,\lambda)-\varphi(x,y)|\leqslant M+N\begin{cases}O(1), & \alpha<1;\\ O(\ln|P-s|) & \alpha=1;\\ O(1/|P-s|^{\alpha-1}) & \alpha>1.\end{cases}$$

Теорема 5. $\left|\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\leqslant K+M\int_{K_\varepsilon}\frac{|q(s)|ds}{|x-s|^2}+N\int_{K_\varepsilon}\frac{|q(s)|\cdot ds}{|x-s|^2\cdot|s-y|}$.

Теорема 6. $\left|\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}\right|\leqslant M+N\int_{K_\varepsilon}\frac{|q(s)|ds}{|s-x|^2}$ ($f_\lambda-$ собственная функция). Библ. 17 назв. Имеются опечатки.

Л. Г. Михайлов

10329. Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на многообразиях. Глушко В. П., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 3, 492—495

В открытой ограниченной области Ω с достаточно гладкой границей Γ n-мерного пространства E_n точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ рассматривается дифференциальный оператор $Lu=(-1)^l\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=l\\ \alpha_l\geqslant 0}}\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_n=l\\ \beta_l\geqslant 0}}\frac{\partial^\nu}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\times\left(a^{\beta_1,\ldots,\beta_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)\frac{\partial^l u}{\partial x^{\beta_1},\ldots,\partial x^{\beta_n}_n}\right)$, определенный на некотором множестве $D(L)$. Пусть $M=\overline{\Omega}_1R_m$, где $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$, а R_m — гиперплоскость $x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=0$. На коэффициенты $a^{\beta_1,\ldots,\beta_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)$ налагаются условия:

I. $a^{\beta_1,\ldots,\beta_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)-l$ раз непрерывно дифференцируемые функции в $\Omega-M$.

II. $a^{\beta_1,\ldots,\beta_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)=a^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(x)$ $(x\in\Omega-M)$.

III. Для любых действительных чисел $\xi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ имеет место оценка $\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=l}\sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=l}a^{\beta_1,\ldots,\beta_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)\xi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\times\xi_{\beta_1,\ldots,\beta_n}\geqslant\frac{\mu_1}{r^{2k}}\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=l\\ \alpha_l\geqslant 0}}\xi^2_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, где $\mu>0$, $-\infty<k<\infty$, $r-$ расстояние от $x\in\Omega$ до множества M. В качестве $D(L)$ берется множество всех $2l$ раз непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в окрестностях Γ и M. Пусть H_L — гильбертово пространство функций, полученное замыканием $D(L)$ в метрике, определяемой скалярным произведением $I(u,v)=\int_\Omega\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\ldots\sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n}a^{\beta_1,\ldots,\beta_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}ABdx$, где

$$A=\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad B=\frac{\partial^l v}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}.$$

Устанавливается теорема. Пусть выполнены условия I, II, III. Тогда для любой функции $g(x)$ из некоторого пространства L существует единственное обобщенное решение $u\in H_L$ первой однородной краевой задачи для уравнения $Lu=g$. При некоторых дополнительных условиях утверждается, что всякое классическое решение уравнения $Lu=g$ при однородных граничных условиях является обобщенным. Далее следует обобщение на несамосопряженные уравнения вида $L_1u=Lu+\sum_{\nu=2l-1}^{l}\sum_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n=\nu}b_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(x)\,C=h$, $\gamma_l\geqslant 0$, где $C=\frac{\partial^\nu u}{\partial x_1^{\gamma_1},\ldots,\gamma x_n^{\gamma_n}}$. Эти результаты обобщают соответствующие результаты М. И. Вишика (РЖМат, 1956, 8824) и В. К. Захарова (РЖМат, 1960, 4019) и ряда других авторов.

А. А. Вашарин

10330. Разложение по собственным функциям дифференциального уравнения с частными производными. Титчмарш Е. К. (Titchmarsh E. C.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, 1, № 2, 61—77. См. РЖМат, 1954, 2148.

10331. Теорема Штурма для дифференциальных уравнений в частных производных. Редхеффер (A Sturmian theorem for partial differential equations. Redheffer R. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 458—462 (англ.)

10332. О связи между классическим и обобщенным решениями задачи Дирихле и задачи на собственные значения. Ильин В. А., Шишмарев И. А., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 6, 1176—1179

Изучается связь между классическим и обобщенным решениями задачи Дирихле

$$Lu = -f \text{ в области } g, \quad u|_\Gamma = 0 \tag{1}$$

и задачи на собственные значения

$$Lv + \lambda v = 0 \text{ в области } g, \quad v|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

В этих задачах g — произвольная нормальная, ограниченная N-мерная область, Γ — граница g; L — самосопряженный дифференциальный оператор $L = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\ \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - c(x)$ эллиптического типа.

Доказывается следующая теорема: Пусть 1) $a_{ij} \in C^{(1,\mu)}$, $c(x) \in C^{(0,\mu)}$ $(\mu > 0)$ в некоторой открытой области C, содержащей g с границей Γ; 2) пусть в C $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2$, $\alpha > 0$ — постоянная; 3) $c(x) \geqslant 0$ в C; 4) $f(x)$ непрерывна в области $(g + \Gamma)$ и принадлежит $C^{(0,\mu)}$ в области g. Тогда классическое решение задачи (1) почти всюду в g совпадает с обобщенным решением этой задачи. Аналогичная теорема имеет место для задачи (2). Б. М. Левитан

10333. Метод отражений и решение некоторых уравнений в частных производных. Роулендс (The method of images and the solution of certain partial differential equations. Rowlands G.), Appl. Scient. Res., 1959, **B8**, № 1, 62—72 (англ.)

Пусть $\Psi_m(r)$, $(m = 1, 2, \ldots)$ (r-точка n-мерного евклидова пространства E_n) является ортонормированной системой собственных функций оператора Лапласа для некоторой области Ω (по-видимому, конечной) в E_n, обращающихся в нуль на границе Γ области Ω. По-видимому, предполагается, что область Ω такова, что $\Psi_m(r)$ продолжимы на все пространство E_n и удовлетворяют уравнению $\Delta\Psi_m + \omega_m^2\Psi_m = 0$ (ω_m^2 — собственные числа). Пусть B — произвольное число (по-видимому, предполагается $B^2 \neq \omega_m^2$ $(m = 1, 2, \ldots)$). Тогда решение задачи $(\Delta + B^2)\varphi(r) = S(r)$, $\varphi|_\Gamma = 0$ ($S(r)$ предполагается равным нулю вне Ω) дается рядом $\varphi(r) = \sum C_m\Psi_m/(B^2 - \omega_m^2)$, где C_m — коэффициенты Фурье $S(r)$ по системе $\{\Psi_m\}$. Можно рассматривать последний ряд как ряд, определяющий функцию $\varphi_\infty(r)$ во всем E_n. Тогда, полагая $S_\infty(r) = \sum C_m\Psi_m$, во всем E_n имеем $(\Delta + B^2)\varphi_\infty = S_\infty(r)$. Аналогично вводится функция Грина для $S(r)$, совпадающего с δ-функцией. Вопросы сходимости рядов в статье не обсуждаются. Рассматривается также уравнение теплопроводимости $\Delta\varphi - (\partial\varphi/\partial t) = 0$, которое преобразованием Лапласа по t проводится к рассмотренному выше. Рассматривается пример конечного и полубесконечного стержня. Х. Л. Смолицкий

10334. Об одном решении смешанной задачи, поставленной для уравнений гиперболического типа. Джавадов (Һиперболик типли тәнликләр үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин бир һәлли һаггында. Чавадов М. һ.), АзәрбССР Елмләр Акад. хәбәрләри. Физ.-техн. вә ријазијјат елмләри сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1959, № 3, 3—13 (азерб., рез. русск.)

Рассматривается смешанная задача для уравнения

$$Lu + f = 0 \tag{1}$$

при граничном условии

$$u|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u\Big|_{x_0=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} = \varphi_1(x) \tag{3}$$

в цилиндре $Q = \Omega \times [0, l]$ пространства E_{n+1}, где

$$Lu = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x_0, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} a_i(x_0, x)\ \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x_0, x)u,$$

Ω — ограниченная область точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с границей Γ. Предполагается, что данные задачи достаточно гладкие. Через $\dot{D}_m(Q)$ обозначается множество функций, имеющих в Q непрерывные производные до порядка m, через $\mathring{D}_{1m}(Q)$ — замыкание $\dot{D}_{1m}(Q)$ в метрике пространства $W_2^{(m)}(Q)$. Замыкание множества функций из $\dot{D}_{1m}(Q)$, обращающихся в нуль при x_0, принадлежащем интервалу вида $[l - \delta, l]$, обозначается через $\mathring{D}_{2m}(Q)$. Доказывается, что если граница области Q кусочно-гладкая, то между пространствами $Z_{mp}(\overline{Q})$ и $\left(W_p^{(m)}(Q)\right)^*$ существует изоморфизм. $u(x_0, x)$ назовем обобщенным решением задачи (1) — (3) в смысле I, если $\int_Q \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + \right.$

$$+2\sum_{i=1}^{n} a_{0i}\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \left[2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{0i}}{\partial x_0}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=0}^{n} a_i\ \frac{\partial u}{\partial x_i} - au - f \right] \Phi \right\} dQ +$$

$$+ \int_\Omega \left(\varphi_1(x) + 2\sum_{i=1}^{n} a_{0i}\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \right) \Phi\Big|_{x_0=0} d\Omega = 0.$$

$u(x_0, x)$ назовем обобщенным решением задачи (1) — (3) в смысле II, если для произвольной $\Phi \in L_2(Q) \cap \mathring{D}_{22}$ при φ_0, $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$ имеет место равенство $\int_Q \{u \cdot L^*\Phi + f\Phi\}\, dQ -$

$$- \int_\Omega \left\{ R(\varphi_0, \varphi_1, \Phi|_{x_0=0}) - \varphi_0\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} \right\} d\Omega = 0,$$

где L^* есть сопряженный по Лагранжу к оператору L,

$$R(\varphi_0, \varphi_1, \Phi|_{x_0=0}) = \varphi_1(x)\Phi|_{x_0=0} + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{0i}\Phi|_{x_0=0})\varphi_0 -$$

$$- \varphi_0(a_0\Phi)_{x_0=0}.$$

Всякое решение задачи (1) — (3) в смысле I есть также решение этой задачи в смысле II. На примере показывается, что обратное утверждение не всегда имеет место. Если решение $u(x_0, x)$ задачи (1) — (3) в смысле II принадлежит $\mathring{D}_{11}(Q)$ и $\int_\Omega [u(x_0, x) - \varphi_0(x)]^2\, d\Omega \to 0$ при $x_0 \to 0$, то u есть решение этой задачи в смысле I. При условиях этого утверждения, если $u(x_0, x) \in w_2^{(2)}(a)$, то u

сть решение задачи (1) — (3) почти всюду. Далее задача (1) — (3) методом В. И. Вишика и С. Л. Соболева (РЖМат, 1960, 7642) приводится к уравнению

$$(Lu, v) = (\rho, v), \qquad (4)$$

рассматриваемому в классе обобщенных функций, где $\rho = \varphi_1\delta_\Omega - a_0\varphi_0\delta_\Omega + \frac{\partial(\varphi_0, \varphi_\Omega)}{\partial x_0} - f$, v есть произвольный элемент пространства, получаемого продолжением всех функций из $\mathring{D}_{22}(Q)$ на все E_{n+1}, δ_Ω — δ-функция, сосредоточенная на Ω с единичной плотностью, $(\ ,\ )$ — скалярное произведение, взятое по всему пространству E_{n+1}; u, ρ — обобщенные функции над $W_2^{(2)}(E_{n+1})$. Пользуясь одной теоремой О. А. Ладыженской (РЖМат, 1953, 3774 К), автор доказывает следующее утверждение. Если в цилиндре Q функции a_{ij} трижды, a_i дважды, a один раз непрерывно дифференцируемы и если область Ω имеет кусочно-гладкую границу класса $C^{(3)}$, то для всякого $\rho \in Z_{2,2}(\overline{Q})$ уравнение (4) имеет единственное решение в классе $Z_{1,2}(\overline{Q})$. М. Л. Расулов

10335. Об уравнениях в частных производных второго порядка $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, интегрируемых методом Дарбу. Дрэган (Asupra ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ integrabile prin metoda lui Darboux. Drăgan I.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil Jaşi. Mat., 1956, 7, № 1, 71—117 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть дано уравнение второго порядка (аналитическое) с различными характеристиками и расширением до n-го порядка. Ищутся случаи, в которых уравнение интегрируемо методом Дарбу по обеим системам характеристик. Иначе говоря, ищутся случаи, в которых уравнения каждой системы характеристик n-го порядка допускают по крайней мере два первых интеграла. Если n — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию, то одна их характеристических систем допускает только два первых интеграла, а для второй $m \geqslant 2$. Уравнение в этом случае эквивалентно системе Пфаффа

$$dx_l - \varphi_a(u_1, \ldots, u_m) A_{al}(x)\, du_m - \psi_a(v_1 v_2) B_{al}(x) dv_2 = 0, \quad (1)$$

$$du_{k+1} - u_k\, du_m = 0;\ a, i = 1, 2, \ldots, 2n - m + 1,\ k = 1, 2, \ldots, m - 2,$$ где $u_1, \ldots, u_m, v, v_2$ — соответственно выбранные, первые интегралы систем характеристик, φ_a, ψ_a — функции, среди которых отличные от нуля линейно независимы между собой, а функции $A_{al}^{(x)}$ $B_{al}^{(x)}$ определяются двумя группами Ли, которые просто транзитивны, обратны инфинитезимальным преобразованиям $L_{al} f = A_{al}(x) p_i$; $(\mathfrak{M})$ $M_{al} f = B_{al}(x)\, p_i$, $a, i = 1, 2, \ldots, n - m$, и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Автор исследует далее дополнительные условия, которым должны удовлетворять группы $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ и функции φ для того, чтобы получался сформулированный результат, и дает классификацию системы (1). M. Haimovici

10336. Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений. Гординг Ларс (Gårding L.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, 2, № 1, 81—95.

См. РЖМат, 1958, 2956.

10337. О задаче Коши для гиперболических уравнений и о дифференцируемости решений эллиптических уравнений. Лакс (в подл. Лэкс Питер Д.) (Lax P. D.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, 1, № 1, 43—59.

РЖМат, 1958, 4731.

10338. Об одном методе решения гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную. Арутюнян Н. Х., Джрбашян М. М., Александрян Р. А., Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, 10, № 1, 113—121 (рез. арм.)

10339. Замечания о методе Дарбу для уравнения Лапласа $s + ap + bq + cz = 0$. Дрэган (Observaţii asupra metodei lui Darboux pentru ecuaţia lui Laplace $s + ap + bq + cz = 0$. Drăgan I.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Iaşi. Mat., 1957, 8, № 2, 151—155 (рум.; рез. русск., франц.)

Классическое решение задачи о связи между методами Дарбу и Лапласа, относящимися к уравнению

$$s + ap + bq + cz = 0, \qquad (1)$$

данное Гурса, рассматривается автором при помощи теории пфаффианов. Основное содержание теоремы Гурса вытекает из нижеследующего результата:

Равенство нулю произведения инвариантов Лапласа hk или $h_{n-1}k_{(-n-1)}$ приводит к интегрируемости уравнения (1) методом Дарбу по характеристикам первого соответственно n-го) порядка и обратно. D. Mangeron

10340. Разложение решения двумерного волнового уравнения в ряды по однородным полиномиальным решениям. Уиддер (Expansions in series of homogeneous polynomial solutions of the general two-dimensional linear partial differential equation of the second order with constant coefficients. Widder D. V.), Duke Math. J., 1959, 26, № 4, 599—603 (англ.)

Пусть $P_n(x, y)$ — однородный полином степени n, удовлетворяющий уравнению $u_{xx} = u_{yy}$. Устанавливается формула

$$P_n(x, y) = A_n(x + y)^n + B_n(x - y)^n; \quad A_n = B_n = \text{const}.$$

Основным результатом работы является доказательство теоремы, утверждающей, что областью сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x + y)^n + B_n(x - y)^n \qquad (1)$$

является прямоугольник

$$|x + y| \leqslant \rho_1, \quad |x - y| \leqslant \rho_2 \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{\rho_1}, \right.$$

$$\left. \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|B_n|} = \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Внутри этого прямоугольника ряд (1) сходится. Вне его ряд может сходиться разве лишь на некоторых отрезках, лежащих на продолжениях диагоналей.

В. М. Бабич

10341. Зависимость решений гиперболических уравнений от коэффициентов и данных на характеристиках. Кордуняну (La dépendance des solutions des équations hyperboliques par rapport aux coefficients et aux données sur les caractéristiques. Cordunea-nu C.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, 1, № 1, 41—44 (франц.)

Показано, что решение задачи Гурса $z_{xy} + a(x, y) z_x + b(x, y) z_y + c(x, y) z = d(x, y)$, $z(x, 0) = f(x)$, $z(0, y) = g(y)$ $(0 \leqslant x \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant y \leqslant \beta)$ мало изменится по абсолютной величине, если a, b, c, d, f, g получат малые по абсолютной величине приращения и если, кроме того, мало изменятся полные вариации функций f и g или полные вариации функции $a(x, y)$ как функции x и функции $b(x, y)$ как функции y. В. М. Бабич

10342. Задача Коши и смешанная задача для нелинейного гиперболического уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными. Конлан (The Cauchy problem and the mixed boundary value problem for a non-linear hyperbolic partial dif-

ferential equation in two independent variables. Condam James), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, 3, № 4, 355—380 (англ.)

Дается доказательство существования в любом квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant A$ решения задачи Коши с начальными данными при $x = y$ в случае уравнения

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) = f(x, y, u, p, q), \qquad (1)$$

когда f ограничена равномерно по x, y, u, p, q $(-\infty < u, p, q < +\infty)$; $0 \leqslant x, y, A$; f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по p и q с константой, не зависящей от x, y, u, p, q. Оказывается, что в условиях теоремы, единственности решения не будет (достаточно взять, например, $f = \sqrt{u}$). В работе предложен следующий способ приближенного решения задачи Коши. Пусть t_j^n $(j = 0, \ldots, n)$ — положительные числа $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = A$. Разобьем квадрат $0 \leqslant x, y \leqslant A$ на n^2 прямоугольников $R_{jk} = \{t_j^n < x < t_{j+1}^n;\ t_k^n < y < t_{k+1}\}$. Приближенное решение строится последовательно: сначала в прямоугольниках, примыкающих к прямой $x = y$, затем в соседнем ряде прямоугольников, затем в следующем ряде и т. д. В области, где $x > y$, приближенное решение в прямоугольнике R_{jk} строится после того, как оно уже построено в прямоугольниках $R_{j+1,\,k}$ и $R_{j,\,k-1}$. Пусть u_{jk} — значение приближенного решения в точке t_j, t_k. Полагаем приближенно в прямоугольнике R_{jk}:

$$u = u_{j+1,k}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1,k} - u_{jk}}{t_{j+1} - t_j},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{j+1,k+1} - u_{j,k+1}}{t_{j+1} - t_j}.$$

Таким образом в R_{jk} правая часть уравнения (1) известна и значения u на двух сторонах R_{jk} тоже известны (так как u построено в $R_{j+1,k}$ и $R_{i,k-1}$). В R_{jk} для u получается задача Гурса для уравнения (1), когда правая часть f известна. Решение такой задачи легко записать в квадратурах. В работе доказана равномерная сходимость вместе с первыми производными построенных приближенных решений. Это потребовало довольно длинных оценок. Во второй части работы аналогичные результаты получены для смешанной задачи $u_{xy} = f(x, y, u, p, q)$, $u(0, y) = \varphi(y)$, $u(x, x) = \psi(x)$, когда на f наложены те же ограничения, что и раньше.

В. М. Бабич

10343. О потенциалах параболических уравнений. Михайлов В., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 6, 1226—1229

Методом потенциалов решается смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{p-1} \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} \quad (p > 1) \qquad (1)$$

в прямоугольнике $D = (0 < x < 1) \times (0 < t < T)$ при условиях $u|_{t=0} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=0} = F_k(t), \quad \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=1} = \Phi_k(t), \quad 0 \leqslant k \leqslant p-1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Эта задача оказывается поставленной корректно, если $F_k(t)$ и $\Phi_k(t)$ удовлетворяют условию Липшица порядка $1 - \frac{k+1}{2p} + \varepsilon$, где $0 \leqslant k \leqslant p-1$ и $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Потенциалом k-го порядка, $0 \leqslant k \leqslant 2p-1$, с непрерывной плотностью $\mu_k(\tau)$, сосредоточенной на прямой $\zeta = 0$, называется функция

$$U_k(x, t) = \int_0^t \mu_k(\tau) \left.\frac{\partial^k G(x, \xi; t, \tau)}{\partial \xi^k}\right|_{\xi=0} d\tau,$$

где $G(x, \xi; t, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1). Аналогично определяется потенциал $V_k(x, t)$ с непрерывной плотностью $\nu_k(\tau)$ на прямой $\xi = 1$.

Решение задачи ищется в виде суммы потенциалов $u(x, t) = \sum_{k=0}^{p-1} [U_k(x, t) + V_k(x, t)]$ с неизвестными плотностями μ_k и ν_k. Для нахождения μ_k и ν_k получается система интегральных уравнений, которая после некоторых преобразований превращается в систему уравнений Вольтерра второго рода. В заключение автор замечает, что полученный результат с помощью методов его заметки (РЖМат, 1960, 7693) распространяется на общее линейное уравнение $2p$-го порядка параболического типа с двумя переменными. Ю. А. Шашкин

10344. Поправка. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 5, 872

См. РЖМат, 1960, 1676.

10345. Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с малым параметром при старшей производной. Исакова Е. К., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 6, 935—938

Рассматривается поведение при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Коши для уравнения

$$\varepsilon u_{xx}^\varepsilon - u_t^\varepsilon + b(x, t) u_x^\varepsilon + c(x, t) u^\varepsilon = 0,$$

$$u^\varepsilon(x, t)|_{t=0} = \psi(x); \quad \psi(+0) \neq \psi(-0) \qquad (1)$$

с естественными ограничениями на $\psi(x)$ и на коэффициенты.

Пусть v — решение вырожденной задачи

$$-v_t + bv_x + cv = 0, \quad v|_{t=0} = \psi. \qquad (2)$$

Главная по ε часть разности $u_\varepsilon - v$ при $\varepsilon \to 0$ в окрестности характеристики $l(0, 0)$ уравнения (2) называется внутренним параболическим пограслоем.

Теорема 1. 1) Вне окрестности $l(0, 0)$ $u^\varepsilon(x, t) \to v(x, t)$ равномерно, 2) вблизи $l(0, 0)$ имеет место представление $u^\varepsilon = v + v_{0\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} (v_k^+ + v_k^-) + O(\sqrt{\varepsilon^{n+1}})$, где пограничный слой $v_{0\varepsilon}$ имеет вид

$$v_{0\varepsilon} = \frac{\psi(-0)}{\sqrt{\pi}} h^+(y) \int_{\frac{y}{2\sqrt{\varepsilon z}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi - \frac{\psi(-0)}{\sqrt{\pi}} h^-(y) \int_{-\infty}^{y/2\sqrt{\varepsilon z}} e^{-\xi^2} d\xi,$$

v_k^+, v_k^- — следующие члены разложения по ε тоже выписаны в явном виде; y, z — новые координаты взамен старых (x, t), связанные с характеристиками $l(x, t)$.

Теорема 2 (принцип локализации). Пусть $\psi_\delta(x)$ — функция, равная $\psi(x)$ в δ-окрестности точки x_0 и нулю вне этой окрестности. Тогда $u^\varepsilon(x_1, t_1) - u_\delta^\varepsilon(x_1, t_1) = O\left(\frac{1}{\varkappa(\varepsilon)} e^{-\varkappa^2(\varepsilon)/2}\right)$, где $\delta(\varepsilon) = B\sqrt{\varepsilon}\varkappa(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ $\lim \varkappa(\varepsilon) = \infty$. Здесь u_δ^ε — решение уравнения (1) с начальным условием $\psi_\delta(x_0)$, где x_0 — точка пересечения характеристики $l(x, t_1)$ с осью x. А. Л. Крылов

10346. Свойство максимума в задаче Коши. Уэйнбергер (A maximum property of Cauchy's problem. Weinberger H. F.), Ann. Math., 1956, **64**, № 3, 505—513 (англ.)

Жермен и Бадер (РЖМат, 1955, 3767) доказали, что уравнение Трикоми $yu_{xx} - u_{yy} = 0$ обладает следующим свойством при $y > 0$: если AP и BP — две характеристики, проходящие через точку P от A и B, лежа-

щей на сингулярной линии $y=0$, и если $u\to 0$ на AP, тогда максимум u в криволинейном треугольнике APB достигается на сегменте AB сингулярной линии $y=0$. Агмон, Ниренберг и Проттер (РЖМат, 1955, 3212) при соответствующих предположениях относительно коэффициентов уравнения и решения u, обобщили этот результат на общие гиперболические уравнения $u_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$ и $Ku_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0$. Недавно Бохнер (РЖМат, 1959, 627) доказал, что ультрасферические полиномы $P_n(x)$ обладают свойством, что если $\sum a_nP_n(x)\leqslant 0$ в $-1\leqslant x\leqslant 1$, тогда $\sum a_nP_n(x)P_n(y)<0$ в $-1\leqslant x,\ y\leqslant 1$. Так как P_n — собственные функции, нормированные $P_n(1)=1$, обыкновенного дифференциального оператора L_x, который сингулярен на $x=1$ и так как второй ряд может быть представлен как решение гиперболической задачи Коши, состоящей из дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа $L_xu-L_yu=0$, вместе с тем начальными условиями $u(x,1)>\sum a_nP_n(x)$, где начальные условия от u_y заменены условиями регулярности, то теорема Бохнера может быть рассмотрена как следствие свойства максимума проблемы Коши.

Во 2-й части статьи автор устанавливает свойство максимума для задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа $(au_x)_x-(bu_y)_y+(cu)_x+(du)_y$ при соответствующих условиях на коэффициенты. В 3-й части свойство максимума применяется к обыкновенному дифференциальному оператору и получает обобщение теоремы Бохнера. 4-я часть содержит теорему сравнения типа Штурма, которая применяется для получения нижней границы собственных значений. J. B. Diaz

Перевод из Math. Revs, 1958, 19, № 10, 1058.

10347. Распространение особенностей решений уравнения гиперболического типа в полосе с отражением от нерегулярных стенок. Баранцев Р. Г., Научн докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 5, 10—18

Рассматривается решение задачи (С) для уравнения $u_{xx}-K(x)u_{tt}=0$ в полосе $S[0\leqslant x\leqslant 1]$ (РЖМат, 1960, 7678). Выделяя главную часть решения во внутренней полосе $S'[0<x_1\leqslant x\leqslant x_2<1]$, автор исследует распространение вдоль характеристик разрыва первого рода в начальном данном функции $p(x)$ во внутренней точке x_* линии $t=l(x)$ и разрывов первого рода, получающихся от несогласования начальных и краевых условий в точках A и B пересечения кривой $t=l(x)$ с границами $x=0$ и $x=1$ полосы S. Например, в случае $l'=\sqrt{K}$ разрыв $p(x)$ в точке $x_*\in(0,1)$ в плоскости (ζ,t), где $\zeta=\int_0^x\sqrt{K}\,dx$, $\zeta(1)=\zeta_1$ будет распространяться вдоль ломаной L^*, состоящей из отрезков прямых — характеристик, нулевое звено $L^*_-=0$ которой пересекает отрезок AB в точке (ζ_*,ζ_*), а остальные звенья ($L^*_-=2k$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$) получатся отражением отрезка $L^*=0$ от границ $\zeta=0$ и $\zeta=\zeta_1$ полосы S. При дополнительных условиях $p'(x)=x^{\alpha-1}g(x)$ в $(0,x_*)$; $p'(x)=(1-x)^{\beta-1}g(x)$ в $(x_*,1)$, где $g(x)$ — функция с ограниченным изменением, $\alpha>-\alpha/2$ при $\alpha\leqslant 0$, $\alpha>-\alpha/4$ при $\alpha\geqslant 0$, $b>-\beta/2$ при $\beta\leqslant 0$ $b>-\beta/4$ при $\beta\geqslant 0$ и

$$p(0_+)=0 \quad \text{при } \xi=\pi \quad \text{для } \alpha\leqslant 0,$$

$$p(1_-)=0 \quad \text{при } \eta_1=\pi \quad \text{для } \beta\leqslant 0$$

в случае A ($0<\xi<\pi$, $0<\eta_1<\pi$) главный член решения задачи (С) в S' будет иметь вид

$$u=K^{1/4}(x)\,P_*\{\cos[(\theta_\alpha+\theta_\beta-\pi)L^*_-]\,S(L^*_-)+$$
$$+\sin[(\theta_\alpha+\theta_\beta-\pi)L^*_-]\,C(L^*_-)+$$
$$+\cos[(\theta_\alpha+\theta_\beta-\pi)L^*_++2\theta_\alpha]\,S(L^*_+)+$$
$$+\sin[(\theta_\alpha+\theta_\beta-\pi)L^*_++2\theta_\alpha]\,C(L^*_+)\}+f_c,$$

где f_c — функция, непрерывная в S';
$P_*=K^{1/4}(x_*)[p(x_*+0)-p(x_*-0)]$; $\theta_\alpha=\alpha\pi/4(\alpha+2)$, $\theta_\beta=\beta\pi/4(\beta+2)$; $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^{-1}\sin n\pi x$, $C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^{-1}\cos n\pi x$. В ε-окрестности ломаной L^* на отрезках $L^*_-=2k\pm\varepsilon/\pi$ получается $-u=\pi^{-1}K^{-1/4}(x)P_*\times$ $\times\sin 2k(\theta_\alpha+\theta_\beta)\ln\varepsilon+O(1)$, а на отрезках $L^*_+=2k\pm\varepsilon/\pi$ $-u=\pi^{-1}K^{-1/4}(x)P_*\sin 2[(k+1)\theta_\alpha+k\theta_\beta]\ln\varepsilon+O(1)$, т. е. логарифмическая сингулярность на характеристике $L^*_+=0$ появляется при любом $\alpha\in(-1,2)$, не равном нулю. После дальнейших отражений логарифмическая особенность сохраняется и пропадает на $L^*_-=2k$ лишь при $2k(\theta_\alpha\pm\theta_\beta)=m\pi$, а на $L^*_+=2k$, когда $2(k+1)\theta_\alpha\pm$ $\pm 2k\theta_\beta=m\pi$. Аналогичным образом исследуется поведение в S' производных решения задачи (С) в этом случае и в случае, когда $p'(x)$ имеет в точке $x_*\in(0,1)$ разрыв первого рода. Те же закономерности распространения разрывов в основном сохраняются и в случае $|l'(x)|<\sqrt{K(x)}$, когда характеристические ломаные, выходящие из концов линии $t=l(x)$ не совпадают и из внутренней точки (x_*,t_*) особенности распространяются по двум различным характеристикам. И. Л. Кароль

10348. Уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу, интегральные операторы и метод спуска. Диас, Ладфорд (On the Euler—Poisson—Darboux equation integral operators, and the method of descent. Diaz J. B., Ludford G. S. S. Proc. Conf. different. equations. College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 73—89) (англ.)

Работа состоит из трех независимых частей. В 1-й части решена сингулярная задача Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу $\Delta_m u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$ при $-\infty<t<\infty$ и $k>m-1$, причем использованы некоторые идеи Ле Ру (Le Roux, J. math. pures et appl., 1900, (5), **6**, 387—422) и Бюро (РЖМат, 1956, 4532). Здесь m — размерность x-пространства и Δ_m — оператор Лапласа. Решение распространяется на другие значения k с помощью рекуррентного метода, указанного Вайнштейном (РЖМат, 1957, 7074).

Во 2-й части работы метод Ле Ру применяется для альтернативного вывода интегрального оператора первого рода, введенного Бергманом (см., например., Bergman, Amer. J. Math., 1948, **70**, 856—891) с целью изучения поведения решений некоторых гиперболических уравнений.

В 3-й части дан принцип отражения решений уравнения Гельмгольца $\Delta_m u+\lambda y=0$ для случая, когда линейная комбинация u и некоторая производная по направлению обращаются в нуль на плоскости.

H. F. Weinberger

Перевод из Math. Revs, , , 18, №

10349. О некоторых дифференциальных уравнениях с частными производными. Гусаченко (Про деякі диференціальні рівняння з частинними похідними. Гусаченко Г. М.), Наук. зап. Житомирськ. держ. пед. ін-т, 1959, 9, 97—101 (укр.)

Показывается, что для уравнения $\frac{\partial^{p+1}u(x,t)}{\partial x^p \partial t}=u(x,t)$, где $p=4k$, $-\infty<x<\infty$, достигается указанный в теореме автора (РЖМат, 1960, 7623) порядок роста решений в классе существования задачи Коши. Приводится пример неединственности решения задачи Коши в классе существования. Г. И. Эскин

10350. Об одном неравенстве для собственных значений граничной задачи для дифференциального уравнения порядка $2n$. Вито (Su una limitazione degli autovalori relativi a problemi al contorno per equazioni differenziali a derivate parziali di ordine $2n$. Vito Luciano de), Boll. Unione mat. ital., 1958, 13, № 3, 319—326 (итал.; рез. англ.)

Рассматривается задача

$$E(u)+\lambda\theta u=0,\quad x\in D, \tag{1}$$

$$L_h(u)=0,\quad x\in S\ (h=1,\ldots,q). \tag{2}$$

Здесь E — самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2n$ в конечной области D пространства E_r, L_h — дифференциальные операторы, определенные на S (границе D) не выше $(2n-1)$-го порядка, $\theta(x)(x\in D+S)$ — положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица в области $D+S$. Предполагается, что задача (1) — (2) для скалярного произведения $(u,v)=\int_{(D)}uvdx$ самосопряжена. Обозначим через u_k ортонормированные собственные функции этой задачи и через λ_k — соответствующие собственные значения. В работе доказана теорема: Пусть s — целое положительное число. Предположим, что коэффициенты оператора E и функция θ в области $D+S$ имеют непрерывные частные производные до порядка $(s-2)n$ для s четных и $(s-1)n$ для s нечетных (для $s=1$ — до порядка $2n-1$). Тогда для четных s и каждой функции u, имеющей в $D+S$ непрерывные частные производные до порядка ns и удовлетворяющей граничным условиям $L_h[E^i(u)]=0$ $(h=1,\ldots,q;\ i=1,2,\ldots,s/2-1)$, выполняется неравенство

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^s c_m^2\leqslant M\sum_{t=0}^{ns}\sum_{t_1+\ldots+t_r=t}\int_{(D)}\left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\right)^2 dx,$$

$c_m=\int_{(D)}uu_m\theta dx$. Если s нечетно, то для каждой функции u, имеющей в области $D+S$ непрерывные частные производные до порядка $(s+1)n$ и удовлетворяющей граничным условиям $L_h(E^i(u))=0$ $\left(h=1,\ldots,q;\ i=1,\ldots,\frac{s-1}{2}\right)$, выполняется неравенство

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^s c_m^2\leqslant M\sum_{t=0}^{ns}\sum_{t_1+\ldots+t_r=t}\int_{(D)}\left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\right)^2 dx+$$

$$+N\sum_{t=0}^{n(s+1)-1}\sum_{\tau=0}^{ns-1}\sum_{t_1+\ldots+t_r=t}\sum_{\tau_1+\ldots+\tau_r=\tau}\int_{(S)}\left|\frac{\partial^t u}{\partial x_1^{t_1}\ldots\partial x_r^{t_r}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^\tau u}{\partial x_1^{\tau_1}\ldots\partial x_r^{\tau_r}}\right|ds,$$

где M и N — положительные постоянные, зависящие от E, L_h, θ и D. Б. М. Левитан

10351. Базисные множества многочленов для итерированного уравнения Лапласа и итерированного волнового уравнения. Майлс, Вильямс (Basic sets of polynomials for the iterated Laplace and wave equations. Miles E. P., Jr, Williams Ernest), Duke Math. J., 1959, 26, № 1, 35—40 (англ.)

Любой многочлен от k переменных, удовлетворяющий полигармоническому уравнению $\Delta^m u=0$ (Δ — оператор Лапласа), является линейной комбинацией однородных многочленов вида $\left[\frac{n-a_k}{2}\right]$

$$P^n_{a_1,\ldots,a_k}=\sum_{i=0}^{}(-1)^j\binom{j+\left[\frac{a_k}{2}\right]}{\frac{a_k}{2}}\times$$

$$\times\Delta^j\left(x_1^{a_1},\ldots,x_{k-1}^{a_{k-1}}\right)\frac{x_k^{a_k+2j}}{(a_k+2j)!},$$

где $0\leqslant a_k\leqslant 2m-1$, $a_j\geqslant 0$ — целые числа и $\sum_{j=1}^{k}a_j=n$. Опуская множитель $(-1)^j$, получаем аналогичный результат для итерированного волнового уравнения

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)^m u=0.$$ Н. Я. Вилейкин

10352. Решение одной предельной задачи для бигармонического уравнения. Калик (Rezolvarea unei probleme la limită pentru ecuația biarmonică. Kalik Carol), Studii și cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1958, 9, № 1-4, 135—148 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть Ω — плоская область с достаточно гладкой границей Γ содержит внутри начало координат плоскости xOy. Через $\{v_l\}$ обозначается совокупность всех однородных бигармонических многочленов $\rho^n\binom{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}$, $\rho^{n+2}\binom{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}$ и бигармонических функций однородных порядка n и $2-n$ $\rho^{-n}\binom{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}$, $\rho^{2-n}\binom{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}$ (здесь ρ и φ — полярные координаты, $n=1,2,\ldots$).

Доказывается, что последовательность вектор-функций на Γ $\left\{v_l,\ -\Delta v_l+\frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial v_l}{\partial\nu}\right\}$ (ρ_0 — радиус кривизны в точке $\in\Gamma$, $\sigma=\text{const}$, Δ — оператор Лапласа, ν — внешняя нормаль к Γ) является полной в гильбертовом пространстве вектор-функций на Γ. Эта полная последовательность векторов служит для решения задачи: найти в Ω бигармоническую функцию $u(x,y)$, для которой вектор-функция $(u,\ -\Delta u+((1-\sigma)/\rho_0)(\partial u/\partial\nu))$ на Γ совпадала с заданной на Γ вектор-функцией из указанного гильбертова пространства. Х. Л. Смолицкий

10353. О краевых задачах для систем линейных дифференциальных уравнений типа уравнений теории упругости. Часть I. Кампанато (Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità. Parte I. Campanato Sergio), Ann. Scuola norm. super. Pisa sci. fis. e mat., 1959, 13, № 2, 223—258 (итал.)

Работа посвящена изучению „естественным" образом обобщенных краевых задач теории упругости. Пусть R_n — евклидово пространство n измерений, $x(x_1,\ldots,x_n)$ — точка в нем, $u(x)$ — вектор с компонентами (комплексными) $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x)$. Рассматривается оператор

$$\Lambda(\mathbf{u})\equiv-\sum_{1}^{n}{}_{hk}S_h^*\{C_{hk}S_n(\mathbf{u})\},\qquad(1)$$

где S_k — „элементарный оператор", а C_{hk} — матрица с комплексными элементами (зависящими от x). При определенном выборе матриц $C_{hk}\Lambda(\mathbf{u})$ превращается в основной оператор теории упругости $-\Delta\mathbf{u} - \varkappa\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — вектор смещения. „Элементарные операторы" $S_k(\mathbf{u})$ $(k=1,\ldots,n)$ — это векторы $\{s_{1k}(\mathbf{u})\ldots s_{nk}(\mathbf{u})\}$ с компонентами $s_{ik}(\mathbf{u})$, которые образуют тензор напряжений $S_{ik}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ $S_k^*(\mathbf{u})\equiv\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_k},\ldots\right.$ $\ldots,\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\mathrm{div}\,u_k\right),\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_k},\ \ldots,\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\}$.

Кроме разложения (1), рассматривается еще разложение оператора $\Lambda(\mathbf{u})$ по элементарным операторам $D_k(\mathbf{u})=\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\}$

$$\Lambda(\mathbf{u})=\sum_{1}^{n}{}_{hk}D_k\{A_{hk}D_h(\mathbf{u}),\qquad(2)$$

где A_{hk} — комплексные матрицы, надлежащим образом связанные с C_{hk}. Пусть оператор $\Lambda(\mathbf{u})$ определен на множестве (открытом) $\Omega\subset R_n$ с границей $\partial\Omega$. С разложением (1) (аналогично и с (2)) связывается билинейная форма $a(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega\sum_{1}^{n}{}_{hk}C_{hk}S_k(\mathbf{u})\cdot\overline{S_h(\mathbf{v})}\,dx$, из которой формально может быть выведена формула Грина

$$\int_\Omega\Lambda(\mathbf{u})\cdot\bar{\mathbf{v}}dx=a(\mathbf{u},\mathbf{v})+\int_{\partial\Omega}L(\mathbf{u})\cdot\bar{\mathbf{v}}dx,\qquad(3)$$

где $L(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{jkml}(C_{mk,\,j}+c_{jk,\,ml})\,s_{jk}(\mathbf{u})\,\nu_m i_l$

(i_l орт оси x_l, ν — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$).

Формула (3) дает возможность поставить краевые задачи (в смысле РЖМат, 1957, 1414) задачу Дирихле, задачу Неймана, смешанную задачу (на одной части границы задается $L(\mathbf{u})$, на другой $\mathbf{u}$), задачу сшивания (problema di trasmissione) (область Ω распадается на две разнородные части $\Omega_1+\Omega_2$, решение, кроме граничных условий на $\partial\Omega$, должно удовлетворять условиям $\mathbf{u}'=\mathbf{u}^2$, $L'(\mathbf{u}')+L^2(\mathbf{u}^2)=0$ в точках соприкосновения Ω_1 и Ω_2). До тех пор пока указанные задачи рассматриваются в классе достаточно регулярных векторов, разложения (1) и (2) вполне равноправны. Если, однако, как это стало обычно в теоремах существования, рассматривать их в обобщенной постановке, то выбор того или иного разложения сказывается в различии функциональных классов, где ищется решение, а также в ограничениях на данные и на область Ω. Эти факты освещаются в первой главе. Вторая глава посвящена теоремам существования для ограниченной области, третья — для неограниченной области. П. И. Лизоркин

10354. Сведение задачи Коши для системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями к системе интегральных уравнений. Чекмарев Т. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 197—207

Рассматривается система дифференциальных уравнений $F(x,y,z,w,p,q,u,v)=0$, $\Phi(x,y,z,w,p,q,u,v)=0$, где $p=z_x$, $q=z_y$, $u=w_x$, $v=w_y$, x и y — независимые переменные, z и w — неизвестные функции аргументов x и y. Предполагается, что система имеет решение z, w, p, q, u, v, приводящееся на линии ρ:

$$x=x^{(0)}(s),\ y=y^{(0)}(s)\ (s_0\leqslant s\leqslant s_1)\qquad(1)$$

к системе функций

$$z^{(0)}(s),\ w^{(0)}(s),\ p^{(0)}(s),\ q^{(0)}(s),\ u^{(0)}(s),\ v^{(0)}(s).\qquad(2)$$

Вводятся обозначения:

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(x,p)}+p\frac{D(F,\Phi)}{D(z,p)}+u\frac{D(F,\Phi)}{D(w,p)}=\alpha,$$

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(y,q)}+q\frac{D(F,\Phi)}{D(z,q)}+v\frac{D(F,\Phi)}{D(w,q)}=\beta,$$

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(x,u)}+p\frac{D(F,\Phi)}{D(z,u)}+u\frac{D(F,\Phi)}{D(w,u)}=\gamma,$$

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(y,v)}+q\frac{D(F,\Phi)}{D(z,v)}+v\frac{D(F,\Phi)}{D(w,v)}=\delta,$$

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(p,q)}=a,\quad\frac{D(F,\Phi)}{D(p,u)}=b,\quad\frac{D(F,\Phi)}{D(u,v)}=c,$$

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(q,v)}=d,\quad\frac{D(F,\Phi)}{D(p,v)}=\zeta,\quad\frac{D(F,\Phi)}{D(q,u)}=\eta,$$

ν и ν' — корни уравнения $b\nu^2-(\eta+\zeta)\nu+d=0$, $m=\alpha+\beta$, $n=\gamma+\delta$. Предполагается, что на многообразии $x^{(0)}(s)$, $y^{(0)}(s)$, $w^{(0)}(s)$, $p^{(0)}(s)$, $q^{(0)}(s)$, $u^{(0)}(s)$, $v^{(0)}(s)$ $(s_0\leqslant s\leqslant s_1)$ пространства x,y,z,w,p,q,u,v $(\eta+\zeta)^2-4bd>0$, $\nu x_s^{(0)}-y_s^{(0)}\neq 0$, $\nu' x_s^{(0)}-y_s^{(0)}\neq 0$, $abc(cm^2+(\eta-\zeta)mn+an^2)\neq 0$. Если F и Φ в общей области определения обладают непрерывными частными производными 3-го порядка, а функции $x^{(0)}(s)$, $y^{(0)}(s)$, $p(x,y)$, $q(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывными производными 2-го порядка, то справедлива теорема:

1) Существует система функций $x(\sigma,\tau)$, $y(\sigma,\tau)$, заданная на некотором шестиугольнике μ: $|\sigma-\tau|\leqslant r$ $(s_0\leqslant\sigma\leqslant s_1,\ s_0\leqslant\tau\leqslant s_1,\ 0<r<s_1-s_0)$, удовлетворяющая системе $y_\sigma-\nu x_\sigma=0$, $y_\tau-\nu' x_\tau=0$ и начальным данным $x(s,s)=x^{(0)}(s)$, $y(s,s)=y^{(0)}(s)(s_0\leqslant s\leqslant s_1)$, притом такая, что система $x=x(\sigma,\tau)$, $y=y(\sigma,\tau)$ однозначно разрешима относительно σ и τ: $\sigma=\sigma(x,y)$, $\tau=\tau(x,y)$;

2) Система функций $x(\sigma,\tau)$, $y(\sigma,\tau)$, $z(\sigma,\tau)=z[x(\sigma,\tau),\ y(\sigma,\tau)],\ldots,v(\sigma,\tau)=v[x(\sigma,\tau),\ y(\sigma,\tau)]$, дополненная функциями $\Lambda=x_\sigma$, $\Lambda'=x_\tau$, $\xi=mq_\sigma+nv_\sigma$, $\xi'=mq_\tau+nv_\tau$ на шестиугольнике μ удовлетворяет некоторой нелинейной системе интегральных уравнений. Последняя строится по функциям F, Φ, $x^{(0)}(s)$, $y^{(0)}(s),\ldots$ $\ldots,v^{(0)}(s)$. Ю. Т. Антохин

10355. Периодические решения сингулярно возмущенных систем. Флатто (в подл. Флэтто Л.). **Левинсон Н.** (Flatto L., Levinson N.), Математика. Период. сб. перев. статей, 1958, 2, № 2, 61—68 См. РЖМат, 1956, 8051

10356. О сведении к регулярным интегральным уравнениям граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений в случае невыпуклых областей. Гавеля (Про зведення до регулярних інтегральних рівнянь граничних задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь у випадку неопуклих областей. Гавеля С. П.), Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, **44**, 158—174 (укр.)

10357. Граничные задачи для эллиптических систем с параметром. Драпкин (Граничні задачі для еліптичних систем з параметром. Драпкін А. Б.), Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, **44**, 123—133 (укр.)

10358. О поведении решений линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений в окрестности особых точек. Гавеля (Про поведінку розв'язків лінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь поблизу деяких множин їх особливостей. Гаве-

ля С. П.), Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, **44**, 152—157 (укр.)

10359. Замечание к одной работе Шаудера. Шарский (Remarque sur un travail de J. Schauder. Szarski J.), Ann. polon. math., 1959, **6**, № 2, 157—160 (франц.)

Уточнена область, в которой имеют место интегральные неравенства для производных от решения линейной гиперболической системы уравнений с частными производными в n-мерном пространстве. В. Э. Аболиня

10360. «Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости». Вольперт А. И., Успехи матем. наук, 1960, **15**, № 3, 189—191

10361. Об уравнениях Шрёдингера, интегрируемых методом разделения переменных. Агостинелли (Sulle equazioni di Schrödinger integrabili per separazione di variabili. Agostinelli Cataldo), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 11—23 (итал.)

Уравнение Шрёдингера

$$\Delta_2 U + K^2 (E - V) U = 0 \tag{1}$$

при замене

$$U = e^W \tag{2}$$

в римановом пространстве с метрикой

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j \tag{3}$$

принимает вид:

$$\sum_{ij=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_{ij=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \sum_{h=1}^{n} \Gamma^h \frac{\partial W}{\partial x_h} + k^2 (E - V) = 0, \tag{4}$$

где a^{ij} — обратный элемент a_{ij} в дискриминанте квадратично формы (3),

$$\Gamma^h = \sum_{ij=1}^{n} a^{ij} \sum_{\kappa=1}^{n} a^{hk} \gamma_{ij,k} \tag{5}$$

где $\gamma_{ij,k}$ — символ Христоффеля. Вопрос интегрирования уравнения (1) методом разделения переменных сводится к отысканию решения уравнения (4) в виде

$$W = \sum_{i=1}^{n} W(x_i) \tag{6}$$

Это возможно только в некоторых частных случаях системы криволинейных координат (x_i). Проблема состоит в том, чтобы отыскать эти системы координат или коэффициенты a_{ij} в квадратичной форме (3) для этого случая. Автор доказывает следующее: Для того чтобы уравнение Шрёдингера в системе криволинейных координат $x_1, x_2 \ldots x_n$ было интегрируемо относительно функции $U = e^{\sum_{i=1}^{n} W_i(x_i)}$, в которой ни одна $W_i(x_i)$ не приводится к линейной функции, необходимо, чтобы система криволинейных координат была ортогональной. Если же $U = e^{\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} W_i(x_i)}$, то из доказательства автора следует, что $a^{ij} \neq 0$, $(i, j = 1, 2, \ldots m, i \neq j)$, $a^{rs} = 0$, $(r, s = m+1, \ldots n, r \neq s)$. Так как $a^{ij} = (\operatorname{grad} x_i, \operatorname{grad} x_j)$, то очевидно не вся система криволинейных координат является ортогональной. Далее автор подробно изучает уравнение (4), когда система криволинейных координат ортогональна и определяет все коэффициенты квадратичной формы и потенциальную функцию, допускающие разделение переменных в уравнении Шрёдингера. Для определения функции $W_i(x_i)$ автор изучает уравнение Риккати относительно функций $X_i(x_i) = \frac{dW_i}{dx_i}$ и решает его в квадратуре. Е. И. Ким

10362 K. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям. Йон Ф., М. Изд-во ин. лит., 1958, 158 стр., илл., 7 р. 85 к.

Основное содержание книги составляют различные приложения формулы, дающей разложение δ-функции на плоские волны и некоторых ее аналогов, связанных с интегралами от произвольных функций по сферам. Книга разбита на 8 глав: Гл. 1. Разложение произвольных функций по плоским волнам. В этой главе выводится формула Радона, эквивалентная формуле разложения δ-функции по плоским волнам. Гл. 2. Задача Коши для однородных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами. Основное содержание этой главы „конструирование" фундаментального решения гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами из плоских волн. В частности, здесь получены известные формулы Герглотца — Петровского. Гл. 3. Фундаментальное решение линейного эллиптического дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами. Строится обобщенное решение уравнения $Lu = f$, где L — эллиптический дифференциальный оператор с переменными аналитическими коэффициентами, f — функция, равная нулю по одну сторону от заданной гиперплоскости и 1 по другую сторону. Решение полагается равным нулю там, где свободный член равен нулю. Построение такого решения сводится к задаче Коши, решение которого можно построить с помощью степенных рядов, используя теорему Коши — Ковалевской. Из таких решений нетрудно „сконструировать" фундаментальное решение. Для уравнений с постоянными коэффициентами решение этой задачи Коши можно написать в явном виде. Гл. 4. Тождество для сферических средних. Гл. 5. Теоремы Асгейрсона и Ховард. Эти главы посвящены выводу ряда вспомогательных соотношений и тождеств, связанных со сферическими средними. В частности, выводится известное тождество Асгейрсона для решений ультрагиперболического уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{y_i y_i}$$

и уравнение Дарбу для средних значений. Гл. 6. Определение функции ее интегралами по сферам фиксированного радиуса. В этой главе доказывается теорема согласно которой $f(x)$ единственным образом определяется своими значениями внутри сферы

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_1^2} \leqslant 1 + \varepsilon$$

($\varepsilon > 0$ произвольно), если известен интеграл от $f(x)$ по произвольной сфере радиуса 1. Получена также и другая теорема единственности, использующая поведение $f(x)$ при $x \to \infty$. Гл. 7. Свойства дифференцируемости эллиптических систем. С помощью полученных в предыдущих главах результатов доказываются классические теоремы об аналитичности достаточно гладких решений линейных и нелинейных аналитических эллиптических уравнений. Доказывается, что достаточная дифференци

руемость эллиптического уравнения приводит к тому, что у гладкого решения этого уравнения существуют непрерывные производные более высокого порядка, чем было заранее задано. Кроме того, в этой главе рассматривается вопрос о том, когда обобщенное решение является классическим. В гл. 8 установлены некоторые свойства регулярности и для неэллиптических уравнений.

В. М. Бабич

10363 К. Уравнения математической физики. Учебн. пособие для механ.-матем. и физ. фак. ун-тов УРСР. Положий Г. Н. (Рівняння математичної фізики. Уч. посібник для механ.-матем. та фіз. фак. ун.-тів УРСР. Положій Г. М., Київ, 1959, 478 стор., іл., 10 р. 90 к.)

Книга представляет собой перевод с русского стеклографированного издания лекций по уравнениям математической физики, читаемых автором в Киевском университете (Положий Г. Н., Основные уравнения математической физики, изд-во КГУ), рекомендована МВО УССР в качестве учебного пособия для механико-математических и физических факультетов университетов Украины. Книга состоит из предисловия, шести глав и приложения — краткого исторического очерка.

В гл. I рассматриваются различные физические процессы, приводящие к основным уравнениям математической физики и, в частности, максвелловы уравнения электродинамики. В гл. II освещаются общие вопросы теории уравнений в частных производных. Приводится подробное доказательство теоремы Ковалевской, в общем виде строится классификация квазилинейных систем уравнений. Методом характеристических кривых строится решение задачи Коши для уравнения в частных производных I порядка, притом вопрос существования и единственности решения увязывается с общей теорией характеристик. В гл. III дается изложение основных методов решения краевых задач для эллиптических уравнений, подробно исследуются общие свойства гармонических функций. В соответствии с работами А. М. Ляпунова и Н. М. Гюнтера строится теория потенциала, излагается метод интегральных уравнений. Теория потенциала распространяется на уравнение $\Delta u - ku = 0$, $k > 0$. В гл. IV изучаются параболические уравнения. Для уравнения теплопроводности исследуются общие свойства решений и методом δ-функции решается задача Коши. Даются интегральные представления решений краевых задач при помощи функции влияния. Излагаются основы операционного исчисления применительно к решению краевых задач. Строятся тепловые потенциалы и метод интегральных уравнений решений краевых задач с неподвижными и подвижными границами. Гл. V посвящена гиперболическим уравнениям. Приводится решение задачи Коши и основных краевых задач для уравнения струны. Методом осредненных значений функции решается задача Коши для n-мерного волнового уравнения и для трехмерного телеграфного уравнения. Исследуются свойства волновых потенциалов. Приводится формула Кирхгофа, излагается метод Римана. Вводятся условия излучения, рассматриваются краевые задачи об установившихся колебаниях и задачи, связанные с уравнением характеристик. Дается понятие о методе интеграла Фурье и о счете по характеристикам. В гл. VI дается метод разделения переменных в применении ко всем основным уравнениям математической физики. При помощи интегральных уравнений строится общая теория задачи Штурма — Лиувилля с подробным выводом асимптотики собственных значений и собственных функций. Доказано несколько специальных теорем о порядке коэффициентов Фурье при разложении произвольных функций, подчиненных так называемым сопутствующим краевым условиям в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. Приводятся основы метода Ритца применительно к нахождению собственных чисел и собственных функций. Приведены простейшие свойства цилиндрических и сферических функций, и даны примеры применения их к решению задач математической физики. В целом книга содержит богатый фактический материал по уравнениям математической физики, несмотря на ее незначительный объем, что, по-видимому, удалось автору за счет: а) избранной им последовательности изложения материала, б) широкого использования одной и той же идеи построения всякого рода δ-образных функций применительно ко всем типам уравнений, в) рассмотрения метода разделения переменных для всех типов уравнений одновременно.

О. С. Парасюк

10364 К. Дифференциальные уравнения, методы решения и решения. Т. 2. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка относительно искомых функций. Камке (Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd 2. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung f. e. gesuchte Funktion. 4. verb. Aufl. Kamke E. Leipzig, Akad. Verl. Ges., 1959, XV, 243 S., ill., 16.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A** № 49, 3623 (нем.)

10365 К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Миранда К., Перев. с итал. М., Изд-во ин. лит., 1957, 256 стр., 13 р. 70 к.

10366 К. Дифференциальные уравнения математической физики. Тихонов, Самарский (Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Tychonoff A. N., Samarski A. A. Übers. aus dem Russ. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1959, 660 S., ill., 42. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 34, 2602 (нем.)

Перевод с русского, см. РЖМат, 1955, 3218К.

10367 К. Операторная математика. Черчилл (Operational mathematics. Churchill Ruel V. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958, X, 337 pp., ill.) (англ.)

Книга состоит из десяти глав и трех приложений: гл. 1. Преобразование Лапласа; гл. 2. Свойство преобразования Лапласа; гл. 3. Элементарные приложения; гл. 4. Задачи из теории дифференциальных уравнений в частных производных; гл. 5. Функции комплексного переменного; гл. 6. Теория обращения интеграла Лапласа; гл. 7. Задачи из теории теплопроводности; гл. 8. Задачи о механических колебаниях; гл. 9. Дифференциальные уравнения Штурма — Лиувилля; гл. 10. Преобразование Фурье.

Приложение 1 — Библиография, учебники, монография, таблицы — 22 названия. Приложение 2 — Таблицы преобразований Лапласа (от оригиналов к изображениям — 19 формул.). Приложение 3 — Таблица преобразований Лапласа (от изображений к оригиналам) — 125 формул. Книга представляет собой обычное изложение теории преобразования Лапласа и его приложение к некоторым задачам физики и техники. Библиография неполная — отсутствуют ссылки на французскую и русскую литературу по операционному исчислению.

П. И. Кузнецов

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы *В. В. Немыцкий, А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова*

10368. Интерполяционно-аналитическая теория движения малой планеты (5) Астреи, Пал (Teoria analitică de interpolare a mişcării micii planete (5) Astraea, Pál Arpád), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1959, **10**, № 1, 63—132 (рум.; рез. русск., франц.)

10369. **Конфигурация Лагранжа в небесной механике. Литлвуд** (The Lagrange configuration in celestial mechanics. Littlewood J. E.), Proc. London Math. Soc., 1959, **9**, № 36, 525—543 (англ.)

Рассматривается решение уравнений ограниченной задачи трех тел $\ddot{x} - 2\dot{y} - \tilde{\omega}_1 x = \Omega'_x$, $\ddot{y} + 2\dot{x} - \tilde{\omega}_2 y = \Omega'_y$, где $\Omega = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ (Ω_n — форма n-й степени x, y) в окрестности положения равновесия (треугольной точки либрации), характеристические показатели которого $\pm i\lambda$, $\pm i\mu$ при достаточно малом значении параметра m (возмущающей массы) являются чисто мнимыми.

Доказывается следующая теорема. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon \max(a, b)$, где ε мало: $N_\varepsilon = \left[A\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} |\log \varepsilon_1|^{-\frac{3}{4}}\right]$, $T = T(\varepsilon) = A[\max(a, b)]^{-1} \exp\left(A\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} |\log \varepsilon_1|^{-\frac{3}{4}}\right)$. Существуют такие функции λ_m, μ_m, где $\lambda_0 = \lambda$, $\mu_0 = \mu$, $\lambda_m = \mu_m = 0$ для m нечетного, а λ_{2m}, μ_{2m} — формы m-й степени от a^2, b^2, и такие формы m-й степени φ_m, ψ_m от 4 переменных $ae^{(\alpha-\Lambda t)i}$, $ae^{-(\alpha-\Lambda t)i}$, $be^{(\beta-Mt)i}$, $be^{-(\beta-Mt)i}$, где $\Lambda = \Lambda_{N_\varepsilon} = \sum_{m=0}^{N_\varepsilon - 1} \lambda_m \varepsilon^m$, $M = M_{N_\varepsilon} = \sum_{m=0}^{N_\varepsilon - 1} \mu_m \varepsilon^m$, a, b, α, β — произвольные постоянные, что для почти всех иррациональных значений отношения λ/μ решение уравнений движения представляется в виде $x = \sum_{m=1}^{n-1} \varepsilon^m \varphi_m + O(E)$, $y = \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^m \psi_m + O(E)$, где $E = (AK_n)^{n+1} \varepsilon_1^n + e^{-\frac{1}{2}N_\varepsilon}$, $K_n = (n+1)^2 \log^{\frac{3}{2}}(n+1)$, для всех $n \leqslant N_\varepsilon$ и для $0 \leqslant t \leqslant T$.

Г. А. Мерман

10370. **О применении методов Сундмана и Шази в обобщенной задаче трех тел. Склянский А. Л.**, Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 4, 380—382 (рез. англ.)

Рассматривается обобщенная задача трех тел, взаимодействующих с силами $m_i m_j f(r_{ij})$, где m_i — массы тел, r_{ij} — их взаимные расстояния, $f(r)$ голоморфна всюду, кроме точки $r = 0$, причем $\lim_{r \to +0} r^{2k+1} f(r) = -2k < 0$.

Автор решает задачу о регуляризации дифференциальных уравнений при парном соударении, когда $r_{ij} = 0$ для некоторого конечного t. Прежде всего показывается, что новая независимая переменная Сундмана $\tau = \int_{t_0}^{t} dt/r_{ij}$ регуляризирует уравнения только для случая ньютоновской силы ($k = 1/2$). Автор вводит независимую переменную $v = \int_{t_0}^{t} dt/r_{ij}^k$, обобщенную переменную, введенную Шази для той же цели в случае силы, обратно пропорциональной кубу взаимных расстояний ($k = 1$). При этом, используя качественные результаты о поведении координат и некоторых их функций в окрестности парного соударения, полученные Ю. Д. Соколовым и им самим, автор значительно упрощает систему уравнений, полученную Шази, получив систему 13-го порядка вместо системы 18-го порядка, фигурирующей у Шази. В заключение доказывается существование траекторий парных соударений с помощью приведения дифференциальных уравнений в такой форме, при которой эти траектории оказываются асимптотическими решениями, стремящимися к положению равновесия, представляющему соударение.

Г. А. Мерман

10371. **О лагранжевых решениях задачи n тел. Фибер** (Zu den Lagrange'schen Lösungen des n-Körperproblems. Fieber H.), Monatsh. Math., 1960, **64**, № 1, 1—14 (нем.)

Решения пространственной задачи трех тел, полученные Лагранжем, обобщаются на случай n тел в r-мерном пространстве. Дифференциальные уравнения задачи записываются в форме:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где m_k ($k = 1, \ldots, n$) — массы n тел, $\mathbf{r}_k$ $\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_r^{(k)}\right)$ ($k = 1, \ldots, n$) — векторы в r-мерном пространстве. Частные решения ищутся в виде $\mathbf{r}_k(t) = q(t) A(t) \mathbf{r}_k(t_0)$, где $\mathbf{r}_k(t_0)$ — начальный вектор, $q(t)$ — скалярная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} d\tau/q(\tau) = \infty$, $A(t)$ — ортогональная матрица ($AA^* = E$, где A^* — транспонированная матрица A, E — единичная матрица). Задача при этом распадается на две: аналитическую $q^2 A^{-1}(\dot{q}\dot{A}) = B$, где B — постоянная матрица, и алгебраическую $B\mathbf{r}_i(t_0) = \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathbf{r}_k(t_0) - \mathbf{r}_i(t_0)|^3} [\mathbf{r}_k(t_0) - \mathbf{r}_i(t_0)]$.

При дополнительном предположении об ограниченности $q(t)$ для всех t автор показывает с помощью интеграла живых сил, что B — симметричная матрица. Для трехмерного пространства этот результат следует из наличия интеграла площадей для любой $q(t)$. Предполагая, что B — симметричная матрица, автор получает следующую теорему: При нечетном r существуют лишь прямолинейные лагранжевы решения, когда n тел двигаются вдоль неподвижных прямых, проходящих через общий центр тяжести; при четном r, кроме прямолинейных, существуют другие лагранжевы решения, либо расположенные на $2m$-мерных сферах, либо представляющие плоские конические сечения. При этом во всех случаях определяются функция $q(t)$ и матрица $A(t)$. Алгебраическая задача приводится к системе nr линейных уравнений с $n(n-1)/2$ неизвестными $\rho_{ik} = 1/|\mathbf{r}_k(t_0) - \mathbf{r}_i(t_0)|^3$ ($k \neq i$), $r(n-r-1)$ неизвестными λ_k^ν ($i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, r$; $\nu = r+1, \ldots, n-1$), и произвольной величиной β, где λ_k^ν — коэффициенты разложения векторов $\mathbf{r}_\nu$ по r линейно независимым векторам $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ r-мерного пространства. В случае, когда диофантово уравнение $2x^2 - y^2 = 1$ (где $x = 2r+1$, $y = 2n-1$) решается в целых числах, число уравнений этой системы равно числу неизвестных, и все неизвестные выражаются через β, за исключением частных значений масс, обращающих в ноль определитель системы. Простейшим из таких случаев является плоская задача четырех тел.

Г. А. Мерман

10372. **К вопросу о лагранжевых решениях задачи n тел. Фибер** (Zur Frage der Lagrangeschen Lösungen beim n-Körperproblem. Fieber H.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 398—399 (нем.)

Рассматривается задача о движении n материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, в пространстве r ($2 < r < n$) измерений. Показывается, что при r нечетном задача допускает только прямолинейные лагранжевы решения. При r четном существуют лагранжевы решения, в которых орбиты точек суть или плоские конические сечения, или кривые, лежащие на конусе $2m$-измерений.

Г. Н. Дубошин

10373. **Линейные и нелинейные уравнения. Локальные и глобальные свойства. Фиккен** (Linear and nonlinear equations; local and global properties. Ficken F. A.), SIAM Rev., 1960, **2**, № 1, 11—14 (англ.)

В обзорной форме обсуждаются возможности применения математики к физике и технике. Объясняются математические термины, упомянутые в заголовке.

В. В. Немыцкий

10374. Ортогональные положения материальной системы. Пайу (Positions orthogonales d'un système matériel. Paillioux Henri), Actes. IX Congr. internat. mécan. appl. T. 5. Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 274—285 (франц.)

Рассматриваются классические малые линейные колебания системы материальных точек около положения устойчивого равновесия. Ищутся такие частные движения вида: $q_k = A_k \sin \omega t$, $q_k = A_k' \sin(\omega' t)$, при которых величины A_k, A_k' удовлетворяли бы особым соотношениям: $\sum_k A_k' \frac{\partial V(A_k)}{\partial A_k} = \sum_k A_k \frac{\partial V(A_k')}{\partial A_k'}$, где $V(A_k)$ обозначает потенциальную энергию, в которой обобщенные координаты заменены через A_k. Данные соотношения автор называет соотношениями ортогональности. Изучаются свойства подобных движений. Данное понятие далее обобщается и на случай колебаний сплошных систем. В. В. Добронравов

10375. Об одной неголономной системе. Силаш, Грошану, Брындеу (Asupra unui sistem neolonom. Silaş Gh., Groşanu I., Brindeu N. L.), Bul. ştiinţ. şi tehn. Inst. politehn. Timişoara, 1958, **3**, 177—184 (рум.; рез. франц., русск.)

Рассматривается механическая система: твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, по его поверхности движется материальная точка. Предполагается, что сумма моментов внешних сил системы относительно оси вращения равна нулю. Отсюда получается, что кинетический момент системы относительно оси вращения остается постоянным, что выражается определенным дифференциальным соотношением относительно координат системы. Авторы принимают это соотношение, являющееся по существу первым интегралом данной системы уравнений движения при заданных внешних силах, за некоторую новую неголономную связь, наложенную на систему. Далее они составляют новые уравнения движения системы, как неголономной системы, употребляя метод неопределенных множителей, и интегрируют их. (Подобные действия не обоснованы, так как нельзя принимать за связь первый интеграл уравнений движения, имеющий место только при определенных внешних силах. — *Реф.*). В. В. Добронравов

10376. Общая теория динамических систем классической механики. Колмогоров (Théorie générale des systèmes dynamiques de la mécanique classique. Kolmogorov André), Sémin. méc. analyt. et méc. céleste. M. Janet. Fac. sci. Paris. 1957—1958, 1 année Paris, 1958, 6-1—6-20 (франц.)

Французский перевод доклада, сделанного А. Н. Колмогоровым на Международном математическом конгрессе в Амстердаме в 1954 г. и опубликованного на русском языке в трудах Амстердамского конгресса, стр. 315—333. С. В. Фомин

10377. О новой формулировке условий применимости метода Гамильтона — Якоби для неголономных консервативных систем. Гумеров Ш. А., УзССР, Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем., н., 1959, № 1, 31—44 (рез. узб.)

Для неголономной механической системы $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ задаются: уравнения связей $\sum_{\nu=1}^{n} A_{\rho\nu}\, dq_\nu = 0$ $(\rho = 1, 2, \ldots, r < n-1)$ и кинетический потенциал вида $L = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}\dot{q}_\nu \dot{q}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \dot{q}_\nu + a$. Все коэффициенты и функция a не зависят явно от времени. После ряда сложных преобразований с использованием метода Картана и рассмотрения ряда промежуточных уравнений в частных производных доказывается, что при некоторых условиях можно составить некоторый аналог уравнения Гамильтона — Якоби в виде уравнения $\Omega\left(\xi_1, \ldots, \xi_k; \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}\right) = h$.

После нахождения функции $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k, h, h_1, h_2, \ldots, \ldots, h_{k-1})$ составляется серия некоторых первых интегралов уравнений движения рассматриваемой механической системы в виде $\frac{\partial \Phi}{\partial h} = t - t_0$; $\frac{\partial \Phi}{\partial h_\sigma} = \text{const}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, \ldots, k-1)$. Число k определяется особыми условиями, а переменные $\xi_1, \ldots, \xi_k$ связаны с основными обобщенными координатами системы при помощи особых соотношений, вытекающих из рассмотрения упомянутых промежуточных уравнений. Рассматривается формальный пример неголономной механической системы при $n = 5$ с числом уравнений связей $r = 2$. Данным методом находится один первый интеграл, содержащий только одну координату q_5, которая и определяется в функции времени. В. В. Добронравов

10378. Об одном частном решении уравнений Эйлера—Пуассона. Харламова Е. И., Прикл. матем. и механ., 1959, № 4, 681—690

Для уравнений Эйлера — Пуассона, описывающих движение твердого тела вокруг неподвижной точки, разыскиваются квадратичные интегралы определенного типа. Применяя некоторые, довольно остроумные, преобразования, автор находит два таких интеграла, каждый из которых является четвертым интегралом, необходимым для доведения решения уравнений Эйлера — Пуассона до квадратур. Один из найденных интегралов приводит к интересному случаю Гриоли — Гуляева, являющемуся последним из известных случаев решения данной классической задачи (Гуляев придал аналитическую форму решению, найденному впервые Гриоли геометрическими методами). Второй же интеграл выражает только формальное решение дифференциальных уравнений. В. В. Добронравов

10379. Частный случай движения тела переменной массы. Завьялов Ю. С., Копылов Г. И., Тр. Томского ун-та, 1959, **144**, 94—96

Рассматриваются уравнения движения тела переменной массы около неподвижной точки в случае, когда абсолютные скорости отделяющихся от тела частиц равны нулю. В этом случае эти уравнения имеют вид (все обозначения обычные) $dAp/dt + (C - B)qr = M_x, \ldots$. Авторы рассматривают уравнения вращательного движения тела при условиях: 1) $M_x = M_y = M_z = 0$ и 2) $A = B$, и показывают, что уравнения движения интегрируются при этих условиях в квадратурах и углы Эйлера выражаются формулами: $\varphi = C_0 R \int_{t_0}^{t} \frac{A - C}{AC}\, dt$, $\theta = \arccos \frac{C_0 R}{K}$, $\psi = \psi_0 + K \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{A}$, где C_0, R, K, ψ_0 — постоянные.

Г. Н. Дубошин

10380. Уравнения движения нелинейных неголономных систем с переменными массами. Новоселов В. С., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 7, 112—117

На основании предыдущих своих работ (РЖМат, 1958, 7766 и Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, 1) автор выводит из принципа Даламбера—Лагранжа для неголономной системы с переменными массами при наличии нелинейных связей типа Четаева уравнения движения типа Чаплыгина и Воронца—Гамеля. Обсуждается вопрос о вычислении сил реакций связей. Формулируется общее правило, связывающее вопрос о выходе уравнений движения систем с переменными массами с таким же вопро-

сом для систем с постоянными массами. Из принципа Гаусса выведены уравнения движения типа Аппеля. В последнем случае автор использовал введенное ранее понятие кинематических характеристик.

И. С. Аржаных

10381. Оценка решений уравнений движения гироскопических систем. Кузнецов Л. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 7, 105—111 (рез. англ.)

Гироскопическая система в смысле Томсона и Тэта (см. также монографию А. Р. Меркина «Гироскопические системы», Гостехиздат, 1956) интерпретируется как система, имеющая в своем составе m гироскопов и отнесенная к некоторому подвижному основанию. Составляются уравнения движения и выделяются уравнения движения для нециклических координат. Наряду с общими уравнениями движения, рассматриваются некоторые упрощенные уравнения, получающиеся после отбрасывания членов со вторыми производными. Далее находятся оценки для уклонений решений общей системы уравнений от решений упрощенной системы. В начале статьи следовало бы пояснить, почему в данном случае в выражение кинетической энергии системы входит угловая скорость основной подвижной системы (основания) координат, а при вычислении обобщенных сил учитываются силы инерции только от поступательного движения другой системы координат.

В. В. Добронравов

10382. Обобщенные виртуальные перемещения. Кузнецов Б. Г., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 4, 672—680

Рассматриваются системы материальных точек, подчиненные неголономным связям самого общего вида — любого порядка (относительно производных от обобщенных координат), и нелинейные произвольного вида. Для вывода уравнений движения подобных систем вводится особое определение виртуальных перемещений, которые и сами должны удовлетворить некоторым дифференциальным уравнениям; структура последних определяется уравнениями неголономных связей. Далее выводятся уравнения движения рассматриваемых неголономных систем (с неопределенными множителями). Приводится некоторый дополнительный анализ основных положений статьи; в частности, показывается, что к выведенным уравнениям движения применим принцип Гамильтона—Остроградского. Вся теория иллюстрируется простейшим примером плоского движения материальной точки с постоянным модулем скорости (нелинейная неголономная связь). В. В. Добронравов

10383. Вопросы устойчивости при свободных колебаниях механических систем. Метлер (Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. Mettler E.), Ingr-Arch., 1959, **28**, 213—228 (нем.)

Рассматривается устойчивость в первом приближении свободных колебаний специальной механической системы. Предполагается, что уравнения движения механической системы имеют вид:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + f_k\left(q_l, \dot{q}_l, \ddot{q}_l\right) = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n) \qquad (1)$$

и, кроме того, осуществляется условие $g_1\omega_1 + g_2\omega_2 + \ldots + g_n\omega_n = 0$, где g_l — целые. После этого рассматриваются частные случаи системы (1): система двух уравнений вида $\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \gamma q_1 q_2 = 0$, $\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \frac{\gamma}{2} q_1^2 = 0$; система, описываемая тремя уравнениями $M_1\ddot{x} + \alpha_1 x + a_2 x y_1 + a_3 x y_2 = 0$, $M_1\ddot{y}_1 + c_1 y_1 - c_2(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} a_2 x^2 = 0$, $M_2\ddot{y}_2 + c_2(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} a_3 x^2 = 0$, и система с n степенями свободы, описываемая уравнениями $\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + f_k(q_l) = 0$ $(k = 1,2,\ldots,n)$.

В конце статьи приводятся результаты эксперимента, подтверждающие выводы автора для первого случая.

Ю. А. Митропольский

10384. Движение механических систем со связями, зависящими от процесса изменения массы. Новоселов В. С., Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, № 1, 132—141 (рез. англ.)

В § 1 рассматривается механическая система с голономными связями, зависящими от координат, времени и масс точек системы, причем последние также предполагаются функциями времени. Считая связи идеальными, автор получает обобщенные уравнения Лагранжа в виде $(d/dt)(\partial T/\partial \dot{q}_l) - (\partial T/\partial q_l) = Q_l' + G_l'$, где дополнительные обобщенные силы равны $G_l = \sum_j \left[(R_j' + (dm_j/dt)\bar{v}_j)(\partial \bar{r}_j/\partial q_l) - (v_j^2/2)(\partial m_j/\partial q_l)\right]$. Рассматривается иллюстративный пример.

В § 2 рассматривается движение механической системы, подчиненной как голономным, так и неголономным связям, которые могут зависеть от переменных масс точек системы. Предполагая, что неголономные связи относятся к типу связей Н. Г. Четаева, автор получает вместо уравнений Лагранжа следующие: $(D/Dt)(\partial T_D/\partial \dot{q}_l) - (\partial T_D/\partial q_l) = Q_l' + \Psi_l' + \Lambda_l'$; $\Lambda_l' = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (\partial F_k'/\partial \dot{q}_l)$, где λ_k — неопределенные множители, $F_k'(\dot{q}_l, q_l, t) = 0$ — уравнения неголономных связей и D/Dt, $\partial/\partial q$ — символы частного дифференцирования при закрепленных массах. Для иллюстрации подробно рассматривается пример катания без наклона по горизонтальной плоскости колеса, состоящего из свернутой абсолютно гибкой ленты.

В § 3 рассматривается пример изменения массы, приводящий к нелинейной неголономной связи.

Г. Н. Дубошин

10385. К вопросу колебания системы с одной степенью свободы с учетом упруго-пластических деформаций. Дарбинян С. С., Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тетекатир. Техникакан гитутюннери сериа. Изв. АН АрмССР, Сер. техн. н., 1959, **12**, № 1, 3—18 (рез. арм.)

Рассматриваются колебания системы с одной степенью свободы при действии различного рода внешних усилий. Материал обладает линейным упрочнением, эффект Баушингера не учитывается. Интегрирование уравнений производится по участкам в зависимости от наличия нагружения или разгрузки. Приведены некоторые количественные оценки. В. В. Москвитин

10386. Нестационарные колебания гибкого вала на упругих опорах при учете гироскопического эффекта. Гробов (Нестаціонарні коливання гнучкого вала на пружних опорах з врахуванням гіроскопічного ефекту. Гробов В. О.), Прикл. механіка, 1960, **6**, № 1, 20—30 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются нестационарные поперечные колебания гибкого ротора на упругих опорах, имеющих асимметрию жесткости, с учетом гироскопического эффекта диска. Для решения задачи используется идея одночастотного асимптотического метода Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. Анализ асимптотических приближений, частотных характеристик и резонансных кривых, построенных по результатам численного интегрирования уравнений первого приближения, показывает, что асимметрия жесткости опор при наличии гироскопической связанности колебаний обусловли-

вает возникновение близко расположенных резонансных режимов и добавочных динамических напряжений в валу, имеющих частоту, равную удвоенной скорости вращения вала. Резюме автора

10387. Асимптотическое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переходной точкой и его приложения к расчетам торообразных оболочек и лопастей. Тумаркин С. А., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 6, 1083—1094

Изучаемая задача о торообразной оболочке сводится к уравнению $\varepsilon \frac{d}{d\theta}\left(p\frac{dV}{d\theta}\right)+qV=f$, где $p=\frac{1}{1+\alpha\sin\theta}$, $q=\frac{\sin\theta}{(1+\alpha\sin\theta)^2}$, $f=f(\theta)$; ε — малый параметр. При помощи метода эталонных функций строится асимптотическое решение этого уравнения. Так как $q(\theta)$ имеет простой нуль при $\theta=0$, то в качестве эталонного уравнения выбрано неоднородное уравнение Эри $\varepsilon d^2\eta/du^2+u\eta=g(u)$. Асимптотическое решение сравнивается с решениями, полученными другими методами. Библ. 27 назв. И. М. Соболь

10388. Уравнение Ван-дер-Поля электронного осциллятора. Поведа-Рамос (La ecuación de Van Der Pol del oscilador electrónico. Poveda Ramos Gabriel), Ingeniería y arquit., 1959, **13**, № 147, 22—28 (исп.)

10389. Об асимптотическом поведении решений одной задачи о теплообмене. Назарчук М. М., Польский Н. И., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 4, 759—761

Рассматривается задача о теплообмене между жидким или газообразным теплоносителем и взвешенными в нем твердыми частицами. В теплоизолированный сосуд, наполненный теплоносителем, погружается смесь, состоящая из достаточно мелких частиц, разбитых на n групп, каждая из которых имеет определенные коэффициенты и поверхность теплоотдачи, теплоемкость и суммарный вес.

Предполагается, что начальная температура всех частиц одинакова и ниже температуры теплоносителя. При некоторых дополнительных упрощающих допущениях задача сводится к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} dx_1/d\tau+(a_1+\Delta_1)x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n&=0,\\ dx_2/d\tau+a_1x_1+(a_2+\Delta_2)x_2+\ldots+a_nx_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ dx_n/d\tau+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+(a_n+\Delta_n)x_n&=0, \end{aligned} \tag{1}$$

где x_i — безразмерная разность температур теплоносителя и частиц i-й группы, а коэффициенты a_i и Δ_i положительны и определяются данными задачи; предполагается, что все Δ_i различны и $\Delta_1<\Delta_2<\ldots<\Delta_n$. Решение системы (1) ищется при условии $x_i(0)=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Матрица коэффициентов системы (1) записывается в виде

$$L=\Delta+A, \tag{2}$$

где Δ — диагональная матрица с элементами Δ_i на диагонали, а A — матрица ранга 1: для любого вектора $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ справедливо равенство $A\bar{x}=\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i\right)\bar{e}$, где $\bar{e}=(1,1,\ldots,1)$. Утверждается следующая

Теорема 1. Все собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ матрицы L вещественны и расположены по одному внутри интервалов (Δ_1,Δ_2), (Δ_2,Δ_3), $\ldots$, (Δ_{n-1},Δ_n), (Δ_n,∞).

Далее устанавливается, что первая координата собственного вектора, относящегося к наименьшему собственному значению матрицы L, положительна, а все остальные координаты отрицательны. Это дает возможность установить следующий факт.

Теорема 2. Температура частиц той группы, которая начинает нагреваться медленнее других групп, будет асимптотически приближаться к температуре теплоносителя снизу, в то время как температура всех остальных групп частиц будет приближаться к температуре теплоносителя сверху.

Примечания референта: В формуле (4) реферируемой работы опечатка; вместо Δ_k должно быть λ_k. Теорема 1 следует из известной теоремы Вейля—Куранта (Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., § 95; см. также РЖМат, 1960, 6713). В. Б. Лидский

10390. Комплексные собственные значения в теории рассеяния. Пейерлс (Complex eigenvalues in scattering theory. Peierls R. E.), Proc. Roy. Soc., 1959, **A253**, № 1272, 16—36 (англ.)

Исследуется возможность полного определения матрицы рассеяния по комплексным собственным значениям k_n уравнения Шредингера, отвечающим краевому условию для волновой функции u, $u\sim e^{ikr}$ при $r\to\infty$. Применительно к потенциальному s-рассеянию, описываемому уравнением

$$\frac{d^2u}{dr^2}+(k^2-v(r))u=0,\quad u(0)=0,\quad \frac{du}{dr}(0)=1, \tag{1}$$

матрица рассеяния определяется как $S=-A/B$, A, B — коэффициенты, зависящие от вида потенциала v, в асимптотическом выражении $u\sim Ae^{ikr}+Be^{-ikr}$ для волновой функции u. Показано, что из основных свойств матрицы рассеяния $S(k)S(-k)=1$, $S(-k^*)=S^*(k)$ вытекают следующие результаты: 1) Если потенциал $v(r)$ обладает свойствами: $v=0$ при $r\geqslant R$ и $v(r)$ — аналитическая функция при $r\leqslant R$, то все полюса матрицы рассеяния S совпадают с собственными значениями k_n, определяемыми уравнением $B(k)=0$, причем S в этом случае имеет вид

$$S=\left[1+2ik(R-l)+2k^2(R-l)^2+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_n}{k-k_n}\frac{k^3}{k_n^3}\right]e^{-ikR}, \tag{2}$$

где l (длина рассеяния, отвечающая $k=0$) определяется как $dS/dk=2i(R-l)$, а константы c_n определяются из системы уравнений, являющихся следствием соотношения $S(k)S(-k)=1$,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m}{k_n+k_m}\left(\frac{k_n}{k_m}\right)^3=-1+2ik_n(R-l)-2k_n^2(R-l)^2,\qquad m,n=0,1,2,\ldots\infty. \tag{3}$$

Если $R\to 0$ (δ-образное взаимодействие), то для S получается выражение, отличающееся от (2) тем, что оно регулярно при $k\to\infty$:

$$S=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{k-k_n}. \tag{4}$$

Коэффициенты c_n могут в этом случае быть явно выражены формулой

$$c_n=-2k_n\prod_{m\neq n}\frac{k_n+k_m}{k_n-k_m}. \tag{5}$$

Если потенциал v конечен при больших расстояниях $r\to\infty$, в частности, если $v\sim e^{-ar}$ $(r\to\infty)$, то полюса матрицы рассеяния не сводятся к собственным значениям k_n, так как в этом случае функция $A(k)$ имеет по-

люса. Если $v \sim e^{-\alpha r}/r$ (взаимодействие Юкава), то S имеет также точки разветвления. Обсуждается возможность построения S-матрицы в этих случаях, когда v конечно при $r \to \infty$. Получены также аналогичные результаты для неупругих процессов, при которых не происходит возникновения новых частиц. Ю. С. Саясов

10391. Об условиях, налагаемых на потенциал ядерного взаимодействия свойствами дейтрона. Атанасов (Върху условията, наложени на потенциала от свойствата на деутрона. Атанасов Ат. А.). Научни тр. Висш. ин-т хранит. и вкус. пром-ст. Пловдив, 1959, 5, 339—343 (болг.; рез. русск., нем.)

Показано, что для синглетного состояния дейтрона, которому отвечает потенциал взаимодействия $V = (W + M - B - H)\, J(r)$ (W, M, B, H — константы, отвечающие взаимодействиям соответственно типа Вигнера, Майорана, Бартлета и Гейзенберга, $J(r)$ — радиальная зависимость потенциала), имеет место следующее соотношение, вытекающее из условия, что энергия связи дейтрона в этом состоянии стремится к нулю,

$$\frac{1}{\hbar}\sqrt{(W + M - B - H)\cdot m}\int_0^\infty J\,dr = \pi \qquad (1)$$

(m — масса протона). Отмечается, что из (1) вытекает связь между глубиной потенциальной ямы V_0 и радиусом действия ядерных сил b, имеющая одинаковый вид как для потенциала типа $J = -V_0 e^{-r^2/b^2}$, так и для потенциала Юкава

$$J = -V_0 e^{-r/b}/r/b, \quad \frac{b^2}{\hbar^2}(W + M - B - H)\, mV_0 = 2\pi.$$

Ю. С. Саясов

10392. О приведении уравнений нелинейной системы регулирования к простейшему виду. Розенвассер Е. Н., Автоматика и телемеханика, 1960, 21, № 1, 15—19 (рез. англ.)

Выводятся формулы линейного преобразования уравнений системы прямого регулирования

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}x_\alpha + h_k f(\sigma, t), \quad \sigma = \sum_{s=1}^{n} j_s x$$

$$(k = 1, \ldots, n)$$

к одному дифференциальному уравнению n-го порядка $D(p)\,y = f(\sigma, t)$, где $\sigma = M(p)\,y$ и $D(p)$, $M(p)$ — некоторые полиномы относительно оператора p. Целесообразность рассматриваемого преобразования выявляется при проведении расчетов на автоколебания регулируемых систем в случае кусочно-линейной характеристики $f(\sigma, t)$. Р. А. Спасский

10393. О точечном источнике и вихревой нити в винтовом потоке. Полубаринова-Кочина П. Я., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 4, 785—787

Двупараметрическое и зависящее от двух цилиндрических координат r, z винтовое движение несжимаемой жидкости описывается следующим уравнением для функции тока:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + k^2\psi = -kC. \qquad (1)$$

Составляющие скорости выражаются через ψ по формулам: $v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi = \frac{k\psi + C}{r}$. Решение (1), удовлетворяющее граничным условиям: $\psi(z, 0) = 0$, $\psi(0, r) = \psi_0 = \text{const}$, имеет вид:

$$\psi = r\psi_0\,\mathrm{Re}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)d\lambda -$$

$$- kCr\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{k^2 - \lambda^2}\left[1 - \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)\right]d\lambda\right\}.$$

Вычисляя эти интегралы с помощью формулы

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r)\, f(\lambda, z, k)\, d\lambda = \frac{1}{kr}(\sin kz - \sin k\sqrt{z^2 + r^2}),$$

где

$$f(\lambda, z, k) = \begin{cases} \dfrac{\sin z\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} & (0 < \lambda < k), \\ \dfrac{\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} & (k < \lambda < \infty), \end{cases}$$

получаем:

$$\psi = \psi_0\left(\cos kz - \frac{z\cos k\sqrt{z^2 + r^2}}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right) -$$

$$- \frac{C}{k}\left(1 - \cos kz - k\int_0^z \sin k\sqrt{\zeta^2 + r^2}\, d\zeta\right). \qquad (2)$$

При $k = 0$ $\psi = \psi_0\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right)$, что представляет собой функцию тока пространственного источника при безвихревом движении. При $\psi_0 = 0$ (2) дает

$$v_\varphi = \frac{C}{r}\left(\cos kz + k\int_0^z \sin k\sqrt{\zeta^2 + r^2}\, d\zeta\right).$$

Для потенциального потока ($k = 0$) это равенство вырождается в $v_\varphi = C/r$, что соответствует бесконечно тонкой вихревой нити. Н. Н. Кузнецов

10394. Математическое исследование течения в потоке с перепадом уровня свободной поверхности. Икэда (Mathematical investigation of the flow in a stream with a finite drop on the free surface. Ikeda Ikuo), Mem. Fac. Engng Hokkaido Univ., 1957, **10**, № 3, 311—324 (англ.)

Названная в заглавии задача рассматривается для случая потенциального течения несжимаемой жидкости. Введем комплексный потенциал $\chi = \varphi + i\psi$, считая, что при $z = x + iy = 0$, $\chi = 0$. Уравнение Бернулли запишем в виде $y + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = y_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g}$. Полагая $p = 0$ и выбирая единицы измерения координат и времени так, что $g = 0{,}5$, получаем для свободной поверхности $v_f^2 = (v_0^2 - y_f)$. Если $\alpha(\gamma)$ — угол наклона линии тока к оси x, то для свободной границы $\sin\alpha_f \cdot d\varphi = v_f dy_f \quad \sqrt{v_0^2 - y_f}\, dy_f$, так что

$$v_f = \left(v_0^3 - \frac{3}{2}\int_0^\varphi \sin\alpha_f \cdot d\varphi\right)^{1/3}.$$

Поскольку $d\chi/dz = ve^{-i\alpha}$, то $dz_f = \frac{1}{v_f}e^{i\alpha_f}d\varphi$, и уравнение свободной границы имеет вид:

$$z_f = \int_0^\varphi \frac{e^{i\alpha_f(\varphi)}d\varphi}{\left(v_0^3 - \frac{3}{2}\int_0^\varphi \sin\alpha_f \cdot d\varphi\right)^{1/3}}.$$

В качестве функции $\alpha_f(\varphi)$, моделирующей перепад уровня свободной поверхности, автор выбирает функцию $\sin\alpha_f = -(2\mathrm{ch}\,\varphi)^{-1}$. Тогда для v_f на бесконечности получаются следующие выражения: $v_f|_{x=\infty} = \left(v_0^3 + \frac{3}{8}\pi\right)^{1/3}$,

$v_f|_{x=-\infty} = \left(v_0^3 - \frac{3}{8}\pi\right)^{1/3}$. На бесконечности поток плоско-параллелен, поэтому глубина потока обратно пропорциональна скорости: $h_\infty = \frac{q}{\left(v_0^3 + \frac{3}{8}\pi\right)^{1/3}}$, $h_{-\infty} = \frac{q}{\left(v_0^3 - \frac{3}{8}\pi\right)^{1/3}}$. Произвольная линия тока задается уравнением

$$z = \int_0^\chi \frac{e^{t \arcsin\left(-\frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,\chi}\right)}\, d\chi}{\left(v_0^3 + \frac{3}{2}\int_0^\chi (2\,\mathrm{ch}\,\chi)^{-1} d\chi\right)^{1/3}},$$

и любая из этих линий тока может быть выбрана в качестве ложа потока. При этом, однако, должно выполняться условие непрерывности скорости v, что влечет за собой ограничение области изменения функции тока ψ. Автор показывает, что максимальная возможная глубина достигается при $|\psi| = \frac{\pi}{3}$. В заключение численно найдены профили потока для случаев $v_0^3 = 2$ и $v_0^3 = \frac{3}{8}\pi$.

Н. Н. Кузнецов

10395. О медленном движении вязкой проводящей жидкости между двумя параллельными плоскостями. Карстой (Sur le mouvement lent d'un fluide visqueux conducteur entre deux plans parallèles. Carstoiu John), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 14, 1192—1193 (франц.)

Рассматривается движение вязкой несжимаемой проводящей жидкости при действии постоянной массовой силы k и однородного магнитного поля H_0, перпендикулярного к граничным стенкам. Уравнение для параллельной к граничным стенкам скорости $u(z, t)$ берется в виде $\frac{\partial u}{\partial t} = k - \alpha^2 u + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, где ν — кинематический коэффициент вязкости, α^2 пропорциональна H_0^2. Последнее уравнение при однородном начальном и граничном условии решается методами операционного исчисления. Дается также предельное значение функции $u(z, t)$ при $t \to \infty$, совпадающее с известным раньше значением скорости стационарного движения.

Д. Е. Долидзе

10396. О кватернионовом потенциале пространственного течения жидкости. Воронец (О кватернионском потенцијалу просторног струјања. Воронец Константин), Зб. Маш. фак. Ун-т Београду. Београд, Новинско-Изд. Пред. Техн. Књига, 1956—1958, 125—131 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Изучается безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости в трех измерениях. Уравнения Коши—Римана, определяющие комплексный потенциал, обобщаются, и это позволяет ввести потенциал, выражающийся через кватернионы. Свойства этого потенциала оказываются аналогичными свойствам комплексного потенциала и позволяют получить некоторый класс течений в трех измерениях.

В качестве примера рассмотрены течения, потенциал скоростей которых имеет вид $f_1(x, y) + f_2(x, z)$.

Приложений общей теории к решению конкретных гидродинамических задач об обтекании тел или истечении жидкости из отверстий в работе нет.

М. И. Гуревич

10397. Тонкое крыло в сверхзвуковом потоке, ограниченном стенкой. Маренкова А. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 19, 125—138 (рез. англ.)
См. РЖМех, 1959, № 9, 9879.

10398. К точному расчету сверхзвуковой части плоского сопла. Баранцев Р. Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 89—92 (рез. англ.)
См. РЖМех, **158**, № 7, 7552.

10399. О математической структуре турбулентности. Басс (On the mathematical structure of turbulence. Bass J.), Revs Mod. Phys., 1958, **30**, № 3, 1084—1085. Discuss., 1085—1086 (англ.)

Обсуждается вопрос о возможности построения решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющих свойствам случайной функции: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = 0$, $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [u(t)]^2 dt$ существует, $\lim_{h\to\infty}\gamma(h) = 0$, где $\gamma(h) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(t)u(t+h)\,dt$.

Указывается, что среди обычных почти периодических решений уравнения (1) трудно найти функции, удовлетворяющие сразу всем перечисленным свойствам. Решения нужного типа можно построить с помощью разрывной функции $Y(t)$ в форме $u(x, t) = \int_0^\infty Y(t+\omega)\,\varphi(\omega, x)\,d\omega$, где

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 \text{ или } -1, & t > 0 \end{cases}$$

с точками разрыва, находящимися в интервалах между целыми числами, $\varphi(\omega, x)$ — достаточно быстро убывающая при $\omega \to \infty$ функция.

В дискуссии Барджерс указывает, что стохастичность турбулентного движения заложена в начальных условиях. Для разумного вероятностного описания турбулентности следует ввести ансамбль начальных состояний жидкости.

Ю. Н. Днестровский

10400. Основы теории потенциала возмущений, вызываемых винтом при больших скоростях. Кондо (On the potential-theoretical fundamentals of the aerodynamics of screw propellers at high speed. Kondo Kazuo), J. Fac. Engng Univ. Tokyo, 1957, **25**, № 1, 1—39 (англ.)
См. РЖМех, 1959, **8**, 8619.

10401. Точное нестационарное решение задачи о заглубленном линейном источнике для несимметричного источника. Митра (Exact transient solution of the buried line source problem for an asymmetric source. Mitra Manindra), Z. angew. Math. und Phys., 1958, **9a**, № 4, 322—331 (англ.; рез. нем.)
См. РЖМех, 1960, № 1, 980.

10402. О средах, допускающих одномерные движения с однородной деформацией. Куликовский А. Г., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, 485—486
См. РЖМех, 1960, № 3, 3016.

10403. Об одной задаче теории фильтрации. Каменомостская С. Л., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 1, 18—20
См. РЖМех, 1958, № 9, 10126.

10404. О точном решении одной задачи магнитной гидродинамики. Уфлянд Я. С., Чекмарев И. Б., Ж. техн. физ., 1959, **29**, № 11, 1412—1414

Рассматривается неустановившееся движение несжимаемой проводящей вязкой жидкости, возникающее между двумя параллельными плоскостями $y = \pm a$ в поперечном магнитном поле $H_y = H_0$ при условии, что в начальный момент пластины начинают двигаться вдоль

оси x с одинаковой скоростью $u_0(t)$ в противоположных направлениях. Скорость жидкости $u(y, t)$ и индуцированное магнитное поле $h(y, t)$, параллельные оси x, удовлетворяют системе уравнений магнитной гидродинамики $\rho\frac{du}{dt}=\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+H_0\frac{\partial u}{\partial y}$ при нулевых начальных и следующих граничных условиях: $u(a, t)=u_0(t)$, $u(-a, t)=-u_0(t)$, $h(a, t)=h(-a, t)=0$; здесь ρ — плотность, η — коэффициент вязкости, σ — проводимость. Авторы указывают на возможность решения задачи с помощью преобразования Лапласа и приводят решение в случае $u_0(t)=\text{const}$. Результаты исследования решения формулируются без доказательства. Д. П. Костомаров

10405. О решении уравнений магнитной гидродинамики, описывающих одномерные осесимметрические движения гравитирующего газа. Рязанов Е. В., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 1, 187—189

Найдено частное решение уравнений магнитной гидродинамики для одномерных осесимметричных неустановившихся движений газа, проводимость которого бесконечна и который находится под действием сил ньютонианского тяготения. В этом решении скорость газа линейно зависит от расстояния до оси симметрии. Плотность, давление и компоненты магнитного поля в случае любых показателей адиабаты γ выражаются через одну произвольную функцию лагранжевой координаты и функцию от времени, заданную простым дифференциальным уравнением. Дан качественный анализ возможных непрерывных движений газа, соответствующих полученному решению. Для $\gamma=2$ найдено решение уравнений магнитной гидродинамики с учетом сил тяготения, содержащее две произвольных функции от лагранжевой координаты. Отмечается, что решение, аналогичное полученному в настоящей работе при $\gamma\neq 2$ без анализа возможных движений, опубликовано также в статье Мак-Витти (Mc Vittie G. C., Revs Mod. Phys., 1958, 30, № 3). В. П. Коробейников

10406. Характеристические многообразия для пространственных неустановившихся течений в магнитной гидродинамике. Онг (Characteristic manifolds in threedimensional unsteady magnetohydrodynamics. Ong Rudi S.), Phys. Fluids, 1959, 2, № 3, 247—251 (англ.)

Определяются характеристические многообразия для пространственных неустановившихся течений идеальной сжимаемой проводящей жидкости с бесконечной проводимостью при наличии внешних электромагнитных полей с помощью применения метода Коберна (РЖМат, 1955, 5835). Основные уравнения магнитной гидродинамики записываются в четырехмерном евклидовом пространстве в произвольной декартовой системе координат.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\rho v^\mu)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\lambda)+\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\rho v^\mu v_\lambda)+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(p+\frac{\mu_e H^2}{8\pi}\right)\delta^\mu_\lambda-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\mu_e}{4\pi}H^\mu H_\lambda\right)=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+v^\mu\frac{\partial H_\lambda}{\partial x^\mu}-H^\mu\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}+H_\lambda\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}H^\mu=0, \qquad (1)$$

где x^λ $(\lambda=1, 2, 3)$ — пространственные координаты, t — временная координата, $g_{\lambda\mu}=\cos(x^\lambda x_\mu)$, $g_{\lambda\mu}$ — метрический тензор. Выводятся динамические условия и условия „кинематической совместности", которым удовлетворяют разрывы производных основных параметров потока и магнитного поля. Подробно исследуются свойства различных многообразий, на которых имеют место разрывы производных отдельных параметров (как, например, гиперповерхностей, вдоль которых терпят разрывы первые производные вектора скорости, в то время как производные плотности, напряженности магнитного поля непрерывны и др.). Исследуются характеристические многообразия. Выводится характеристическое уравнение

$$L^2\left\{L^2-\left(a^2+\frac{\mu_e H^2}{4\pi\rho}\right)g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta\right\}+$$

$$+\frac{\mu_e a^2}{4\pi\rho}H^\lambda H^\mu\varphi_\lambda\varphi_\mu g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta=0,$$

где $\varphi(t, x^\lambda)=c_j$ $(j=0;\ j=0, 1;\ j=0, 1, 2$ или $j=0, 1, 2, 3)$ — характеристические гиперповерхности, $\varphi_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$; $L\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$; $g^{\alpha\beta}$ — метрический тензор, a — местная скорость звука. Доказывается, что малые возмущения параметров потока и магнитного поля $(v_\lambda, p, \rho, H_\lambda)$ распространяются так же, как и в обычной гидродинамике, вдоль характеристических гиперповерхностей. Автором высказываются соображения о возможности применения изложенного метода к исследованию ударных волн и контактных разрывов в магнитной гидродинамике неустановившихся течений.

И. И. Ночёвкина

10407. Влияние гравитационных или магнитных полей на движение жидкости. И Цзя-Шунь (Effects of gravitational or electromagnetic fields on fluid motion. Yih Chia-Shun), Quart. Appl. Math., 1959, 16, № 4, 409—415 (англ.)

Рассматривается общее свойство „натяжения" идеальной несжимаемой жидкости, проявляющееся при действии сил вращения, гравитационных и электромагнитных сил. Исследуется медленное стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в однородном гравитационном поле или в случае вращения жидкости, как целого, при условии, когда можно пренебречь инерционными членами в уравнении движения, т. е. когда

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$. Доказывается, что при выполнении условия (1) движение жидкости сводится к плоскому, не зависящему от координаты, вдоль которой направлена ось вращения или вектор гравитационной силы. Рассматривается аналогичное воздействие однородного электромагнитного поля на движение проводящей идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью. При выполнении условия (1) доказывается независимость параметров течения от координаты, вдоль которой направлен вектор напряженности магнитного поля. При наличии в проводящей жидкости электрического тока математически обосновывается независимость параметров потока от направления вектора напряженности индуцированного магнитного поля. И. И. Ночёвкина

10408. Магнитогидродинамические волны в электропроводящей жидкости внутри бесконечной трубы прямоугольного сечения. Вакка (Onde magneto idrodinamiche in un fluido elettricamente conduttore entro un tubo indefinito a sezione rettangolare. Vacca Maria Teresa), Atti Accad. sci. Torino, Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955—1956, 90, № 2, 633—646 (итал.)

Для названной задачи, относящейся к однородной изотропной несжимаемой жидкости, разыскиваются методом Фурье частные решения в том случае, когда магнитное поле **H** представляется наложением постоянного, направленного вдоль оси трубы, поля $\mathbf{H}_0$ и переменного поля **h**, связанного со скоростью v специальной зависимостью $v=\pm\sqrt{\mu/4\pi\rho}\,h$ (μ — магнитная проницаемость, ρ — плотность жидкости). Решения представляют синусоидальные волны, распространяющиеся вдоль оси с затуханием, если вязкость отлична от нуля, и без затухания при нулевой вязкости. Показано, что этих решений достаточно, чтобы на границах сечения удовлетворить условию обращения в нуль нормальной составляющей скорости (касательная составляющая остается отличной от нуля) и построить решение по заданным начальным значениям вектора на границе поперечного сечения. Н. А. Ростовцев

10409. О дифференциальном уравнении Зоммерфельда для гидродинамической устойчивости. Митринович (Sur l'équation différentielle de Sommerfeld pour la stabilité hydrodynamique. Mitrinovitch Dragoslav S.), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 19, 2287—2289 (франц.)

См. РЖМех, 1957, 7948.

10410. Одновременная разделимость обобщенного волнового уравнения. Лейтнер, Мейкснер (Simultane Separierbarkeit von verallgemeinerten Schwingungsgleichungen. Leitner Alfred, Meixner Josef), Arch. Math., 1959, 10, № 5, 387—391 (нем.)

Установлен вид функции $\Phi(x, y, z)$, при котором возможно одновременно разделить переменные в обобщенном волновом уравнении $\Delta u + k^2\Phi(x, y, z)u = 0$ сразу в двух системах координат: сферической и сфероидальной: $x=a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\gamma_i^2)}\cos\varphi$, $y=a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\gamma_i^2)}\sin\varphi$, $z=a(\xi\eta+\alpha)$, a и α — постоянные. Указано, что собственными функциями будут при этом комбинации гипергеометрических функций. Сделаны общие замечания о других системах координат. О. И. Панич

10411. О влиянии упругости среды на сопротивление излучения поршня, вставленного в экран. Четаев Д. Н. Акуст. ж., 1959, 5, № 4, 501—503

Рассматриваются установившиеся колебания, которые возбуждаются в упругом полупространстве круглым поршневым излучателем, вставленным в экран. Определяется импеданс связи поршня с полем излучения. Заметка содержит краткое изложение результатов опубликованной ранее статьи (РЖМат, 1960, 5155). Д. П. Костомаров

10412. О возмущениях, производимых импульсом давления на поверхности сферической полости в упругой среде. Чакраборти (On disturbances generated by a pulse of pressure on the surface of a spherical cavity in an elastic medium. Chakraborty Sakti Kanta), Indian J. Theoret. Phys., 1958, 6, № 3, 85—89 (англ.)

Дано точное решение задачи: на поверхность сферической полости $r=c$ действует давление по закону: $(\sigma_r)_{r=c}=-P\sin\omega t$ для $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega}$; $(\sigma_r)_{r=c}=0$ для $t>\frac{\pi}{\omega}$; найти смещения и напряжения как функции $t_1=t-\frac{r-c}{a}$, a — скорость распространения волн расширения. Н. А. Ростовцев

10413. О построении общего решения динамической задачи теории упругости для полупространства. Бородачев Н. М., Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1959, № 11, 1684—1686

Преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Фурье по переменным x, y применяются к системе уравнений движения упругой среды с целью получения общих формул, представляющих перемещения $u(x, y, z, t)$ и т. д. в полупространстве интегралами Фурье (Лапласа). Приводятся соображения относительно построения решений, удовлетворяющих заданным начальным и граничным условиям. Результаты не могут считаться новыми. В несколько иной (более удобной) форме, с использованием только преобразования Фурье, такое решение встречается, например, в работе Л. Н. Сретенского «Распространение упругих волн». Тр. Моск. матем. о-ва., 1952, 1, стр. 167—186. Н. А. Ростовцев

10414. О динамических задачах Буссинеска и Герца. Мишику (Asupra problemelor dinamice ale lui Boussinesq şi Hertz. Mişicu M.), Studii şi cercetări mec. apl. Acad. RPR, 1959, 10, № 2, 467—496 (рум; рез. русск., франц.)

Рассматриваются динамические задачи о давлении жесткого штампа на упругое полупространство и контакте упругих тел в случае, когда давление в области контакта является синусоидальной функцией времени. Как и в соответствующих статических задачах, предполагается отсутствие трения в области контакта. Принимается, кроме того, что тела, находящиеся в контакте, не отделяются друг от друга ни в какой момент времени. В основу исследования кладется приближенное соотношение между смещением $(w)_{z=0}$ и давлением $-(\sigma_z)_{z=0}=p\left(x', y', t-\frac{r'}{c_2}\right)$ под штампом:

$$w=-\vartheta\iint_{\Sigma}\frac{p\left(x', y', t-\frac{r'}{c_2}\right)dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \qquad (A)$$

где $\vartheta=(1-\nu^2)/\pi\varepsilon$ (в случае упругого контакта $\vartheta=\left(1-\nu_1^2\right)/\pi\varepsilon_1+\left(1-\nu_2^2\right)/\pi\varepsilon_2$). Это соотношение выполняется тем точнее, чем меньше величина $L\omega\sqrt{\frac{1}{c_2^2}-\frac{1}{c_1^2}}$, где c_1, c_2 — скорости распространения продольных и поперечных волн, ω — частота, L — характеристический размер области контакта Σ. Рассматривается случай эллиптической области. Полагая $p\left(x', y', t-\frac{r'}{c_2}\right)=p(x', y')\cos\omega\left(t-\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{c_2}\right)$, автор исследует возможности решения уравнения (A) относительно $p(x', y')$ с помощью преобразования Фурье. Этот путь оказывается весьма трудным: интегральные формулы имеют сложный вид, не позволяющий вывести какие-либо качественные заключения и приближенные количественные оценки. Автор находит, что более эффективным является применение полуобратного метода, в котором $p(x', y')$ для эллиптической области берется в той же форме, что и в статической задаче, т. е.

$$p(x', y')=\sum\nolimits_m a_m\left[1-\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2\right]^{m-1/2}$$

Тогда вычисление интеграла в правой части (A) упрощается с помощью того преобразования координат, которое для статического случая указано в монографии И. Я. Штаермана („Контактная задача теории упругости", ГТТИ, 194 , стр. 197—204). Однако в динамической задаче подынтегральное выражение оказывается более сложным, и перемещение w под штампом теперь не вы-

ражается полиномом от x, y. Тем не менее, этот способ позволяет находить приближенные оценки и делать заключения о точности тех приближений, которые получаются простым распространением статических формул на амплитудные значения давления на поверхности. Аналогичный результат получен и в задаче об упругом контакте. Н. А. Ростовцев

10415. О непосредственном решении задачи Сен-Венана через напряжения. Бальдаччи (Sulla integrazione diretta del problema di Saint-Venant in termini di tensioni. Baldacci Riccardo F.), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955—1956, **90**, № 2, 604—610 (итал.)

Дано решение известной задачи Сен-Венана об упругом равновесии цилиндрического тела путем непосредственного использования уравнений равновесия Бельтрами и тех упрощений в них, которые возникают из существа решаемой задачи. Н. А. Ростовцев

10416. К вопросу о плеоназмах в общем решении уравнений равновесия анизотропного тела в перемещениях. Байда Э. Н., Изв. высш. учебн. заведений. Стр-во и архитект., 1959, № 1, 27—37

Устанавливается число лишних элементов в общем решении уравнений равновесия анизотропного тела в перемещениях. Показывается, что число функций, через которые выражены перемещения, можно сократить до одной. Выкладки и доказательства произведены в операторной форме. К. В. Соляник-Красса

10417. О некоторых пространственных задачах теории упругости. Теодореску (Über einige räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. Teodorescu P. P.), Aplikace mat., 1959, **4**, № 5, 225—238 (нем.; рез. чешск., русск.)

Рассматривается задача об определении напряжений в полупространстве и упругом слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, находящимися под действием периодической, а также произвольной нагрузки. Гармонические и бигармонические функции, входящие в общие решения уравнений упругости, выражаются через функции вида $A_{mn}\varphi_{mn}$, $B_{mn}z\varphi_{mn}$, где $\varphi_{mn} = \operatorname{ch}\gamma_{mn}z\sin\alpha_n x\sin\beta_n y$, A_{mn}, α_n, β_n, γ_{mn} — постоянные, x, y, z — координаты точки упругого тела. Решения рассматриваемых задач записываются в виде интегралов Фурье. М. Г. Слободянский

10418. Расширение пространства краевых условий в бигармонической задаче для областей с угловыми точками. Нечас (L'extension de l'espace des conditions aux limites du problème biharmonique pour les domaines à points anguleux. Nečas Jindřich), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 3, 339—371 (франц.; рез. русск.)

Рассматривается плоская бигармоническая задача $\Delta^2 u = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_L = f_x$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_L = f_y$, $u(0, 0) = 0$. Вместо приведенных краевых условий можно было бы задавать на граничном контуре L значения функции и нормальной производной. Функции f_x и f_y должны удовлетворять условию:

$$\int_L (f_x dx + f_y dy) = 0. \qquad (1)$$

Область, в которой ищется решение, обозначается Ω. Относительно граничного контура L предполагается, что он состоит из конечного числа дуг третьей степени гладкости. Ищется обобщенное решение.

Поставленная задача была рассмотрена С. Л. Соболевым в известной монографии „Некоторые применения функционального анализа в математической физике" (изд. ЛГУ, 1950). Там задача рассматривалась вариационным методом, на решение накладывалось дополнительное условие $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$. При этом теоремы вложения немедленно приводят к требованию, чтобы заданные функции f_x и f_y были суммируемы на контуре L с любой положительной степенью. Все же, даже при выполнении последнего требования, решения из $W_2^{(2)}(\Omega)$ может не существовать.

Целью реферируемой статьи является расширение класса допустимых краевых условий за счет отказа от требования $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$. В § 3 доказано существование пары функций Грина $g_x(x, y, s)$ и $g_y(x, y, s)$ (s — дуговая абсцисса точек контура L). При доказательстве существования g_x и g_y автор доказывает существование решения некоторых специальных бигармонических задач и исследует эти решения. Широко используются методы функционального анализа, теории функций комплексного переменного, теории потенциала. Однако метод доказательства не дает алгоритма для фактического нахождения функций g_x и g_y. В § 4 доказано, что функция

$$u(x, y) = \int_L [g_x(x, y, s) f_x(s) + g_y(x, y, s) f_y(s)]\, ds \qquad (2)$$

является решением бигармонической задачи при следующих условиях: функции f_x и f_y суммируемы на L с некоторой степенью $p > 1/(1+\mu)$, где $\mu > 1/2$ — число, зависящее от свойств контура L. Всегда будут допустимыми краевыми условиями функции с суммируемым квадратом, удовлетворяющие условию (1). Если все угловые точки выпуклы, то достаточно, чтобы f_x и f_y были суммируемы с любым фиксированным показателем больше единицы и удовлетворяли равенству (1). Статья автора является примером плодотворного сочетания методов функционального анализа, теории функций комплексного переменного и теории потенциала.

О. И. Панич

10419. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении. Вольмир А. С., Строит. механ. и расчет сооруж., 1960, № 1, 6—9

10420. Дифракция плоской упругой волны относительно угла. Свекло В. А., Сюкияйнен В. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1122—1123
См. РЖМех, 1959, № 5, 5463.

10421. Решение некоторых задач о деформации упругого полупространства в цилиндрических координатах. Рубцов В. М., Смоловик И. И., Тр. Сибирск. металлург. ин-та, 1957, вып. 4, 48—56
См. РЖМат, 1959 № 11, 13843.

10422. Об одной форме решения уравнений Ламе плоской теории упругости в параболических, эллиптических и биполярных координатах. Щепетев А. Н., Тр. Сибирск. металлург. ин-та, 1957, вып. 4, 61—68
См. РЖМех, 1959, 11, 13843.

10423. О функции перемещений осесимметричной задачи динамики упругого тела. Пределяну (Über die Verschiebungsfunktionen für das achsensymmetrische Problem der Elastodynamik. Predeleanu M.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 9-10, 402—405 (нем.)
См. РЖМех, 1960, № 1, 977.

10424. Смешанная задача для упругого слоя. Уфлянд Я. С., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 6, 991—993
См. РЖМех, 1960, № 1, 915.

10425. Исследование напряженного и деформированного состояния толстостенных цилиндров при помощи вычислительных машин при произвольной осевой нагрузке. Квитка (Дослідження напруженого та деформованого стану товстостінних циліндрів за допомогою обчислювальних машин при довільному осьовому навантаженні. Квітка О. Л.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 12, 1300—1305 (укр.; рез. русск. англ.)

10426. Деформация полупространства под действием жесткого прямоугольного в плане штампа. Смолович И. И., Тр. Сибирск. металлург. ин-та, 1957, вып. 4, 42—47
См. РЖМех, 1959, 9, 7919.

10427. О решении задачи теории упругости для цилиндра. Маховиков В. И., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1959, № 1, 102—109

10428. Общее решение задачи о кручении косоугольного параллелепипеда. Мешков А. И., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1959, № 3, 43—46

10429. Смешанные граничные задачи для многоугольных плит. I. Нариболи (Mixed boundary value problems for rectilinear plates. I. Nariboli G. A.), Arch. mech. stosowanej, 1957, **9**, № 5, 507—524 (англ.; рез. польск., русск.)
См. РЖМех, 1959, № 2, 1726.

10430. Нелинейные задачи теории тонких пластин. Морозов Н. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 19, 100—124 (рез. англ.)
См. РЖМех, 1960, № 3, 3717.

10431. Конечное расширение отверстия в тонкой бесконечной пластике. Ходж, Санкаранараянан (On finite expansion of a hole in a thin infinite plate. Hodge P. G., Jr, Sankaranarayanan R.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 1, 73—80 (англ.)
См. РЖМех, 1960, № 1, 1017.

10432. К вопросу решения уравнения цилиндрических оболочек. Ахундзаде (Силиндрик өртүк тәнликләринин һәллинә даир. Ахундзадә М. Ј.), АзәрбССР Елмләр. Акад. хәбәрләри. Физ.-ријазијјат вә техн. елмләри сер., Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1959, № 5, 43—52 (азерб., рез. русск.)

10433. Устойчивость цилиндрических оболочек с точки зрения математической теории упругости. Войцеховская К. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 4, 623—626
См. РЖМех, 1959, № 11, 13947.

10434. Термоупругие напряжения в бесконечном пространстве, обусловленные равномерным распределением температуры по поверхности цилиндрической полости. Чаудхури (Thermal stresses due to uniform temperature distributed over a band of the cylindrical hole in an infinite body. Chowdhury P.), Appl. Scient. Res., 1959, **A8**, № 6, 474—478 (англ.)

Рассматривается задача нахождения термоупругих напряжений в бесконечном упругом изотропном пространстве с бесконечной цилиндрической полостью, граничная поверхность которой свободна от напряжений и поддерживается при постоянной во времени температуре. При решении задачи автор использует аппарат термоупругого потенциала, причем потенциальная функция ищется в форме несобственного интеграла. В качестве иллюстрации общей теории в работе рассматривается задача нахождения термоупругих напряжений при кусочно-постоянном распределении температуры на границе цилиндрической полости.

М. С. Ага

10435. Динамическая задача термоупругости для круглого диска. Пехоцкий (A certain dynamic problem of thermoelasticity concerning the circular disc. Piechocki W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1959, **7**, № 9, 513—518 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается динамическая проблема термоупругости для круглого тонкого изотропного диска единичного радиуса. Предполагается, что на границе диска термоупругие напряжения и температура равны нулю, а внутри диска распределены источники тепла, мощность которых изменяется во времени по гармоническому закону. Для решения задачи в работе используется аппарат термоупругого потенциала и конечное преобразование Ханкеля. Само решение — термоупругие напряжения получены в форме рядов по бесселевым функциям, сходимость которых не обсуждается.

М. С. Ага

10436. Основа кинетической теории и уравнение Больцмана. Случай, когда жидкость подвержена действию поля сил. Марке (Base de la théorie cinétique et équation de Boltzmann. Cas ou le fluide est soumis à un champ de forces. Marquet Simone), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 17, 1319—1322 (франц.)

В развитие своих предыдущих работ автор выводит уравнение движения для системы n одинаковых частиц в предположении случайности их соударений в поле сил, обладающем определенными свойствами. Вводится постулат о существовании непрерывной всюду положительной инвариантной функции энергии и строится решение найденного уравнения. Далее приводятся свойства полученного решения, в частности показывается единственность решения в том случае, если оно существует.

Г. К. Михайлов

10437. Отражение звуковой волны от деформируемой плоскости. Козлов В. Ф., Научн. докл. высш. школы. Физ-матем. н., 1958, № 6, 197—200

Рассматривается задача об отражении звуковой волны постоянной интенсивности от жесткой плоскости, имеющей деформируемую часть в виде прямоугольного поршня. Давление звуковой волны p удовлетворяет уравнению: $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ при условиях:

а) $p = p_0\left(t + \frac{z}{a}\right)$ при $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $p_0(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$;

б) на поршне: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\frac{\partial V}{\partial t}$ при $z = 0$, где $V = V(t)$ — скорость поршня. В общем виде найдено выражение для силы, действующей на поршень, которое имеет довольно громоздкий вид. При наличии сил сопротивления в виде: $q = lL\left[k_1 V(t) + k_2\int_0^t V(\tau)\,d\tau\right]$, где k_1, k_2 — постоянные, l, L — размеры поршня, получен в элементарных функциях закон движения поршня на начальном участке. Показано, что движение поршня можно найти вплоть до любого момента времени в квадратурах.

В. В. Кравцов

10438. О структуре поля в цилиндрических волноводах сложного сечения. Меркулов В. В., Акуст. ж., 1959, 5, № 4, 428—431

Рассматривается возможность использования методов теории возмущений для определения структуры поля в цилиндрических волноводах, форма сечения которых значительно отличается от сечения волноводов простых форм. Как известно, нахождение поля в цилиндрических волноводах сводится к определению собственных функций мембраны:

$$\Delta\psi_m + \varkappa_m^2\psi_m = 0 \qquad (1)$$

с граничным условием $\psi_m|_L = 0$ или $\left.\frac{\partial\psi_m}{\partial n}\right|_L = 0$. Потенциал скоростей в акустическом случае или вектор Герца в электромагнитном имеет вид: $\Pi(x, y, z) = \psi_m(x, y)\,z_m(z)$, где $z_m(z)$ определяется из уравнения $\frac{d^2 z_m}{dz^2} + (k^2 - \varkappa_m^2)\,z_m = 0$. Вводя новые переменные ξ и η по формуле $x + iy = F(\zeta)$, где $F(\zeta)$ — аналитическая функция комплексного переменного $\xi + i\eta$, уравнение (1) можно привести к виду:

$$\Delta\psi_m + \varkappa_m^2 |F'(\zeta)|^2\psi_m = 0, \qquad (2)$$

$\psi_m|_{L_0}=0$ или $\left.\frac{\partial\psi_m}{\partial n}\right|_{L_0}=0$, где L_0 — граница области в переменных ξ, η. Если считать, что $F(\zeta)$ можно представить в виде $F(\zeta)=\zeta+h\Phi(\mu,\zeta)$, где $|\Phi(\mu\zeta)|<1$, h — постоянная, характеризующая отклонение $F(\zeta)$ от ζ, а μ характеризует скорость изменения $\Phi(\mu\zeta)$, то уравнение (2) принимает вид: $\Delta\psi_m+\varkappa_m^2\{1+\varepsilon\operatorname{Re}\Phi'(\mu\zeta)+\varepsilon^2[(\operatorname{Re}\Phi'(\mu\zeta))^2+(\operatorname{Im}\Phi'(\mu\zeta))^2]\}\psi_m=0$, где $\varepsilon=\mu h$, и, если известно решение ψ_{m0} при $\varepsilon=0$, то полученное уравнение можно решать методами теории возмущений. Рассмотренный метод применим не только в случае малых отклонений ($h\ll 1$), но и при больших отклонениях ($h\gg 1$), но при условии, что они плавные ($\mu\ll 1$). В качестве примера вычислено поле в прямоугольном волноводе с вогнутой верхней стенкой.

В. В. Кравцов

10439. Об излучении точечного источника электромагнитных волн в гиротропной среде с границей раздела. Барсуков К. А., Радиотехн. и электроника, 1959, 4, № 11, 1759—1764

Рассматривается поле электрического осциллятора с моментом $p=p_0e^{i\omega t}$ в гиротропной среде, которая характеризуется тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & -ig & 0\\ ig & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}.$$

Вводится цилиндрическая система координат с осью z, параллельной внешнему магнитному полю, и из системы уравнений Максвелла получаются уравнения

$$\Delta_2E_z+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}+k^2\varepsilon_2E_z-\frac{kg}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_z}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}ikj_z+\frac{4\pi}{\varepsilon_1}\frac{\partial\rho}{\partial z},\quad(1)$$

$$\Delta_2H_z+\frac{\partial^2H_z}{\partial z^2}+\frac{k^2}{\varepsilon_1}(\varepsilon_1^2-g^2)H_z+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}gk\frac{\partial E_z}{\partial z}=$$

$$=-\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}_zj+\frac{4\pi gk}{\varepsilon_1}\rho;\quad(2)$$

заряды и токи могут быть определены по формулам $j=i\omega p$, $\rho=-\operatorname{div}p$, где p — поляризация среды. Остальные компоненты поля выражаются через E_z и H_z. Записывая решение системы уравнений (1)—(2) в виде интегралов Зоммерфельда от функций Бесселя, автор находит поле осциллятора в бесконечной гиротропной среде. Затем рассматривается случай, когда гиротропная среда заполняет полупространство $z>0$, а полупространство $z<0$ заполнено изотропной средой с диэлектрической постоянной ε. Получены точное решение задачи и некоторые асимптотические формулы для поля в волновой зоне.

Д. П. Костомаров

10440. Дифракция *E*-поляризованной плоской волны на клине с конечной проводимостью. Вильямс (Diffraction of an *E*-polarized plane wave by an imperfectly conducting wedge. Williams W. E.), Proc. Roy. Soc., 1959, **A252**, № 1270, 376—393 (англ.)

Получено точное решение задачи о дифракции *E*-поляризованной плоской электромагнитной волны на клине произвольного угла (меньше π). Проводимость клина предполагается конечной, но достаточно большой, что дает возможность воспользоваться импедансным условием на поверхности клина. Решение ищется в виде контурного интеграла, причем удовлетворение граничным условиям приводит к системе функциональных уравнений, решение которых удается найти в виде двойной гаммафункции. Решение системы уравнения оказывается менее громоздким в случае, если угол клина равен $p\pi/2q$, где p, q — простые целые числа и p — нечетное. Подбирая p и q, можно приближенно выразить величину любого угла, что дает возможность всегда пользоваться более простыми формулами. Теоретические результаты хорошо совпадают с экспериментальными результатами в области тени и несколько хуже в освещенной области. Различие в освещенной области, по мнению автора, объясняется неточностью эксперимента. Работа содержит введение, в котором автор делает достаточно полный обзор работ, посвященных исследованию дифракции на клине. К сожалению, не упомянуты работы советских авторов в этой области, например, работы Г. Д. Малюженца (РЖМат, 1959, 547, 8106, 9224).

А. А. Ковтун

10441. Некоторые вопросы теории метода оптической скамьи в электронной оптике. Касьянков П. П., Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1957, вып. 31, 144—155

Изучаются вопросы создания аксиально-симметричных электростатических полей с заданным потенциалом на оси. Показывается единственность решения задачи о нахождении потенциала в пространстве, если задано распределение потенциала на оси. Делаются общие замечания о нахождении потенциала системы проводящих колец с общей осью (оптическая скамья).

Ю. Н. Днестровский

10442. О поперечном сечении затухания плоской волны для препятствия. Хоп (On the plane-wave extinction crossection of an obstacle. Hoop A. T. de), Appl. Scient. Res., 1959, B, 7, № 6, 463—469 (англ.)

Гармоническая плоская волна падает на препятствие конечных размеров с импедансной поверхностью. Утверждается, что существуют близкие соотношения между поперечным сечением затухания, амплитудой и фазой волны, рассеянной в направлении распространения падающей волны. Точная форма этих соотношений, т. е. «Теорема поперечного сечения» доказывается с помощью явного представления поля рассеивания для случая эллиптически поляризованной плоской волны.

Д. З. Авазашвили

10443. О краевой задаче электроразведки для вытянутого эллипсоида вращения. Кольбенхейер (O okrajovej úlohe odporovej geoelektriky pre pretiahnutý rotačný elipsoid. Kolbenheyer T.), Mat.-fyz. časop., 1956, **6**, № 2, 109—129 (словац.; рез. русск., нем.)

При помощи бесконечных рядов гармонических функций вытянутого сфероида решается задача об электрическом поле точечного источника, возмущенном однородно проводящим телом в виде вытянутого эллипсоида вращения. Точечный источник может находиться во внешнем пространстве или внутри эллипсоида. Неизвестные коэффициенты рядов, выражающих индуцированные потенциалы во внешнем пространстве и внутри эллипсоида, определяются из краевых условий. Решение подвергается строгому анализу. С этой целью исследуются некоторые специальные свойства функций Лежандра $P_n^m(u)$ и $Q_n^m(u)$ первого и второго рода. Доказано, что полученные ряды можно дифференцировать почленно в соответствующих областях по переменной η (определяющей систему софокусных эллипсоидов), включая поверхность основного эллипсоида, являющегося границей упомянутых областей. То же самое относится и к дифференцированию ряда для обратного расстояния $1/R$ от источника. Наконец, при помощи теоремы Грина доказывается единственность решения задачи.

T. Kolbenheyer

10444. Излучение модулированного пучка заряженных частиц при пролете через круглое отверстие в идеально проводящем плоском экране. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Радиотехн. и электроника, 1959, 4, № 10, 1644—1651

Изучается излучение электронного пучка при прохождении через круглое отверстие в плоском идеально проводящем экране. Все величины зависят от времени по закону $e^{-i\omega t}$. Плотность тока в пучке задается в форме: $j_z = j(r)e^{ik_0 z}$, $k_0 = \omega/v$, где $j(r)$ отлична от нуля лишь в области $0 \leqslant r \leqslant b < a$ (a — радиус отверстия). Используя формулы Грина и краевые условия на экране, авторы получают для неизвестной функции $\mathbf{E}$ (напряженность возмущенного электрического поля) интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int_{S_2} [\mathbf{n}\mathbf{E}(P_2)] \cdot \frac{e^{ikR(Q,P_2)}}{R(Q,P_2)}\, dS_{P_2} = \int_{S_1} [\mathbf{n}\mathbf{E}^{(0)}(P_1)] \frac{e^{ikR(Q,P_1)}}{R(Q,P_1)} dS_{P_1},$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали, $\mathbf{E}^{(0)}$ — поле, создаваемое тем же пучком в пустом пространстве, S_1 и S_2 — поверхности экрана и отверстия. Уравнение решено численно на электронной счетной машине „Стрела". Приводятся графики, дающие зависимость распределения излучения от параметров задачи. Исследованы предельные случаи.

О. И. Панич

10445. Об использовании функции δ Дирака в классической электродинамике. Зэгэнеску, Торо (Asupra utilizării funcţiei δ a lui Dirac în electrodinamica clasică. Zăgănescu M., Toro T.), Lucrarile ştiinţ. Inst. ped. Timişoara. Mat.-fiz., 1958 (1959), 201—205 (рум.; рез. франц., русск.)

10446. Электрическое поле, индуцированное магнитным полем земли в речных течениях. Бухгольц (Die durch das erdmagnetische Feld im bewegten Wasser eines Flusses induzierten elektrischen Ströme. Buchholz Herbert), Arch. Elektrotechnik, 1958, **44**, № 1, 12—31 (нем.)

Изучается поле электрических токов, индуцируемых магнитным полем земли в движущемся с постоянной скоростью V_z слое воды. Вертикальное сечение водяного слоя берется в форме полуэллипса, причем проводимость грунта принимается не слишком малой по сравнению с проводимостью воды. Основным методом решения является построение функции Грина для двухслойной среды в эллиптических координатах. В отдельности рассматриваются случаи: а) $B_x = 0$, $B_y \neq 0$; б) $B_x \neq 0$, $B_y = 0$ ($\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля земли). Автор показывает, что в последнем случае потенциал результирующего электрического поля представляется как потенциал двойного слоя, расположенного на эллиптической поверхности грунта. Приводятся расчетные формулы для потенциала электрического поля и плотности токов. Проведенное исследование может иметь применение в вопросах предохранения подводных кабелей от коррозии.

В. Б. Гласко

10447. О распространении электромагнитных волн в неоднородной атмосфере. Номура, Такаку (On the propagation of the electromagnetic waves in an inhomogeneous atmosphere I. II. Nomura Yûkichi, Takaku Kôshun), Sci Repts Res. Insts Tohoku Univ. Ser. B. Electr. Commun., 1957, **7**, № 3, 107—148; 1956 (1957), **8**, № 2, 61—96 (англ.)

10448. Задача Рэлея в магнитной гидродинамике: движение магнитного заряда. Ладфорд (Rayleigh's problem in hydromagnetics: the impulsive motion of a pole-piece. Ludford G. S. S.), Arch. Ration. Mech. and Analysis., 1959, **3**, № 1, 14—27 (англ.)

Рассматривается движение несжимаемой вязкой проводящей жидкости в слое, ограниченном плоскостями $y = 0$ и $y = h$, при наличии постоянного магнитного поля H_0, параллельного оси y. Процесс описывается системой уравнений магнитной гидродинамики;

$$\left(\eta \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{\partial H}{\partial t}\right) + H_0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (1)$$

$$A_0^2 \frac{\partial H}{\partial y} + H_0 \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \qquad (2)$$

при начальных и граничных условиях:

$$u(0, y) = u_0, \; H(0, y) = 0, \qquad (3)$$

$$u(t, 0) = \frac{\partial H}{\partial y}(t, 0) = 0, \; u(t, h) = \frac{\partial H}{\partial y}(t, h) = 0, \qquad (4)$$

здесь $u(t, y)$ — скорость жидкости в направлении оси x, $H(t, y)$ — составляющая магнитного поля в направлении оси x, ν — вязкость, $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ — магнитная вязкость, $A_0 = \sqrt{\frac{\mu H_0^2}{\sigma}}$ — альфвеновская скорость. Производя в уравнениях (1) и (2) преобразование Лапласа и учитывая условия (3) и (4), получим следующее выражение для изображений Лапласа:

$$H(p, y) = \frac{H_0 u_0}{p^2} \cdot \frac{mn}{m^2 - n^2} \left[n \frac{\operatorname{sh} m\left(y - \frac{h}{2}\right)}{\operatorname{ch} \frac{mh}{2}} - m \frac{\operatorname{sh} n\left(y - \frac{h}{2}\right)}{\operatorname{ch} \frac{nh}{2}} \right], \qquad (5)$$

$$u(p, y) = \frac{u_0}{p} + \frac{u_0}{p^2 (m^2 - n^2)} \left[n^2 (p - \nu m^2) \frac{\operatorname{ch} m\left(y - \frac{h}{2}\right)}{\operatorname{ch} \frac{mh}{2}} - m^2 (p - \eta n^2) \frac{\operatorname{ch} n\left(y - \frac{h}{2}\right)}{\operatorname{ch} \frac{nh}{2}} \right], \qquad (6)$$

где $m = \sqrt{a + bp} + \sqrt{a + cp}$, $n = \sqrt{a + bp} - \sqrt{a + cp}$, $a = \frac{A_0^2}{4\nu\eta}$, $b = \frac{\left(\sqrt{\eta} + \sqrt{\nu}\right)^2}{4\nu\eta}$, $c = \frac{\left(\sqrt{\eta} - \sqrt{\nu}\right)^2}{4\eta\nu}$. Сначала исследуется случай $h = \infty$. При $\nu = \eta = k$ из формул (5) и (6) получаем: $H(t, y) = \frac{H_0 u_0}{2A_0} \left[-\operatorname{erf}\left(\frac{y - A_0 t}{2\sqrt{kt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y + A_0 t}{2\sqrt{kt}}\right) \right]$, $u(t, y) = \frac{1}{2} u_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y - A_0 t}{2\sqrt{kt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y + A_0 t}{2\sqrt{kt}}\right) \right]$. Если $\nu \neq \eta$, то $u(t, y)$ и $H(t, y)$ не удается выразить в явном виде через известные функции. Автор рассматривает некоторые предельные случаи (например, случай малых ν и η) и получает для $u(t, y)$ и $H(t, y)$ асимптотические формулы с помощью метода перевала. В заключение делаются некоторые замечания о случае, когда h конечно.

Д. П. Костомаров

10449. Совместное использование функции Дирака и интегральных преобразований. Мочалин А. И., Инж.-физ. ж., 1959, **2**, № 10, 76—81 (рез. англ.)

Задача о температурных распределениях u_1 и u_2 в двухслойной среде, возникших в результате действия в момент $t = t_0$ в точке $x = \xi < l$ мгновенного источника тепла плотностью ΔQ, формулируется в виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\Delta Q}{c\rho}\,\delta(x-\xi)\,\delta(t-t_0), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \quad l < x < L, \tag{2}$$

$$u_1(x,t)\mid_{x=0} = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=l}, \tag{4}$$

$$u_2(x,t)\mid_{x=L} = 0, \tag{5}$$

$$u_1(x,t)\mid_{x=l} = u_2(x,t)\mid_{x=l}, \tag{6}$$

$$u_1(x,t)\mid_{t=0} = 0, \tag{7}$$

$$u_2(x,t)\mid_{t=0} = 0. \tag{8}$$

Для того чтобы было возможно применить к уравнениям (1) и (2) преобразование Фурье по x, функции u_1 и u_2 распространяются из областей $[0, l]$ и $[l, L]$ на область $[-\infty, \infty]$, а уравнения (1) и (2) заменяются уравнениями:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\Delta Q}{c\rho}\,\delta(x-\xi)\,\delta(t-t_0) +$$

$$+ A\delta(x)\,\delta(t-t_0) + B\delta(x-l)\,\delta(t-t_0), \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = C\delta(x-l)\,\delta(t-t_0) + D\delta(x-L)\,\delta(t-t_0), \tag{10}$$

где плотности источников A, B, C, D в бесконечной среде эквивалентны действию границ в средах $[0, l]$ и $[l, L]$. Далее задача решается последовательным применением к уравнениям (9) и (10) и условиям (7), (8) преобразования Фурье по x и одностороннего преобразования Лапласа по t. Полученные решения для u_1 и u_2 содержат неизвестные величины A, B, C, D, которые находятся с помощью условий (3)—(6). В. И. Беляев

10450. Задача теплопроводности для неограниченного цилиндра. Мочалин А. И., Инж.-физ. ж., 1959, 2, № 11, 109—113 (рез. англ.)

Задача теплопроводности для неограниченного цилиндра радиуса R, внутри которого в момент времени $t = t_0$ действует источник тепла плотности Q, распределенный на цилиндрической поверхности радиуса $r_1 < R$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{Q}{2\pi r_1}\,\delta(r-r_1)\,\delta(t-t_0), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0, \; u(r,t)\mid_{r=0} < \infty, \tag{2}$$

$$u(r,t)\mid_{r=R} = u_0\delta(t-t_0), \tag{3}$$

$$u(r,t)\mid_{t=0} = 0, \tag{4}$$

решается методом, предложенным ранее автором (реф. 10449). В качестве интегрального преобразования по переменной r применяется преобразование Ханкеля нулевого порядка. В. И. Беляев

10451. Использование интегральных методов при исследовании переходных процессов в теории теплопроводности. Рейнолдс, Долтон (Use of integral methods in transient heat-transfer analysis. Reynolds W. C., Dolton T. A. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1958, № A-248, 29 pp., ill.) (англ.)

Управляющее процессом уравнение записывается в обычной интегральной форме. Приближенное решение ищется в виде функции, зависящей от нескольких параметров. Значения всех параметров, кроме одного, определяются из граничных и начальных условий (при этом могут также привлекаться зависимости, вытекающие из уравнения, записанного в дифференциальной форме). Оставшийся параметр рассматривается как функция времени. Если подставить полученное выражение для искомого решения в уравнение, записанное в интегральной форме, то для оставшегося параметра получается обыкновенное дифференциальное уравнение, которое, вместе с соответствующим начальным условием, полностью его определяет. Метод иллюстрируется на многочисленных примерах, причем полученные приближенные решения очень хорошо аппроксимируют точное решение уже в том случае, когда приближенное решение ищется в виде функции с тремя-четырьмя не зависящими от времени параметрами. Почти все рассматриваемые примеры соответствуют задачам с начальными и граничными условиями для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной и постоянными коэффициентами, однако авторы утверждают, что их метод допускает широкие обобщения. С. С. Дымков

10452. О передаче тепла через вращающееся цилиндрическое тело, расположенное внутри твердого массива. Фарзетдинов М. М., Инж.-физ. ж., 1959, 2, № 10, 82—87 (рез. англ.)

Внутри бесконечного твердого массива равномерно вращается цилиндрическое твердое тело с угловой скоростью ω. На достаточно большом расстоянии от цилиндра задан постоянный по направлению и величине градиент температуры. Задача о температурном распределении в массиве T_l и в цилиндре T относительно неподвижной системы координат записывается в виде

$$\partial T_l/\partial t = a_l \Delta_{r\varphi} T_l, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \varphi}\,\omega = a\,\Delta_{r\varphi} T, \tag{2}$$

$$T_l = T, \quad \frac{\partial T_l}{\partial r} = \frac{\lambda}{\lambda_l}\frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{при } r = R, \tag{3}$$

где $d\varphi/dt = \omega$ — угловая скорость вращения цилиндра. Рассматривается случай, когда температурное поле массива стационарно: $\partial T_l/\partial t = 0$. При этом также будет $\partial T/\partial t = 0$ и нестационарность температурного поля в цилиндре будет обусловлена только его вращением, что учитывается вторым членом в левой части уравнения (2). Предполагается, что цилиндр вращается до тех точно долго и начальные условия не влияют на температурное распределение. Частным решением уравнения (2) в таком случае является функция $\vartheta = J_1\left(\beta_1\sqrt{ir}\right)e^{i\varphi}$, из которой с помощью теоремы сложения получено общее решение уравнения (2). Точное решение уравнений (1), (2), удовлетворяющее условиям (3) и условию $\nabla T_l = a_0 A$ при $r \to \infty$, имеет вид $\vartheta_l = -(\alpha_1\cos\varphi + \alpha_2\sin\varphi)\,r + (c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\,r^{-1}$, $\vartheta = [D_1F_1(\beta r) + D_2F_2(\beta r)]\cos\varphi + [D_2F_2(\beta r) - D_1F_2(\beta r)]\sin\varphi$, где c_1, c_2, D_1, D_2 определяются из условий (3), $-\alpha_1$ — α_2 — проекции единичного вектора a_0 на оси x, y, $F_1 = -J_0(\beta r)I_1(\beta r) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}J_{2n}(\beta r)\,[I_{2n-1}(\beta r) + I_{2n+1}(\beta r)]$, $F_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(\beta r)[I_{2n}(\beta r) + I_{2n+2}(\beta r)]$, где $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2R\sqrt{\omega/a}}$. Анализ полученных решений

показывает, что температурные максимумы на разных расстояниях от оси цилиндра и для различных углов наступают не одновременно, а имеется различие фаз. Радиальный тепловой поток не совпадает с температурными колебаниями ни по амплитуде, ни по фазе, а азимутальный тепловой поток отстает от температурных колебаний на $\pi/2$. Среднее значение радиального теплового потока по горячей или холодной части стенок (за время полупериода) зависит от числа Фурье $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{Fo}}$. Б. И. Беляев

10453. Анализ прогрева тел под действием лучистого тепла на основе теории подобия. Бойков Г. П., Изв. Томского политехн. ин-та, 1958, **101**, 42—46

Математическая задача о прогреве тел под действием лучистого тепла сводится к решению уравнения

$$\frac{d\lambda}{dT}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\right] + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}\left(T\frac{dc}{dT} + c\right),$$

с начальным условием: $T = T_0$ при $\tau = 0$, и условием на поверхности тела $\sigma\left[\left(\frac{T_c}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_n}{100}\right)^4\right] = \lambda\frac{\partial T_n}{\partial x}$. Здесь $\lambda = f_\lambda(T; T_0; \lambda_0)$; $c = f_c(T; T_0; c_0)$.

Методами теории подобия определены критерии, характеризующие процесс, и установлено, что качественная зависимость безразмерной температуры остается одной и той же как для процессов с переменными, так и для процессов с постоянными теплофизическими характеристиками. В. И. Беляев

10454 К. Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. Ч. 2. Честнат Г., Майер Р. Перев. с англ. М.—Л., Госэнергоиздат, 1959, 392 стр., илл., 13 р. 25 к.

См. также: 9874, 9909, 9910, 9911, 10155, 10474, 10475, 10517, 10518, 10537, 10564, 10569—10573, 10669, 10756, 10757, 10920, 10921, 10923, 10925—10927, 10929—10941

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

10455. Интегральные уравнения с двумя переменными пределами. Германеско (Equations intégrales aux deux limities variables. Ghermanesco Miche!), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 17, 1606—1607 (франц.)

Показывается, что хотя в некоторых случаях уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-x}^{x} k(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x) \qquad (1)$$

сводится к интегральному уравнению с одним переменным пределом интегрирования, но вообще свойства уравнений (1) не совпадают со свойствами линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Так, например, уравнения вида $\varphi(x) = \lambda\int_{-x}^{x} k(s)\varphi(s)\,ds + f(x)$ могут иметь собственные значения. Ю. К. Ландо

10456. Об интегральном уравнении $kf(x) = \int_1^n (x+y)^{-1} f(y)\,dy$. Сойер (On the integral equation $kf(x) = \int_1^n (x+y)^{-1} f(y)\,dy$. Sawyer W. W.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 4, 451—453 (англ.)

Показано, что множество собственных функций интегрального уравнения $kf(x) = \int_1^n (x+y)^{-1} f(y)\,dy$ совпадает с множеством собственных функций задачи Штурма—Лиувилля для уравнения Гейна $L_x f(x) = \frac{d}{dx}\{(x^2-1)(n^2-x^2)f'(x)\} + (B - 2x^2)f(x) = 0$ при граничных условиях: $f(0)$ и $f(n)$ ограничены. Другие интегральные уравнения, связанные с уравнением Гейна, но содержащие ядра более сложного вида, рассматривались ранее в работе Эрдейи (Erdélyi A., Quart. J. Math., 1942, ser. 2, **13**, 107—112). Н. Н. Лебедев

10457. Об одном методе решения интегральных уравнений. Положий Г. Н., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1959, **23**, № 2, 295—312

Уравнение $L\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds - \mu\varphi(x) = F(x)$, где $B^2 = \int_a^b\int_a^b |K(x, s)|^2 dx\,ds < \infty$, $\int_a^b |F(x)|^2 dx < \infty$ и μ не есть собственное число ядра K, заменяется равносильным уравнением

$$\psi(x) = P\psi + \frac{2}{\sigma}F^*(x), \qquad (1)$$

в котором $\psi(x) = \varphi(x) + \mu^{-1}F(x)$, $P\psi = \psi(x) - 2\sigma^{-1}L^2\psi$, $F^*(x) = \int_a^b [\mu^{-1}K_2(x, s) - K(x, s)]\,F(s)\,ds$ и σ — любое число большее, чем $(B + |\mu|)^2$. Доказывается сходимость последовательных приближений для уравнения (1) при единственном ограничении, что μ не есть собственное значение ядра $K(x, s)$, если за начальное приближение взята функция $2\sigma^{-1}F^*(x)$. Прием распространен на уравнения первого рода и на уравнения с несимметричным ядром. С. Г. Михлин

Примечание редакции. Аналогичные результаты, но только для интегральных уравнений первого рода были получены В. М. Фридманом (РЖМат, 1956, 8884). Результаты М. А Красносельского и С. Г. Крейна (РЖМат, 1958, 8913) относятся к системам линейных алгебраических уравнений с положительно определенными матрицами.

10458. Об интегральных линейных уравнениях Вольтерра второго рода с ядром, зависящим от разности аргументов. Пиконе (Sur les équations intégrales linéaires de deuxième espèce de Volterra avec noyau de translation. Picone Mauro), C. r. Acad. sci., 1960, **250**, № 1, 46—48 (франц.)

Рассматривается система уравнений:

$$f(x) + \int_{x_0}^{x} k(x - y)\,u(y)\,dy = u(x), \qquad (1)$$

где матрица $f(x)$ и квадратная матрица $k(x)$ — функции действительного переменного x с комплексными элементами. Если матрицы $f(x)$ и $k(x)$ суммируемы по Лебегу в интервале $(0, \mu)$, то методом последовательных приближений доказывается, что в интервале $(x_0, x_0 + \mu)$ существует единственное решение системы (1) $u(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} h(x - y)\,f(y)\,dy$ и матрица $h(x)$ суммируема в интервале $(0, \mu)$. Последний результат справедлив для $x_0 = -\infty$ и $\mu = +\infty$, если существует

положительная суммируемая в интервале $(0, +\infty)$ функция $F(x)$ такая, что для любого номера n справедливо неравенство $\left|\sum_{l=0}^{n} k_l(x)\right| \leqslant F(x)$, где $k_l(x)$ — итерации ядра $k(x)$. Приводятся достаточные условия для применения операционного исчисления к системе (1).
Ю. К. Ландо

10459. Об особых решениях возмущенного линейного интегрального уравнения. Маркман В. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 104—110

Выясняются условия, при которых уравнение вида $\varphi(x) = \int_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x) + \mu^2 \int_0^1 [A_0(x, s) + A_1(x, s)\,\varphi(s) + A_2(x, s)\,\varphi^2(s)]\,ds$, где $K(x, s)$ — регулярная в квадрате $0 \leqslant x, s \leqslant 1$ функция, $f(x)$, $A_i(x, s)$, $i = 0, 1, 2$ — непрерывные функции своих аргументов, и μ — достаточно малый параметр, допускает особые решения.
А. А. Темляков

10460. Об одном интегральном уравнении. Василенко (Про одне інтегральне рівняння. Василенко О. Ю., Доповіді АН УРСР, 1959, № 9, 941—944 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение $f^2(\xi) = Af \equiv \int_\xi^1 K(\xi, \xi_1)\,f(\xi_1)\,d\xi_1$, $0 < \xi \leqslant \xi_1 \leqslant 1$, встречающееся в теории неустановившегося движения грунтовых вод. Предполагается, что $K(\xi, \xi_1)$ и $K'_\xi(\xi, \xi_1)$ непрерывны по совокупности аргументов в области $0 < \xi \leqslant \xi_1 \leqslant 1$, $K(\xi, \xi_1)$ может обращаться в бесконечность при $\xi = 0$ и $K'_\xi(\xi, \xi_1) < 0$. При помощи принципа неподвижной точки доказывается существование единственного решения в классе положительных непрерывных и убывающих функций $f(\xi)$, $0 < \xi \leqslant 1$, для которых $f(1) = 0$.
М. М. Вайнберг

10461. О решении одного интегрального уравнения. Василенко (Про розв'язок одного інтегрального рівняння. Василенко О. Ю.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 11, 1184—1188 (укр.; рез. русск., англ.)

Для нахождения решения уравнения

$$f^2 = Af, \qquad (1)$$

рассмотренного в реф. 10460, предлагаются итерационные процессы: 1) $f_{n+1}^2 = Af_n$ и 2) $f_{n+1} = \frac{1}{2}(f_n + f_n^{-1} Af_n)$. Для доказательства сходимости этих процессов рассматриваются функции $\theta_n(\xi)$ такие, что $f_n = \theta_n f$, где f — решение уравнения (1). После подстановки $\theta_n f$ и $\theta_{n+1} f$ в 1) и 2) получаются рекуррентные формулы для θ_n, из которых следует, что $\theta_n \to 1$ при $n \to \infty$.
М. М. Вайнберг

10462. Исследование линейных сингулярных интегральных уравнений в L_2. Абдинова А. Б., Аспирантларын елми эсэрлэри. Азэрб. унив., Научн. тр. аспирантов. Азерб. ун-т, 1957, вып. 1, 15—21 (рез. азерб.)

Исследуется нелинейное сингулярное интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi[x, s, u(s)]\,\operatorname{ctg}\frac{s - x}{2}\,ds \qquad (1)$$

в классе функций, суммируемых с квадратом. Применением принципа сжатых отображений доказывается существование и единственность решения в $L_2(-\pi, \pi)$.
А. И. Гусейнов

10463. О существовании неподвижной точки при отображении Абель-Лиувиллевского типа. Дингхас (Zur Existenz von Fixpunkten bei Abbildungen vom Abel-Liouvilleschen Typus. Dinghas Alexander), Math. Z., 1958, 70, № 2, 174—189 (нем.)

Рассматривается нелинейное уравнение

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x - t)^{\mu - 1} f(t, y(t))\,dt \quad (0 < \mu < 1), \qquad (1)$$

где $f(t, x)$ — непрерывная функция в некотором прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ $(0 < a, b < +\infty)$.

Теорема 1. Пусть

$$x^\mu |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \Gamma(\mu + 1)\,|y_1 - y_2|. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) может иметь не более одного решения. Доказательство основано на следующей интересной лемме.

Лемма 2. Пусть $u(x)$ непрерывна при $0 < x \leqslant a$ и 1) $u(x) \geqslant 0$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} u(x)\,x^{-\alpha} = 0$ $(0 \leqslant \alpha < \mu,\ 0 < \mu < 1)$; 3) $u(x) \leqslant \mu \int_0^x (x - t)^{\mu - 1}\,t^{-\alpha}\,u(t)\,dt$. Тогда $u(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant a$. Конструируется пример, показывающий, что множитель $\Gamma(\mu + 1)$ в неравенстве (2) точный. Далее методом последовательных приближений устанавливается существование решения при выполнении условия (2). Оказывается, что и тут постоянная $\Gamma(\mu + 1)$ является точной: при большей постоянной последовательные приближения могут расходиться. Дальнейшие обобщения основаны на следующем утверждении:

Лемма 3. Пусть непрерывная неотрицательная функция $u(x)$ удовлетворяет неравенствам $u(x) \leqslant A\mu \int_0^x (x - t)^{\mu - 1}\,u(t)^\alpha\,dt$, $B\left(\mu, \frac{\mu\alpha}{1 - \alpha} + 1\right) u(x) \leqslant (1 - \varepsilon) \int_0^x (x - t)^{\mu - 1}\,t^{-\mu}\,u(t)\,dt$ $(0 < \varepsilon < 1)$ при некоторых $0 \leqslant \alpha < 1$ и $A \geqslant 0$. Тогда $u(x) \equiv 0$.

Отсюда вытекает

Теорема 4. Пусть $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant A\Gamma(\mu + 1) \times |y_1 - y_2|^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$,

$$x^\mu |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant (1 - \varepsilon)\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{1 - \alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu\alpha}{1 - \alpha} + 1\right)}\,|y_1 - y_2|$$

Тогда уравнение (1) не может иметь более одного решения. Доказывается, что при этих условиях сходится метод последовательных приближений, и строится пример, показывающий, что постоянные в неравенствах не могут быть улучшены.
П. Е. Соболевский

10464. Обобщенная система нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Абдинова А. Б., Елми эсэрлэр. Азэрб. унив. Физ.-ријазијјат в кимја сер. Уч. зап. Азерб. ун-та. Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 3, 25—34 (рез. азерб.)

Рассматривается близкая к линейной система нелинейных одномерных сингулярных интегральных уравнений. Предполагается, что в систему входят не только неизвестные функции $\mu_k(t_0)$ и сингулярные интегралы от них, но также функции $\mu_k(\alpha_k(t_0))$ и сингулярные интегралы, в которых знаменатель $t - t_0$ заменен на $t - \alpha_k(t_0)$. Здесь $\alpha_k(t_0)$ — гладкие функции, каждая из которых реализует взаимно однозначное отображение контура интегрирования L на себя с сохранением направления обхода. Допускается, что в уравнение могут входить также и комплексно-сопряжен-

ные функции $\overline{\mu_k(t)}$. Присоединив к данной системе уравнения, полученные из данных переходом к комплексно-сопряженным величинам, автор записывает полученную таким образом новую систему в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left\{A_\nu(t_0)\rho(a_\nu(t_0))+B_\nu(t_0)\rho(t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_\nu(t_0,t)}{t-a_\nu(t_0)}\rho(t)\,dt+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{H_\nu(t_0,t)}{t-t_0}\rho(t)dt\right\}=F(t_0).$$

Здесь ρ и F — векторы с составляющими $\mu_1,\ldots,\mu_n$, $\overline{\mu_1},\ldots,\overline{\mu_n}$ и $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$, $\overline{\Phi_1},\ldots,\overline{\Phi_n}$ соответственно, причем Φ_k суть нелинейные сингулярные интегральные операторы. Далее A_ν, B_ν, H_ν, K_ν — некоторые матрицы, зависящие только от данных задачи. Предполагается, что $K_\nu(t,\alpha_\nu(t))=A_\nu(t)$, $H_\nu(t,\alpha_\nu(t))=-B_\nu(t)$, и что определители матриц $A_\nu(t)$ и $B_\nu(t)$ нигде на L в нуль не обращаются. Автор рассматривает только случай $n=1$ и, применяя хорошо известные методы, формулирует и доказывает некоторые теоремы о существовании и числе решений рассматриваемой системы.

С. Г. Михлин

10465. Каскадная теория ливней. Беленький С. З., Иваненко И. П., Успехи физ. наук, 1959, **69**, № 4, 591—656

Систематический обзор методов решения интегро-дифференциальных уравнений каскадной теории электронно-фотонных ливней

$$\frac{\partial P}{\partial t}=L_1[P,\Gamma]-\beta\frac{\partial P}{\partial E}+S_P(t,E),$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=L_2[P\Gamma]+S_\Gamma(t,E) \qquad (1)$$

с краевыми условиями $P\mid_{t=0}=\varphi_P(E)$, $\Gamma\mid_{t=0}=\varphi_\Gamma(E)$, где L_1 и L_2 — интегральные операторы,

$$L_1=2\int_E^\infty\Gamma(t,E')W_p(E',E)\,dE'+$$

$$+\int_E^\infty P(t,E')W_e(E'-E)dE'-\int_0^E P(t,E')W_e(E,E')dE';$$

$$L_2=\int_E^\infty P(t,E')W_e(E',E)\,dE'-\int_0^E\Gamma(t,E)W_p(E,E')dE',$$

$P(t,E)$, $\Gamma(t,E)$ — соответственно средние числа электронов и фотонов в интервале энергий $E, E+dE$ на глубине t, S_p, S_Γ — заданные функции, характеризующие интенсивности инициирования электронов и фотонов внешним источником. Дано подробное изложение методов решения (1) с помощью функциональных преобразований (Лапласа и Мелина), а также путем восстановления P и Γ по моментам различных порядков. Приведено большое число результатов расчетов, проведенных этими методами.

Ю. С. Саясов

10466. Разложение по собственным функциям интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Нерсесян А. Б., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 3, 511—514

Рассматривается краевая задача типа Штурма—Лиувилля для уравнения $-y''+\sum_{i=1}^{m}q_i(x)\,y(x-\Delta_i(x))+$

$+\int_0^x K(x,t)\,y(t)\,dt=0$, где $\Delta_i(x)\geqslant 0$, $\Delta_i(l)<l$, $\Delta_i'(x)<$

$<\Theta<1$ $(i=1,2,\ldots,m)$, $0\leqslant x\leqslant l$. Действительные непрерывные функции $q_i(x)$ удовлетворяют условию $q_i(x)\equiv 0$ при $x-\Delta_i(x)<0$ $(i=1,2,\ldots,m)$, $\int_0^l\int_t^l|K(t_1,t)|\,dt_1dt<+\infty$, $y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0$, $y(l)\cos\beta+y'(l)\sin\beta=0$. Изучается асимптотика собственных значений и собственных функций. Рассматривается другая краевая задача, называемая автором сопряженной, и с помощью собственных функций исходной и сопряженной задач строится биортогональная на $(0,l)$ система функций $y_k(x)$, $z_p(x)$ $(k,p=1,2,\ldots)$, после чего формулируется теорема о разложении: при $\sin\alpha\neq 0$ и $\sin\beta\neq 0$ для любой интегрируемой в смысле Лебега на $(0,l)$ функции $f(x)$ $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}y_k(x)\int_0^l f(t)z_k(t)\,dt-\frac{1}{l}\int_0^l f(t)dt-\right.$

$\left.-\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt\right\}=0$ равномерно на $(0,l)$.

Л. Э. Эльсгольц

10467. К вопросу о существовании почти периодических решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Артюшенко Л. М. В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 3—6

Изучаются условия существования почти периодических решений в смысле Бора системы интегро-дифференциальных уравнений

$$dz/dx=A(x)\,z(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\,F(t,z(t))\,dt+\varphi(x), \qquad (1)$$

где $A(x)=(a_{ik}(x))^n$, $K(x,t)=(K_{ik}(x,t))^n$ — заданные почти периодические по x равномерно относительно $a\leqslant t\leqslant b$ n-квадратные матрицы; $\varphi(x)$, $F(t,z)$ — заданные, а $z(x)$ — искомая n-строчные столбцовые матрицы. В предположении, что $\varphi(x)$ — почти периодическая n-строчная столбцовая матрица, а $F(t,z)$ — непрерывная на $a\leqslant t\leqslant b$ функция, удовлетворяющая по аргументу z условию Липшица $\|F(t,u)-F(t,v)\|\leqslant\alpha(t)\|u-v\|$, $-\infty<u,v<+\infty$, где $\alpha(t)$ — интегрируемая на $[a,b]$ положительная функция, приводятся без доказательств три теоремы, устанавливающие при известных условиях существование и единственность почти периодического решения системы (1) при малых значениях параметра λ (первая теорема), аналитического в окрестности точки $\lambda=0$ (вторая теорема), аналитического в окрестности точки λ_0 (третья теорема), причем в последних двух теоремах предполагается, что функция $F(t,z)$ — аналитическая по переменной z. Для систем вида $du/dx=$

$=Au+\int_0^x K(x-s)\,u(s)\,ds+f(x)$, заданных в матричной форме, достаточные условия для существования почти периодических решений были выведены В. Я. Быковым (РЖМат, 1959, 482).

В. В. Васильев

10468. Об области сходимости голоморфного решения нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений. Мисник В. П. В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 28—30

Изучается система интегро-дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt=f_s(t,\mu,x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\mu\int_0^t K_s(t,\tau,\mu,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')\,d\tau+$$

$$+\mu\int_0^1 R_s(t,\tau,\mu,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')\,d\tau \qquad (1)$$

$(s=1,2,\ldots,n)$, удовлетворяющая начальным условиям $x_s\mid_{t=0}=\beta_s$. В работе автора (РЖМат, 1960, 6611) методом мажорирующих рядов было показано, при опре-

деленных условиях, налагаемых на функции f_s, K_s, R_s, существование и единственность решения системы (1), голоморфного относительно начальных данных $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и параметра μ в некоторой окрестности точки $\beta_1 = \ldots = \beta_n = \mu = 0$, обращающегося в нуль при $\beta_1 = \ldots = \beta_n = \mu = 0$. В настоящей работе доказывается, что решение системы (1) и производная от этого решения, найденные в виде рядов по начальным данным $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и параметру μ, сходятся в области, определяемой неравенствами

$$r < \mu < r - \sqrt{ghNr},\ T < \frac{r - nN}{n^2NVz\,(1 + a^*n)},$$

$$|\beta_1 + \cdots + \beta_n| < \rho.$$

Значение большинства постоянных, входящих в эти неравенства, объяснены в цитированной выше работе автора. В. В. Васильев

10469. О точном решении уравнения передачи для модели Милна — Эддингтона: консервативное серое изотропное рассеяние. Дас-Гупта (On the exact solution of transfer equation in the Milne-Eddington model: conservative, grey isotropic scattering. Das Gupta Santi Ranjan), Indian J. Theoret. Phys., 1958, 6, № 2, 39—50 (англ.)

Исследование серого изотропного рассеяния радиации во внешних слоях звезды приводит к решению системы $\mu \frac{d}{dt} I(t, \mu) = I(t, \mu) - J(t)$, $J(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(t, \mu)\, d\mu$, при условии $I(0, -\mu) = 0$, $0 < \mu \leqslant 1$. К решению применяется преобразование Карсона, причем $J(t) \doteqdot \bar{J}(s)$, $\bar{J}\left(\frac{1}{z}\right) = CH(z)$, и составляется интегральное уравнение для $H(z)$, которое решается в явной форме:

$$H(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{D(-z)}{L(z)}, \qquad (1)$$

где $L(z) = 1 - z \ln \frac{1+z}{z}$, а $D(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\ln D(z) = \int_0^1 \frac{\psi(x)}{x - z}\, dx, \qquad (2)$$

$\psi(x)$ — заданная элементарная, но довольно сложная функция. Чтобы вычислить интеграл (2), $\psi(x)$ заменяется на многочлен $f(x)$ степени m. Подставляя полученное выражение в (1) и выполняя обратное преобразование, автор получает асимптотическое представление $J(t)$ при $t \to \infty$: $J(t) \sim C(b_1 + t)$. Проводятся численные расчеты при $m = 4$ и сравниваются значения b_1 и многочлена $H(z)$ при $z \in [0, 1]$ с результатами, полученными другими авторами. Э. Я. Риекстыньш

10470. О точном решении уравнения передачи для модели Милна — Эддингтона; рассеяние согласно фазовой функции Релея. Дас-Гупта (On the exact solution of transfer equation in the Milne — Eddington model: scattering according to Rayleigh phase function. Das Gupta Santi Ranjan), Indian J. Theoret. Phys., 1958, 6, № 3, 77—84 (англ.)

Продолжая свои исследования о рассеянии радиации во внешних слоях звезды для модели Милна — Эддингтона, автор в настоящей работе рассматривает рассеяние согласно фазовой функции Релея. Решение приводится к системе более сложной, чем в предыдущей работе (реф. 10469), но идеи и методы решения остаются такими же. И в этом случае асимптотическим выражением при $t \to \infty$ для средней интенсивности $J(t)$ служит линейная функция от оптической глубины t. Э. Я. Риекстыньш

10471. Некоторые задачи теории диффузии нейтронов. Бич, Шапиро, О'Рорк, Фост, Лепсон (Solutions of the constant velocity transport problem. Beach L. A., Shapiro P., O'Rourke R. C., Faust W. R., Lepson B.), Nucl. Sci. and Engng, 1959, 6, № 1, 66—75 (англ.)

Дано решение задачи о диффузии моноэнергетических нейтронов в бесконечном однородном пространстве при следующих предположениях: 1) нейтроны генерируются в плоскости $\tau = 0$ (τ — расстояние, отсчитываемое по нормали к генерирующей плоскости); 2) сечения поглощения σ_a и рассеяния σ_s постоянны во всем объеме вещества; 3) рассеяние нейтронов частицами среды носит изотропный характер. При этих условиях уравнение переноса имеет вид

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} + I = \frac{\varkappa}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau, \mu')\, d\mu' + \delta(\tau) f(\mu), \qquad (1)$$

где μ — косинус угла между нормалью к генерирующей плоскости и направлением скорости нейтрона, I — число нейтронов, отвечающее интервалу $\mu, \mu + d\mu$ и глубине τ, $\varkappa = \sigma_s/(\sigma_s + \sigma_a)$, $f(\mu)$ — функция, характеризующая угловое распределение первичных нейтронов, генерируемых в плоскости $\tau = 0$. Решение (1), найденное с помощью преобразования Лапласа, имеет вид

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}(\alpha, \mu)\, e^{i\alpha\tau}\, d\alpha, \qquad (2)$$

$$\bar{I} = \frac{f(\mu)}{1 + i\alpha\mu} + \frac{\varkappa}{2}\,\frac{\alpha\int_{-1}^{1} f(\mu)/(1 + i\alpha\mu)\, d\mu}{(1 + i\alpha\mu)\,(\alpha - \varkappa \operatorname{Arth}\alpha)}.$$

Приводятся результаты численных расчетов (выполненных на электронной машине) величины $I_0(\tau) = \int_{-1}^{1} I d\mu$ при различных значениях $\varkappa$ и при трех различных предположениях относительно функции $f(\mu)$: 1) $f(\mu) = 1$, 2) $f(\mu) = \delta(1 - \mu)$, 3) $f = \delta(1 - \mu) + \delta(1 + \mu)$. Найдены также асимптотические выражения функций $I_0(\tau)$, отвечающие достаточно большим τ, которые имеют вид $I_0 \sim ae^{-k_0\tau}/\varkappa + k_0^2 - 1$ ($a = 2k_0(1 - k_0^2)/\varkappa$ при $f = 1$, $a = k_0(1 + k_0)$ при $f = \delta(1 - \mu)$ и $a = 2k_0$ при $f = \delta(1 - \mu) + \delta(1 + \mu)$), k_0 — некоторая табулированная функция параметра $\varkappa$, возрастающая при $\varkappa \to 1$. Ю. С. Саясов

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

10472. О некоторых функциональных пространствах и их приложениях к вариационным задачам. Гельман И. В., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 4, 547—550

Для пространств $F_M^{(l)}$ (РЖМат, 1960, 6615) формулируются теоремы вложения и теоремы о полной непрерывности оператора вложения, полностью обобщающие аналогичные теоремы Соболева-Кондрашова для пространств $W_p^{(l)}$, в которые переходят пространства $F_M^{(l)}$ при $M(u) = |u|^p/p$. Указаны

приложения к исследованию некоторых нелинейных функционалов. М. А. Красносельский

10473. К теории некоторых геометрических функционалов и соответствующие изопериметрические задачи. Закс (Zur Theorie gewisser geometrischer Funktionale und zugehöriger isoperimetrischer Probleme. Sachs Horst), Wiss. Z. Martin—Luther—Univ. Halle-Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1959, 8, № 3, 357—364 (нем.)

Функционал $I(C)$, определяемый на геометрических объектах C, называется геометрическим, если он инвариантен относительно движений C и при подобном преобразовании C в λC $I(\lambda C) = \lambda^a I(C)$, где a — постоянная. Указываются различные условия, характеризующие геометрические функционалы. Рассматривается задача о минимуме $I(C)$ при условии $I(C_0) = \text{const}$ для двух геометрических функционалов I и I_0. Приведены примеры. А. В. Погорелов

10474. Новый метод решения граничных задач математической физики. Шулешко (A new method of solving boundary value problems of mathematical physics. Shuleshko P.), Austral. J. Appl. Sci., 1959, 10, № 1, 1—8 (англ.)

Предлагается вариационный метод решения линейных дифференциальных уравнений, являющийся обобщением метода моментов. Решение уравнения $L(w) - f = 0$ в области R с граничными условиями $M_p(w) - \varphi_p = 0$ $(p = 1, 2, \ldots, l)$ на контуре S ищется в виде ряда $w = \sum_{m=1}^{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} u_{mn} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n$, где $\{u_{mn}\}$, $\{v_n\}$ — полные системы функций, коэффициенты a_{mn} и b_n определяются уравнениями ортогонализации $\int_R [L(w) - f] v_q^* dr = 0$ $(q = 1, 2, \ldots)$ и $\int_S [M_p(w) - \varphi_p] u_{pq}^* ds = 0$ $(p = 1, 2, \ldots, l)$, $v_q^* = L^*(v_q)$, $u_{pq}^* = M_p^*(u_{pq})$, а старшие члены операторов L^* и M_p^* совпадают со старшими членами L и M_p соответственно. Сходимость метода не рассматривается. Е. Д. Гарбер

10475. Обобщение предыдущих методов решения граничных задач математической физики. Шулешко (Generalization of previous methods of solving boundary value problems of mathematical physics. Shuleshko P.), Austral. J. Appl. Sci., 1959, 10, № 1, 9—16 (англ.)

Обобщается ряд прямых методов математической физики. Обобщенный метод наименьших квадратов совпадает с методом ортогонализации (реф. 10474) при $L^* = L$, $M_p^* = M_p$. Обобщенный метод ортогонализации сводится к разбиению области R на несколько областей R_j с выбором различных систем $\{u_{mnj}\}$ и $\{v_{nj}\}$. Обобщенный метод совмещения сводится к удовлетворению дифференциального уравнения и граничных условий в фиксированных точках R и контура S. Е. Д. Гарбер

10476. Сверхзвуковые крылья минимального сопротивления обеспечивающие заданный запас устойчивости. Булыгина Е. В., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1959, № 1, 3—9

В рамках линейной теории рассматривается обтекание цилиндрического крыла заданной формы в плане с образующими, перпендикулярными к направлению скорости набегающего потока. Ставится задача о нахождении крыла с минимальным волновым сопротивлением при заданной подъемной силе и заданном моменте. Вариационная задача состоит в отыскании функции от одной независимой переменной, реализующей минимум некоторого интеграла на заданном интервале при двух изопериметрических условиях. Задача является вырожденной. Ввиду отсутствия граничных условий она разрешима. Решение найдено в явном виде. Найдена форма крыла и проведены подробные расчеты характеристик треугольных и трапециевидных крыльев. Ю. Д. Шмыглевский

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редакторы *В. В. Немыцкий, В. К. Захаров*

10477. Общее определение сходимости, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости. Абиян (A general definition of convergence, continuity, differentiability and integrability. Abian Smbat), Math. Ann., 1957, 134, № 1, 93—94 (англ.)

Приводятся абстрактные определения сходимости, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости. Л. М. Абрамов

10478. Замечание к статье Андерсена. Гулд (Note on a paper of Sparre Andersen. Gould H. W.), Math. scand., 1958, 6, № 2, 226—230 (англ.)

Доказывается следующее утверждение:

Пусть $F(k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(j)$, x — действительное число, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{x}{k} F(k) =$$

$$= (-1)^a \binom{x-1}{a} \sum_{j=0}^{a} (-1)^j \binom{a}{j} \frac{x}{x-j} f(j). \qquad (1)$$

При $f(j) = \binom{-x+j}{n}$ и $f(j) = \binom{1-x+j}{n}$ формула (1) приводит к двум тождествам, полученным Андерсеном (РЖМат, 1954, 4458). М. Н. Оловский

10479. Замечание об углах в n-мерном симплексе. Гинан (A note on the angles in an n-dimensional simplex. Guinand A. P.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1959 4, № 2, 58—61 (англ.)

Три различных множества уравнений, связывающих суммы углов в n-мерном симплексе, были даны Соммервилем (Sommerville D. M. Y., Proc. Roy. Soc. London, 1927, A115, 103—119), Хёном (РЖМат, 1954, 4572К) и Пешлем (РЖМат, 1957, 8868). Эквивалентность первых двух множеств уравнений была доказана Спроттом (Sprott D. A., Math. Gaz., 1956, 40, 207—209).

Автор показывает, что результаты упрощаются, если вместо сумм рассматривать средние, и что средние образуют последовательность, двойственную себе относительно преобразования

$$q_s = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r \binom{s}{r} p_r.$$

Эквивалентность множества уравнений легко доказывается символическим методом.

10480. Некоторые свойства скаляров одной специальной матрицы Якоби. Рашкович (Неке особине скалара једне специјалне јакобијеве матрице. Рашковић Данило), Зб. радова. Српска АН, 1959, кн. 63, 99—106 (сербо-хорв.; рез. франц.)

10481. О некоторых неравенствах. Попович (Asupra unor inegalităţi. Popoviciu Tib.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 8, 451—461 (рум.; рез. русск., франц.)

В части I дается новое доказательство неравенства Ацела (РЖМат, 1957, 8704) $(a_0 b_0 - \sum a_i b_i)^2 \geqslant (a_0^2 - \sum a_i^2)(b_0^2 - \sum b_i^2)$ и рассматриваются неравенства, соответствующие неравенствам Гёльдера и Минковского. В части II рассматриваются некоторые обобщения неравенства Чебышева $\frac{\sum a_i b_i}{n} \geqslant \frac{\sum a_i}{n}\frac{\sum b_i}{n}$. Даются необходимые и достаточные условия для выполнения неравенств $\left(\sum \lambda_i\right)\left(\sum \lambda_i a_i b_i\right) \geqslant \left(\sum \lambda_i a_i\right) \times \left(\sum \lambda_i b_i\right)$ и $\sum \varepsilon_i a_i b_i \geqslant \left(\sum \varepsilon_i a_i\right)\left(\sum \varepsilon_i b_i\right)$ для неубывающих, соответственно неотрицательных и невозрастающих последовательностей. Резюме автора

10482. Замечание о предположении Морделла. Цулауф (Note on a conjecture of L. J. Mordell. Zulauf A. von), Abhandl. Math. Semin. Hamburg, 1958, 22, 240—241 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые неотрицательные числа и

$$R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1/(x_2 + x_3) + x_2/(x_3 + x_4) + \ldots + x_{n-1}/(x_n + x_1) + x_n/(x_1 + x_2),$$

причем предполагается, что ни один из знаменателей не равен нулю. Морделл (РЖМат, 1959, 7040) предположил, что неравенство

$$R_n \geqslant \frac{1}{2}\, n, \qquad (1)$$

справедливое для $2 \leqslant n \leqslant 6$, не имеет места для всех $n \geqslant 7$. Автор показывает, что неравенство (1) действительно неверно для всех четных $n \geqslant 14$. В. К. Захаров

10483. О предположении Морделла. II. Цулауф (On a conjecture of L. J. Mordell, II. Zulauf A.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 345, 182—184 (англ.)

Пусть $\mu(n)$ есть точная нижняя грань $R_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2}$ для $x_k \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Морделл (РЖМат, 1959, 7040) предположил, что $\mu(n) < n/4$ для $n \geqslant 7$. Известно (Rankin R. A., Mat. Gaz., 1958, 42, № 339, 39—40; реф. 10432), что это неравенство действительно справедливо для всех четных $n \geqslant 14$ и для всех достаточно больших нечетных n.

Автор доказывает, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{n} < \frac{1}{2} - 49{,}683 \times 10^{-8} = 0{,}49950317$ и $\mu(n) < \frac{n}{2}$ для всех нечетных $n \geqslant 53$.

10484. Логарифмические и экспоненциальные функции (прямой подход). Сибек, Хаммел (Logarithmic and exponential functions. (A direct approach). Seebeck C. L., Jr, Hummel P. M.), Math. Teacher, 1959, 52, № 6, 439—443 (англ.)

10485. Применение формулы Стирлинга. Зейтлин (An application of Stirling's formula. Zeitlin David), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 8, 718—719 (англ.)

10486. Заметка о формуле Стирлинга. Нанджундиа (Note on Stirling's formula. Nanjundiah T. S.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 8, 701—703 (англ.)

10487. О теореме Энестрома — Какейя. Винце (Az Eneström — Kakeya tételről. Vincze István), Mat. lapok, 1959, **10**, № 1-2, 127—132 (венг.; рез. русск., англ.)

Теорема Энестрома — Какейя обобщается на случай комплексных коэффициентов. Доказывается следующая теорема:

Если комплексные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ записываются в в виде $a_k = a_k e^{i\varphi} + b_k e^{i\psi}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, где $|\varphi - \psi| < \pi$ и $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, то уравнение $a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = 0$ не имеет корня внутри круга радиуса $\rho_0 = \frac{|a_0|}{a_0 + b_0} \geqslant \left|\cos\frac{\varphi - \psi}{2}\right|$. Из резюме автора

10488. Аналитическое выражение для $[X]$ Поргес (An analytical expression for $[X]$. Porges Arthur), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 8, 706—707 (англ.)

Доказывается теорема: Для любого конечного X, $[X]$ (целая часть X) можно выразить по формуле $[X] = X - |F(X) + 2^{1-G(X)} - 1|$, где $F(X) = \frac{\operatorname{Arc\,sin}|\sin \pi X|}{\pi}$, $G(X) = \lim_{N\to\infty} \{1 + |\sin \pi (X - F(X))|\}^N$.

10489. О формулах среднего. Цугуля (Cu privire la teoremele mediei. Tugulea V.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 5, 294 (рум.; рез. русск., франц.)

Дается единый метод доказательства формулы конечных приращений и формулы Коши. Резюме автора

10490. Об одном классе интегралов. Ангелуцэ (Asupra unei clase de integrale. Angheluţă Th.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj, Cluj, 1959, 21—28 (рум.; рез. русск., франц.)

Вычисляются интегралы

$$I_m = \int_0^1 \frac{(\log x)^m}{1 - x}\, dx, \qquad (1)$$

$$K_m = \int_0^1 \frac{(\log x)^m}{1 + x}\, dx. \qquad (2)$$

Значение интеграла (2) вычисляется: а) с помощью чисел Бернулли, применяя разложение в степенной ряд в двух различных видах функции $z\operatorname{ctg} z$, и б) с помощью теории вычетов. Между интегралами (1) и (2) устанавливается соотношение и интеграл (1) вычисляется аналогичными методами. Из резюме автора

10491. Об интегралах вида $\int_0^\infty f(x)\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| dx$. Шёнфелд (On integrals of the type $\int_0^\infty f(x)\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| dx$. Schoenfeld Lowell), SIAM Rev., 1959, **1**, № 2, 154—157 (англ.)

10492. Четырехкратный интеграл. Уотсон (A quadruple integral. Watson G. N.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 346, 280—283 (англ.)

Пусть u — произвольное положительное число, не обязательно целое, и пусть P и Q — две точки из области на плоскости, ограниченной окружностью радиуса a. Определяется среднее значение n-й степени расстояния PQ, $M(PQ^n)$.

10493. Некоторые свойства параболы и интегрирование одного функционального уравнения. Стамате (O proprietate a parabolei şi integrarea unei ecuaţii funcţionale. Stamate I.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 101—106 (рум.; рез. русск., франц.)

Дается другое доказательство формулы

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(x_0) - x_0 f'(x_0), \qquad (1)$$

где $x_0 \in (x_1, x_2)$, $f(x)$ непрерывна в $[x_1, x_2]$ и дифференцируема в (x_1, x_2), которую вывел Помпейу (Pompeiu D.,

Mathematica, 1946, 22, 143—146). Показывается, что (1) справедлива для $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, где $x_0^2 = x_1 x_2$, и дается геометрическая интерпретация. Полагая $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, получается функциональное уравнение

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{x_1 + x_2}{2} f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

которое в классе непрерывных функций имеет решение $f(x) = ax + b$. Из резюме автора

10494. О функциональном уравнении $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) f(y)$. Стамате (Asupra ecuației functționale: $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) f(y)$. Stamate I.), Lucrări științ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 111—118 (рум.; рез. руск., франц.)

10495. О неравенствах Сегё и Белмана. Олкин (On inequalities of Szegö and Bellman. Olkin Ingram), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, 45, № 2, 230—231 (англ.)

Доказывается неравенство:

Если $1 \geqslant w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_n \geqslant 0$, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ и $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на сегменте

$$[0, a_1], \text{ то } \left[1 - \sum_1^m (-1)^{j-1} w_j\right] f(0) +$$

$$+ \sum_1^m (-1)^{j-1} w_j f(a_j) \geqslant f\left[\sum_1^m (-1)^{j-1} w_j a_j\right].$$

Это неравенство содержит, как частные случаи, неравенство Сегё ($w_j = 1$, m нечетно, a_j строго убывают, $a_n > 0$), неравенство Вейнбергера ($w_j = 1$, $f(x) = x^r$, $r > 1$) и неравенство Белмана ($w_j = 1$, $f(0) \leqslant 0$). Доказательство основывается на известной теореме мажоризации:

Условие $(x) < (y)$, т. е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ и для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\sum_1^k x_i \leqslant \sum_1^k y_i$, а $\sum_1^n x_i = \sum_1^n y_i$, является необходимым и достаточным для того, чтобы неравенство $\sum_1^n f(x_i) \leqslant \sum_1^n f(y_i)$ имело место для любой непрерывной выпуклой функции $f(x)$. В. И. Левин

10496. О неравенствах с чередующимися знаками. Белман (On inequalities with alternating signs. Bellman Richard), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 5, 807—809 (англ.)

Показывается, что неравенство Олкина (реф. 10495) $\sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} w_j h(a_j) \geqslant h\left(\sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} w_j a_j\right)$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m \geqslant 0$, $1 \geqslant w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots \geqslant w_m \geqslant 0$, а $h(x)$ выпукла в $[0, a]$ и $h(0) \leqslant 0$, является частным случаем неравенства Стефенсена (Steffensen J. F., Tenth Scandinavian Math. Congress, 1946, 181 — 186): $\int_{b-c}^b f(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \leqslant \int_a^{a+c} f(t)dt$, где $f(t)$ неотрицательна и монотонно убывает в $[a, b]$, $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$ в $[a, b]$ и $c = \int_a^b g(t)\, dt$. Кроме того, доказывается следующее обобщение неравенства Стефенсена:

$$\left(\int_a^b f\, g dt\right)^p \leqslant \int_a^{a+c} f^p\, dt,$$

где $f(t)$ неотрицательна и монотонно убывает в $[a, b]$, $f \in L^p[a, b]$, $g(t) \geqslant 0$ в $[a, b]$ и $\int_a^b g^{p'}\, dt \leqslant 1$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $c = a + \left(\int_a^b g\, dt\right)^p$. Метод доказательства состоит в рассмотрении функции $u(t) \leqslant t$, определяемой равенством $\left(\int_a^t f g\, dt\right)^p = \int_a^u f^p\, dt$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, и монотонно возрастающей от значения $u(a) = a$. Так же может быть доказан ряд аналогичных неравенств. В. И. Левин

10497 К. Математический анализ. Сантини (Richiami di analisi matematica. Santini Paolo. Roma, Tip. Scuola ingegner. aeronaut., 1958, 139 p., ill.—Ligor.), Bibliogr. naz. ital., 1958, 73, № 11, 462 (итал.)

10498 К. Основные понятия классического анализа, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория функций. Настольная книга физики. Т. I. Лензе (Grundbegriffe der klassischen analysis, gewöhnliche Differentialgeichungen, Funktionentheorie. Handbuch der Physik. Bd. I. Mathematische Methoden. I. Lense J. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1956, 89 S., 72.00 DM) (нем.)

Это ясный и довольно полный конспект, который можно использовать для справок. Содержание: I. Действительные функции действительной переменной; II. Дифференциальное исчисление; III. Действительные функции нескольких действительных переменных; IV. Интегральное исчисление; V. Бесконечные ряды; VI. Функции комплексной переменной; VII. Обыкновенные дифференциальные уравнения. F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 11, 1188.

10499 К. Дествительный анализ. Мак-Шейн, Ботс (Real analysis. McShane Edward James, Botts Truman Arthur. Princeton, N. J. — London, D. Van Nostrand Co., 1959, ix, 272 pp., ill., 49sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 522, 13 (англ.)

10500 К. Упражнения по анализу бесконечно малых для студентов математических, физических и инженерных специальностей. Бононцини (Esercitazioni di analisi infinitesimale ad uso degli studenti di matematica, fisica e ingegneria. Vol. 2. 6a ed. interam. rif. Bononcini Vittorio E. Padova, C. E. D. A. M., 1958, vii, 642 p., ill. 4000 L. — Litogr.), Bibliogr. naz. ital., 1958, 73, № 9, 346 (итал.)

10501 К. Разностные уравнения. Мешковский (Differenzengleichungen. Meschkowski Herbert. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1959. 243 S., 36. — DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 33, 2528 (нем.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

10502. Замечания о сходимости рядов члены которых связаны линейным рекуррентным соотношением. Гиркояшиу (Observații asupra convergenței seriilor ai căror termeni sînt dați de o relație de recurență liniară. Ghircoiașiu Nicolae), Studii și cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1959, 10, № 1, 27—32 (рум.; рез. русск., франц.)

10503. Последовательности и ряды матриц. Хегенберг (Sequences and series of matrices. Hegenberg Leonidas H. B. Gaz. Mat., 1956, 17, № 65, 1—5) (порт.)

10504. О сравнении методов суммирования Чезаро и Бореля. Парамесваран (On a comparison between the Cesaro and Borel methods of summability. Parameswaran M. R.), J. Indian Math. Soc., 1958 (1959), 22, № 2, 85—92 (англ.)

Известно, что в классе ограниченных последовательностей поле суммируемости метода Чезаро $C^r (r > 0)$ включает в себя поле метода Бореля (экспоненциально) го). Автор усиливает сформулированную „теорему включения" и попутно устанавливает одно свойство FK-пространств Целлера. Используются работы Мейер — Кёнига и Целлера (РЖМат, 1957,6446), Рамануджана и других авторов. Рассматриваются лакунарные ряды $\sum a_n$.

$$G: a_n = 0 \text{ при } n \neq n_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

следующих типов:

$$G_E: n_{k+1} - n_k > \lambda \sqrt{n_k},\ \lambda > 0,$$

$$G_C: n_{k+1} - n_k > \theta\, n_k,\ \theta > 0.$$

Доказывается основная теорема: Для любого $G \in G_E$, $G \overline{\in} G_C$ существуют ряды $\sum a_n$ с ограниченными и неограниченными частными суммами, удовлетворяющие исходному условию лакунарности G и такие, что они G^r-суммируемы для любого $r > 0$, но не суммируемы по Борелю. М. П. Щеглов

10505. Проблема «полной транслятивности» для методов Хаусдорфа. Рамануджан (The problem of «total translativity» for Hausdorff methods. Ramanujan M. S.), J. Indian Math. Soc., 1958 (1959), 22, № 2, 45—51 (англ.)

Метод суммирования A. называют транслятивным, если из A-суммируемости последовательности $\{s_0, s_1, \ldots\}$ к числу l (конечному) следует A-суммируемость „смещенной" последовательности $\{0, s_0, s_1, \ldots\}$ к тому же числу и обратно. Метод A вполне (тотально) транслятивен, если указанное выше свойство сохраняет силу и для $l = \pm\infty$. Известно, что метод Чезаро (C, k) вполне транслятивен, метод Гёльдера (H, k) вполне транслятивен лишь в тривиальных случаях $k = 0$, $k = 1$ (РЖМат, 1955, 5896). Метод A, преобразующий последовательность $\{s_n\}$ в $\{t_n\}$, называют мультипликативным (умножающим) с множителем ρ, если из существования $\lim s_n = l$ вытекает $\lim t_n = \rho l$. Автор развивает идеи Катнера о „транслятивности" методов Хаусдорфа (РЖМат, 1956, 8111). Доказывается теорема:

Если мультипликативный метод Хаусдорфа (H, μ_n) $(\mu_n \neq 0)$ удовлетворяет условиям Катнера (A), то он вполне транслятивен тогда и только тогда, когда является методом Чезаро или представляет тривиальную модификацию метода.

Примечание референта. На стр. 48 под интегралами, очевидно, должно всюду стоять $K(\ldots)$ вместо $k(\ldots)$. М. П. Щеглов

10506. Примечение интерполяционных операторов к теории суммирования рядов. Берман Д. Л., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем., 1958, № 2, 17—19

Пусть $0 \leqslant x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $H_n(f, x)$ — оператор, обладающий свойствами: 1) $H_n(f, x)$ имеет вид $H_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j^{(n)})\, h_j^{(n)}(x)$, где $h_j^{(n)}$ — многочлены степени не выше n; 2) если $P_s(x)$ — многочлен степени $m \leqslant \varphi_0(n)$, где $\varphi_0(n)$ — некоторая целочисленная функция n, причем $n \geqslant \varphi_0(n)$ и $\varphi_0(n) \to \infty$, $n \to \infty$, то $H_n(P, x)$ есть многочлен степени не выше m; 3) для любой f из пространства C непрерывных на $[0, 1]$ функций, $H_n(f, x) \to f(x)$, $n \to \infty$, равномерно на $[0, 1]$. Положим $\lambda_j^{(n)} = \sigma_n[h_j^{(n)}(x)]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где σ_n — функционал, определенный в пространстве всех полиномов степени не выше $n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ равенством $\sigma[P_n(x)] = a_0\mu_0 + a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n$, а $\{\mu_n\}$ — заданная последовательность. Матрица $T = \| \lambda_j^{(n)} \|$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяет некоторый метод суммирования последовательностей $\{s_j\}$

$$t_n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^{(n)} s_j, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Вещественная последовательность $\{\mu_n\}$ σ-абсолютно монотонная, если $\lambda_j^{(n)} \geqslant 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ Среди доказанных теорем отметим следующие:

1. Для того чтобы метод суммирования (1) был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы

$$1)\ \mu_0 = 1;\ 2)\ \lim_{n\to\infty} \lambda_j^{(n)} = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$3)\ \sum_{j=0}^{n} |\lambda_j^{(n)}| < c,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

2. Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\mu_k\}$ удовлетворяла соотношению (2), необходимо и достаточно, чтобы $\mu_k = \alpha_k - \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ — σ-абсолютно монотонные последовательности.

При этом предполагается, что $h_j^{(n)}(x) \geqslant 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Метод суммирования (1) представляет собой обобщение известного метода Хаусдорфа. М. Д. Калашников

10507. О методе суммирования Волкова. Гейвовский (O metodzie limesowalności Wołkowa. Hejwowski Janusz), Zesz. nauk. Uniw. łodzk., 1959, Ser. 2, № 5, 203—215 (польск., рез. нем.)

Волков (РЖМат, 1957, 562) предложил следующий метод суммирования: последовательность чисел $x = (\xi_n)$ суммируется методом A_ω, определенным вещественной матрицей $A = (a_{mn})$, $m, n = 1, 2, \ldots$, к числу $A(x)$ если

$$\lim_m \overline{\lim_q} \sum_{n=1}^{q} a_{mn}\xi_n = \lim_n \overline{\lim_q} \sum_{n=1}^{q} a_{mn}\xi_n = A(x).$$

Автор устанавливает необходимые и достаточные условия для того, чтобы все ограниченные, все сходящиеся к нулю или все сходящиеся последовательности были суммируемы методом A_ω. Эти условия немного отличаются от известных условий для метода Тёплица. Пользуясь этим, автор доказывает, что для метода Волкова справедливы известные теоремы Мазура — Орлича (РЖМат, 1956, 4607), доказанные для метода Тёплица. Основной из них является теорема: Пусть методы A_ω, B_ω суммируют все сходящиеся последовательности к их пределу. И пусть всякая ограниченная последовательность, суммируемая первым методом, суммируется вторым. Тогда все ограниченные последовательности, суммируемые методом A_ω, суммируются методом B_ω к тому же пределу. W. Bogdanowicz

10508. О суммируемости почти всюду ортогональных рядов методом первых логарифмических средних. Медер (On the summability almost everywhere of orthonormal series by the method of first logarithmic means. Meder J.), Rozpr. mat., 1959, 17, 34 s.) (англ.)

Распространяются на методы суммирования первыми логарифмическими средними некоторые известные результаты, относящиеся к суммируемости ортогональных рядов методом $(C, 1)$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ с $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ суммируем $(R, 1)$ (методом первых логарифмических средних) к числу s, если $\tau_n = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k} \to s$ при $n \to \infty$ $(n > 1)$. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормальная система на $[0, 1]$, то через $L_n(x)$ обозначаются ее функции Лебега, а через $L_n^{(1)}(x)$ — функции Лебега той же системы, но для метода суммирования $(R, 1)$. Характерные результаты.

Теорема 1. Если ортогональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad \text{с} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \qquad (1)$$

почти всюду на $[0, 1]$ $(R, 1)$-суммируем к $s(x)$, то этот ряд почти всюду на $[0, 1]$ сильно $(R, 1)$-суммируем к $s(x)$, т. е. почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{|s_k(x) - s(x)|}{k} = 0.$$

Такого сорта теорема для метода $(C, 1)$ была установлена Зигмундом (Zygmund A., Fundam. math., 1927, **10**, 356—362).

Теорема 5. Для всякого ортогонального ряда (1) $c_n(x) = o(\log\log\log n)$ при $n \to \infty$ для почти всех $x \in [0, 1]$.

Показывается, что теорема 5 окончательна, т. е. $\log\log\log n$ не может быть заменен никакой другой возрастающей последовательностью $v(n) = o(\log\log\log n)$.

Теорема 9. Если ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ такова, что функции $L_n^{(1)}(x)$ равномерно ограничены на множестве $E \subset [0, 1]$, то ряд (1) $(R, 1)$-суммируем почти всюду на E.

Теорема 10. Если ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ такова, что функции $L_{2^{2^n}}(x)$ равномерно ограничены на $E \subset [0, 1]$, то ряд (1) $(R, 1)$-суммируем почти всюду на E.

Теоремы 9 и 10 являются, соответственно, аналогами теорем Качмажа и Алексича для метода $(C, 1)$ (РЖМат, 1959, 3667К, гл. 5, § 9, гл. 9, § 5). П. Л. Ульянов

10509. Суммируемость степенных рядов на бесконечных множествах изолированных точек. Вермс (Summability of power series at unbounded sets of isolated points. Vermes P.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 10, 830—838 (англ.)

Пусть функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ регулярна в круге $|z| < R$ $(R > 1)$, удовлетворяет условию $f(1) = 1$ и имеет точку z' с $1 < |z'| < R$ в качестве нуля кратности $q + 1$. Тогда метод суммирования A, определенный при помощи преобразования последовательности в последовательность верхней треугольной матрицей (a_{nk}) с $a_{nk} = a_{k-n}$, регулярен. Показывается, что биномиальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{k} z^k$ суммируем методом A в изолированной точке z', если $p = 0, 1, \ldots, q$, и не суммируем, если $p > q$. Отсюда вытекает существование регулярного матричного метода суммирования, суммирующего каждый биномиальный ряд на исчислимом множестве изолированных точек вне круга сходимости. Случай конечного множества изолированных точек рассмотрен автором раньше (Vermes P., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1947, **3**, № 8, 1—13). Автор также изучает случай, когда биномиальный ряд заменяется рядами Тейлора более общих мероморфных функций. Г. Ф. Кангро

10510. Дифференцирование бесконечного функционального ряда. Багли, Мак-Найт (Differentiation of infinite series of functions. Bagley R. W., McKnight J. D.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 10, 890—892 (англ.)

10511. Три теоремы о произведениях степенных рядов. Островский (Three theorems on products of power series. Ostrowski A. M.), Compositio math., 1959, **14**, № 1, 41—49 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Для рядов с вещественными коэффициентами

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \quad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n,$$

$$\frac{\varphi(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n, \quad \frac{\Phi(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n$$

при условии $\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \infty$ выполняется соотношение

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{S_n} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{r_n}{R_n} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{S_n}.$$

Теорема 2. Для рядов с положительными коэффициентами

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n\right)$$

при условиях $\frac{S_{n+1}}{S_n} \to 1$, $\frac{T_{n+1}}{T_n} \to 1$ $(n \to \infty)$ выполняется соотношение $\frac{R_{n+1}}{R_n} \to 1$ $(n \to \infty)$.

Теорема 3. Для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n\right),$$

где S_n, T_n положительны, а остальные коэффициенты вещественны, при условиях $\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} T_n = \infty$

$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} \leqslant 1$, $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} \leqslant 1$, $\frac{s_n}{S_n} \to \alpha$, $\frac{t_n}{T_n} \to \beta$ $(n \to \infty)$ выполняется соотношение $r_n/R_n \to \alpha\beta$.

И. П. Макаров

10512. Множители сходимости для цепных дробей. I. Уинн (Converging factors for continued fractions. Part 1. Wynn P.), Numer. Math., 1959, **1**, № 5, 272—307 (англ.)

Рассмотрен метод приближенного вычисления цепной дроби вида

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{c_0}{d_0} + \ldots + \frac{y_0}{z_0} + \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{y_1}{z_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots \qquad (1)$$

Ее „хвост" $u_n = \frac{a_n}{b_n} + \frac{c_n}{d_n} + \ldots + \frac{y_n}{z_n} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{d_{n+1}} + \ldots$ удовлетворяет разностному уравнению

$$p(n)\,u_n + q(n)\,u_{n+1} + r(n)\,u_n u_{n+1} = s(n), \qquad (2)$$

где $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$, $s(n)$ — многочлены от n. Рассмотрен общий метод приближенного вычисления u_n при помощи подстановки $u_n = \sum_{s=-k}^{\infty} \alpha_s n^{-s}$, где α_s — неопределенные коэффициенты. Затем подходящая дробь цепной дроби (1)

$$C_n \equiv \frac{A_n}{B_n} = \frac{b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}}{b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}}$$

заменяется дробью

$$C_n' = \frac{A_{n-1} + u_n A_{n-2}}{B_{n-1} + u_n B_{n-2}},$$

где u_n приближенно вычислено из (2). Показано на примерах, что во многих случаях C_n' гораздо ближе к значению цепной дроби (1), чем C_n. Показано на примерах, что из двух решений уравнения (2) одно $(u_n^{(1)})$ обычно дает хорошие приближения для значения цепной дроби (1), а другое $(u_n^{(2)})$ не дает таких при-

ближений. $u_n^{(1)}$ и $u_n^{(2)}$ автор называет множителями сходимости цепной дроби (1), по аналогии со сходными выражения и в теории рядов. Рассмотрены множители сходимости цепных дробей для $\pi/2$, $\ln 2$, отношений функций Бесселя, индексы которых отличаются на единицу, и различных функций, связанных с гипергеометрическими рядами (интеграл вероятности, интегральные синус и косинус и др). Приведен прием, позволяющий пользоваться методом в некоторых случаях, когда непосредственное его применение не ведет к цели. Исследование сходимости процесса в общем случае не проведено. Имеются опечатки и различные обозначения одних и тех же величин. А. Н. Хованский

10513. Множители сходимости для цепных дробей. Ч. 2. Уинн (Converging factors for continued fractions. Part 2. Wynn P.), Numer. Math., 1959, 1, № 5, 308—320 (англ.)

Рассмотрены множители сходимости для некоторых цепных дробей, в том числе для цепной дроби

$$F_k(z) = \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{\operatorname{ch} kt}\,dt = \frac{1}{z} + \frac{1\cdot k}{z} + \frac{2(k+1)}{z} + \dots,$$

частные случаи которой $F_1(1) = \ln 2$ и $F_2(1) = \pi/2 - 1$ были рассмотрены в предыдущей работе (реф. 10512). Выведено нелинейное интегральное уравнение для получения множителей сходимости цепных дробей. Показано на примерах, что в некоторых случаях применение множителя сходимости $u_n^{(2)}$ изменяет значение, к которому сходится цепная дробь. В заключение рассмотрена общая постановка проблемы улучшения сходимости цепных дробей, указана сложность этой проблемы и подчеркнуто, что применение множителей сходимости является первым шагом на пути к решению этой проблемы. А. Н. Хованский

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

10514. Некоторые элементарные неравенства для гамма- и неполной гамма-функции. Гаучи (Some elementary inequalities relating to the gamma and incomplete gamma function. Gautschi Walter), J. Math. and Phys., 1959, 38, № 1, 77—81 (англ.)

Доказывается неравенство

$$\frac{1}{2}\left[(x^p+2)^{1/p} - x\right] < e^{x^p}\int_x^\infty e^{-t^p}dt \leqslant$$

$$\leqslant c_p\left[(x^p + 1/c_p)^{1/p} - x\right],$$

где p — любое действительное число большее 1,

$$c_p = \{\Gamma(1+1/p)\}^{p/(p-1)}, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

10515. Об аналогиях между некоторыми рядами, содержащими бесселевы функции, и некоторыми специальными случаями интеграла Вебера — Шафхайтлина. Трантер (On the analogies between some series containing Bessel functions and certain special cases of the Weber — Schafheitlin integral. Tranter C. J.), Quart. J. Math., 1959, 10, № 38, 110—114 (англ.)

В предположении, что m — положительное целое число или нуль, $\nu > -1$, $k > 0$, α_s $(s = 1, 2, \dots)$ — положительные корни уравнения $J_\nu(\alpha_s a) = 0$, $a > 1$, доказывается следующая формула

$$\sum_{s=1}^\infty \frac{J_{\nu+2m+k}(\alpha_s)\,J_\nu(\alpha_s r)}{\alpha_s^k\,J_{\nu+1}^2(\alpha_s a)} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^\infty x^{1-k} J_{\nu+2m+k}(x)\,J_\nu(rx)\,dx$$

как для $0 < r < 1$, так и для $1 < r < a$. Устанавливается также представление ряда

$$\sum_{s=1}^\infty \frac{J_{\nu+2m+k}(\alpha_s)\,J_{\nu+2n+k}(\alpha_s)}{\alpha_s^2\,J_{\nu+1}^2(\alpha_s a)}$$

(n — положительное целое число или нуль, $\nu > -m - n - k$ и не является целым числом < 0) в виде суммы двух несобственных интегралов, содержащих бесселевы функции 1 и 2 рода. М. Н. Олевский

10516. Производящие функции для бесселевых функций. Уэйснер (Generating functions for Bessel functions. Weisner Louis), Canad. J. Math., 1959, 11, № 1, 148—155 (англ.)

Рассматриваются производящие функции для бесселевых функций, получаемые при изучении некоторых операторов Ли. При этом получаются некоторые соотношения для бесселевых функций. Например,

$$J_\nu\left(\frac{1}{2}\left[x - (x^2 - 4xy)^{1/2}\right]\right) J_\nu\left(\frac{1}{2}\left[x + (x^2 - 4xy)^{1/2}\right]\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)}\binom{2\nu+2n}{n} J_{\nu+n}(x)\left(\frac{y}{2}\right)^{\nu+n}.$$

Это соотношение является предельным случаем более общего соотношения

$$2^{2\nu}\,\Gamma(\nu+1)\,(a^2-b^2)^{-\nu} J_\nu(\xi)\,J_\nu(\eta) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(ab)^n}{n!} F\left(-n, n+2\nu+1, \nu+1; \frac{(a+b)^2}{4ab}\right) \times$$

$$\times J_{\nu+n}(x)\,y^{\nu+n},$$

где

$$\xi = \frac{1}{2}\left[(x^2 + 2a^2xy)^{1/2} - (x^2 + 2b^2xy)^{1/2}\right],$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left[(x^2 + 2a^2xy)^{1/2} + (x^2 + 2b^2xy)^{1/2}\right],$$

$a^2 \neq b^2$, $ab \neq 0$, $\nu \neq -1, -2, \dots$

Н. Я. Виленкин

10517. Один класс неоднородных уравнений Бесселя. Водичка (Eine Klasse inhomogener Bessel-Gleichungen. Vodička Vaclav), Z. angew. Math. und Phys., 1959, 10, № 6, 603—608 (нем.; рез. англ.)

10518. Дифференцирование рядов по сферическим функциям. Михлин С. Г., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 2, 278—279

Пусть S — единичная сфера с центром в начале координат в m-мерном евклидовом пространстве E_m. Для $x \in E_m$ вводятся обозначения $|x| = \rho$ и $\Theta = x/\rho$. Через Ω обозначается шаровой слой $\rho_1 < \rho < \rho_2$, где $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2 < +\infty$. Всякая функция, заданная на S, считается продолженной в Ω так, чтобы она не зависела от ρ. В таком случае $f(\Theta) \in L_p(S)$ тогда и только тогда, когда $f(\Theta) \in L_p(\Omega)$. По определению, $f(\Theta) \in W_p^{(l)}(S)$, если $f(\Theta) \in W_p^{(l)}(\Omega)$. Пусть $Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)$ — m-мерные сферические функции порядка n, ортонормированные на сфере S $(n = 0, 1, 2, \dots;\ k = 1, 2, \dots k_n$, причем k_n — число линейно независимых сферических функций порядка $n)$. Тогда имеют место теоремы.

Теорема 1. Если $f(\Theta) \in W_2^{(l)}(S)$, то разложение $f(\Theta)$ по сферическим функциям можно почленно дифференциро-

вать l раз по декартовым координатам точки Θ; полученные l-кратным дифференцированием ряды сходятся в метрике $L_2(S)$.

Теорема 1. Если $f(\Theta)\in W_2^{(l)}(S)$, $l\geqslant m-1$, то ряд $f(\Theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}a_n^{(k)}Y_{n,m}^{(k)}(\Theta)$, а также ряды, полученные из него почленным дифференцированием порядка $\leqslant l-m+1$ по декартовым координатам точки Θ, сходятся абсолютно и равномерно. В. Л. Файншмидт

10519. Явное выражение для сферических гармоник. Шмид (Explicit expression for spherical harmonics. Schmid L. A.), Amer. J. Phys., 1958, **26**, № 7, 485—489 (англ.)

Сферические гармоники на сфере $x^2+y^2+z=R^2$ записываются в виде

$$Y_l^m=R^{-l}\sum_{p=0}^{l}\frac{(-1)^p[(2l+1)(l+m)!(l-m)!]^{1/2}}{(4\pi)^{1/2}2^{2p-m}p!(p-m)!(l+m-2p)!}\times$$
$$\times(x+iy)^p(x-iy)^{p-m}z^{l+m-2p},$$

естественным образом возникающем из теории представлений группы вращений. Указано, что такая запись более удобна для применений операторов, встречающихся в квантовой механике. Н. Я. Виленкин

10520. Улучшение сходимости разложения по сфероидальным волновым функциям. Мейкснер, Уэлс (Improving the convergence in an expansion of spheroidal wave functions. Meixner J., Wells C. P.), Quart. Appl. Math., 1959, **17**, № 3, 263—269 (англ.)

Рассматривается разложение по сфероидальным волновым функциям $S_\nu^{\mu(j)}(z;\ \theta)$, $j=1,2,3,4$, $Ps_\nu^\mu(z;\ \theta)$ (РЖМат, 1957, 3 59К), к которому приводят различные типы задач из области радиотехники. Авторы изучают разложение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nS_n^{1(4)}(\xi;\ \gamma)\,Ps_n^1(\eta;\ \gamma^2),\qquad(1)$$

которое, как показывает приведенная таблица, в рассматриваемой области сходится медленно. Статья посвящена улучшению сходимости ряда (1) известным способом, применяемым и в других случаях: для данного ряда $\sum a_n\psi_n$ рассматривается ряд сравнения $\sum b_n\varphi_n$ такой, что для больших n $a_n\psi_n\approx b_n\varphi_n$ в смысле $a_n\psi_n=b_n\varphi_n+o\left(\frac{1}{n}\right)$; тогда можно ожидать, что $\sum(a_n\psi_n-b_n\varphi_n)$ сходится быстрее, чем данный ряд. За ряд сравнения для (1) выбирается ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{-1}(\gamma_1')\,P_n^1(\gamma_1)\left(n+\frac{1}{2}\right)(\xi^2-1)^{1/2}Q_n'(\xi)/n(n+1)Q_n(\xi),$$

где P_n^1, P_n^{-1}, Q_n — функции Лежандра, $\gamma_1=\cos\theta$, $\gamma_1'=\cos\varphi$, $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<\pi$. А. К. Харадзе

10521. Точные формулы для 25 присоединенных функций Лежандра второго рода. Зушовк (Explicit formulae for 25 of the associated Legendre functions of the second kind. Suschowk Dietrich), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, **13**, № 68, 303—305 (англ.)

10522. Заметка о гипергеометрических многочленах. Чаттерджи (Note on hypergeometric polynomials. Chatterjea S. K.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 3, 220—223 (англ.)

Дается простое доказательство следующего нелинейного рекуррентного соотношения для ультрасферических многочленов $f_n\equiv P_n^\lambda(x)$: $(1-x^2)[(f_n')^2-f_{n-1}'f_{n+1}']=n(n+2\lambda)f_n^2-(n+1)(n+2\lambda-1)f_{n-1}f_{n+1}$, установленного Тирувенкатачаром и Нанджундия (Thiruvenkatachar V. R., Nanjundiah T. S., Proc. Indian Acad. Sci., 1951, **33**, 373—384); см. также РЖМат, 1958, 6841). Кроме того, исходя из одной формулы Дингхаса (Dinghas A., Math. Z., 1950, **53**, 76—83), автор получает следующее соотношение:

$$\sum_{r=0}^{n}P_r^\alpha(a)\,P_{n-r}^\beta(b)=$$
$$=\frac{2}{B(\alpha,\beta)}\int_0^{\pi/2}P_n^{\alpha+\beta}(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)\times$$
$$\times(\sin\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}d\theta.$$

М. Н. Олевский

10523. Обобщение некоторых полиномов, связанных с тэта-функциями. Аль-Салам (A generalization of some polynomials related to the theta functions. Al-Salam Waleed A.), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, **8**, № 4-5, 381—395 (англ.)

Рассматриваются два семейства полиномов, определяемые соотношениями: $H_0^{(\nu)}(x)=G_0^{(\nu)}(x)=1$, $H_1^{(\nu)}(x)=G_1^{(\nu)}(x)=1+x$, $H_{n+1}^{(\nu)}(x)=(1+x)H_n^{(\nu)}(x)-[n+\nu]\times x\,H_{n-1}^{(\nu)}(x)$, $n\geqslant 1$; $G_{n+1}^{(\nu)}(x)=(1+x)G_n^{(\nu)}(x)+q^{-n-\nu}[n+\nu]\,xG_{n-1}^{(\nu)}(x)$, $n\geqslant 1$, где $[n]=1-q^n$. (Частный случай $\nu=0$ был рассмотрен Карлицом (РЖМат, 1959, 5975)). Для этих полиномов выводится ряд формул, напоминающих соотношения для обобщенных полиномов Эрмита, изученные Тоскано (РЖМат, 1958, 456). Г. К. Энгелис

10524. Одна формула Родрига. Палас (A Rodrigues' formula. Palas Frank J.) Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 5, 402—404 (англ.)

Рассматривается последовательность полиномов, определяемых производящей функцией

$$(1-t)^{-1}\exp[x^k(1-(1-t)^{-k})]=\sum_{n=0}^{\infty}T_{kn}(x)\,t^n$$

(k — натуральное число, $T_{kn}(x)$ — полином степени kn). Находятся несколько рекуррентных соотношений и явное выражение для $T_{kn}(x)$, доказывается формула Родрига $T_{kn}(x)=e^{x^k}(x^ne^{-x^k})^{(n)}$, устанавливается соотношение ортогональности $\int_0^\infty e^{-x^k}x^sT_{kn}(x)\,dx=0$ при $s<n$, указывается, что $T_{kn}(x)$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению порядка $k+1$ с полиномиальными коэффициентами. Случай $k=1$ приводит к полиномам Лагерра, случай $k=2$ был рассмотрен Эмбером (Humbert P., C. r. Acad. sci., 1923, **176**, 1282—1284).

Примечание референта. Часть результатов статьи являются частными случаями предложений, доказанных референтом для более общего класса полиномов (РЖМат, 1957, 7963; 1959, 7080). Г. К. Энгелис

10525. Об обобщении многочленов Шарлье и Чебышева. Кемпбелл (Sur une extension des polynomes de Charlier et de Tschebycheff. Campbell Robert), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 21, 2937—2939 (франц.)

Пусть $\{P_n(x)\}_0^\infty$ — последовательность ортонормированных многочленов на отрезке $(a,\ b)$ вещественной оси. Если $P_n(x)=k_nx^n+k_n'x^{n-1}+\ldots$ и $A_n=\frac{k_n}{k_{n-1}}$, $u_n=\frac{k_{n+1}'}{k_{n+1}}-\frac{k_n'}{k_n}$, то $(x+u_{n+1})P_n(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{A_{n+1}}+\frac{P_{n-1}(x)}{A_n}$.

В реферируемой работе рассмотрен класс ортонормированных многочленов $(E)_h$, для которых $u_n=\lambda n+\mu$ и

$A_n = (hn + k)^{-1/2}$. Класс $(E)_h$ включает многочлены Шарлье (при $h \neq 0$, $k = 0$), многочлены Чебышева, многочлены Эрмита. Пусть функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье—Чебышева $\sum_1^\infty a_n P_n(x)$, $a_n = \int_a^b P_n(t) f(t) d\alpha(t)$. Известна классическая формула Кристоффеля — Дарбу

$$S_n^0 = \sum_r^{n-1} {}_1 a_r P_r(x) = \int_a^b \frac{\sum_n^{(0)}(x, t)}{x - t} f(t)\, d\alpha(t), \qquad (1)$$

где $\sum_n^{(0)}(x, t) = \frac{1}{A_n}[P_n(x) P_{n-1}(t) - P_n(t) P_{n-1}(x)]$. Пусть $\sigma_n^1(x)$ — фейеровские средние многочленов из класса $(E)_h$ $\sigma_n^1(x) = \frac{1}{n} \sum_r^n {}_1 S_r^0(x)$. Для них установлена формула, аналогичная (1)

$$\sigma_n^1(x) = \frac{1}{A_n} \int_a^b \frac{\sum_n^{(1)}(x, t)}{x - t} f_*(t)\, d\alpha(t). \qquad (2)$$

Величину $\sum_n^{(1)}(x, t)$ автор определяет следующим образом:

Если Λ_x — оператор, преобразующий $P_n(x)$ в $\frac{P_{n+1}(x)}{A_{n+1}}$, а $\mathfrak{T}_x$ означает выражение $\frac{1}{x - t - \lambda}\left[\Lambda_x + \frac{h}{x - t}\right]$, то $\sum_n^{(1)}(x, t) = (\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_t)\left(\sum_n^{(\cdot)} - \sum_1^0\right)$. Для σ_n^p — чезаровских средних порядка p — установлена аналогичная формула

$$\sigma_n^p(x) = \frac{1}{A_n^p} \int_a^b \frac{\sum_n^{(p)}(x, t)}{x - t} f(t)\, d\alpha(t), \qquad (3)$$

где $\sum_n^{(p)}$ означает p раз повторенный оператор $\mathfrak{T}_x - \mathfrak{T}_t$. Формулы (2) и (3) приведены без доказательств.

Б. Л. Голинский

10526. Интегралы от произведений двух волновых функций гармонического осциллятора. Ансбахер (A note on the overlap integral of two harmonic oscillator wave functions. Ansbacher F.), Z. Naturforsch., 1959, **14a**, № 10, 889—892 (англ.)

Рассматриваются интегралы

$$I(m, n; \beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^{(1)}(x)\, \varphi_n^{(2)}(x)\, dx,$$

где $\varphi_m^{(1)}(x) = (\alpha_1 \pi^{1/2} 2^m m!)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha_1^2}} H_m\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)$; $\varphi_n^{(2)}(x) = (\alpha_2 \pi^{1/2} 2^n n!)^{-1/2} e^{-\frac{(x-D)^2}{2\alpha_2^2}} H_n\left(\frac{x - D}{\alpha_2}\right)$, $\alpha_i = \left(\frac{h^2}{MK_i}\right)^{1/4}$ $(i = 1, 2)$; $H_k(x)$ — полиномы Эрмита, $\beta = \alpha_1/\alpha_2$; $\gamma = D/\alpha_1$, причем M — масса частицы, x — ее координата, $V_1 = \frac{1}{2} K_1 x^2$, $V_2 = \frac{1}{2} K_2 (x - D)^2$ — потенциалы двух силовых полей. Положим

$$K_{mn} = (-1)^{m+n} (m!\, n!)^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{n+m-1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} (1 - \beta^2)^{\frac{m+n}{2}} \times (1 + \beta^2)^{-\frac{m+n+1}{2}} e^{-\frac{\beta^2\gamma^2}{2(1+\beta^2)}},$$

$$\frac{4\beta}{1 - \beta^2} = \xi; \quad \frac{i\beta^2\gamma}{\sqrt{1 - \beta^4}} = \eta; \quad -\frac{\beta\gamma}{\sqrt{1 - \beta^4}} = \zeta.$$

Доказывается, что

$$I(m, n; \beta, \gamma) = K_{mn} \sum_{l=0}^{[m, n]} \frac{(-i)^{m-l} \xi^l}{l!(m - l)!(n - l)!} H_{m-l}(\eta) H_{n-l}(\zeta),$$

где $[m, n]$ — наименьшее из чисел m и n. Положив далее $M(a, b; y) = {}_1F_1(-a, b; y)$, получаем $I(m, n; \beta, \gamma) = \sum_{l=0}^{[m, 2]} \sum_{r=0}^{l} A_{lr} M\left(m - 2r, n - m - 2l + 4r + 1; -\frac{\beta^2\gamma^2}{1 + \beta^2}\right)$, где

$$A_{lr} = \frac{(m!\, n!)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{m+n-3}{2}} \beta^{n-2(l-r)+\frac{1}{2}} (-\gamma)^{n-m-2l+4r} (1 - \beta^2)^l}{(m - 2r)! r! (l - r)! (n - m - 2l + 4r)! (1 + \beta^2)^{n+2r-\frac{1}{2}}} \times e^{-\frac{\beta^2\gamma^2}{2(1+\beta^2)}}.$$

Интегралы $I(m, n; \beta, \gamma)$ удовлетворяют рекуррентному уравнению $I(m, n; \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\beta^2\gamma}{1 + \beta^2} I(m - 1, n; \beta, \gamma) + \sqrt{\frac{n}{m}} \frac{2\beta}{1 + \beta^2} I(m - 1, n - 1; \beta, \gamma) + \sqrt{\frac{m - 1}{m}} \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \times I(m - 2, n; \beta, \gamma)$. Кроме того, имеем $\frac{\partial I(m, n; \beta, \gamma)}{\partial \gamma} + \frac{\beta^2\gamma}{1 \pm \beta^2} I(m, n; \beta, \gamma) = \sqrt{2m}\, \beta I(m - 1, n; \beta, \gamma) - \sqrt{2n}\, \gamma I(m, n - 1; \beta, \gamma)$.

Ю. Л. Рабинович

10527. Производные и интегралы многочленов Лагерра. Мишкин (Derivatives and integrals of the Laguerre polynomials. Mishkin E.), Proc. I. R. E., 1959, **47**, № 9, 1652—1653 (англ.)

10528. О двух рукописях епископа Барнса. Бейли (On two manuscripts by bishop Barnes. Bailey W. N.), Quart. J. Math., 1959, **10**, № 39, 236—240 (англ.)

Статья информирует о содержании двух рукописей Барнса, найденных в 1954 г. В одной из них устанавливается справедливость (в некоторой области изменения переменных z, Z) следующей формулы: $F_3[\alpha, \beta; \gamma, \alpha + \beta - \gamma + 1; z(1 - Z), Z(1 - z)] = F(\alpha, \beta; \gamma; z) F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; Z)$, которая была независимо найдена Бейли в 1933 г. (Bailey W. N., Generalized hypergeometric Series, Cambridge Tracts, 1935, **81**). Вторая рукопись является, по мнению автора, неопубликованным продолжением известной работы Барнса (Barnes E. W., Quart. J. Pure and Appl. Math., 1908, **39**, 97—204); продолжение было анонсировано Барнсом в указанной работе. В статье приводятся (без доказательств) главные результаты, содержащиеся в этой рукописи, среди которых отметим, например, следующие две формулы:

$$P_t^m(x_1)\, P_t^{-m}(x_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(t + 1 + s)}{\Gamma(t + 1 - s)} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(1 + s - m)} \times \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^s P_s^{-m}\left(\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 - x_2}\right) ds, \qquad (1)$$

(интеграл берется по пути, охватывающему положительную часть действительной оси и заключающему только положительные полюсы подынтегральной функции),

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^n P_n^m\left(\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 - x_2}\right) = n!\, \Gamma(1 + m + n) \times \sum_{t=0}^{n} \frac{(-1)^t (2t + 1)}{\Gamma(t + n + 2)\, \Gamma(n - t + 1)} P_t^{-m}(x_1)\, P_t^m(x_2); \qquad (2)$$

частный случай формулы (2) (при $m=0$) был указан Бейтманом в 1905 г. Интегральные представления, аналогичные (1), даны также для произведений $F(\alpha, \beta; \gamma; x_1)\times F(\alpha, \beta; \gamma; x_2)$ и $Q_n^{-m}(x_1)\,P_n^m(x_2)$. М. Н. Олевский

10529. Некоторые обобщенные гипергеометрические тождества типа Роджерса — Рамануджана (II). Сингх (Certain generalized hypergeometric identities of the Rogers — Ramanujan type (II). Singh V. N.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1691—1699 (англ.)

В связи с результатами Олдера (РЖМат, 1955, 3032) устанавливаются некоторые новые обобщенные тождества типа Роджерса — Рамануджана; см. также Сингх (РЖМат, 1959, 530). М. Н. Олевский

10530. Заметка о суммах некоторых двусторонних гипергеометрических рядов. Шукла (A note on the sums of certain bilateral hypergeometric series. Shukla H. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, 55, № 3, 262—266 (англ.)

Устанавливаются суммы двусторонних гипергеометрических рядов ${}_3H_3$ (1) и ${}_3\Psi_3$ (1) частного вида, а также суммы для вполне уравновешенных рядов ${}_6H_6(-1)$ и ${}_8\Psi_8$ частного вида. М. Н. Олевский

10531. Некоторые преобразования почти уравновешенных двусторонних гипергеометрических рядов специального типа. Шукла (Certain transformations of nearlypoised bilateral hypergeometric series of special type. Shukla H. S.), Canad. J. Math., 1958, 10, № 2, 195—201 (англ.)

Специализируя параметры в соотношении между M почти уравновешенными гипергеометрическими рядами типа ${}_MH_M$ от единичного аргумента, полученном в предыдущей статье (РЖМат, 1959, 1652), автор находит при $M=4$ (и $M=5$) соотношение между двумя рядами ${}_5F_4$ (типа Саальшютца) и тремя почти уравновешенными рядами типа ${}_4H_4$ (соответственно ${}_5H_5$) и некоторые следствия из него, которые, при дальнейшей специализации параметров, обращаются в известные соотношения. Дается также сумма для ${}_3H_3\left(\begin{matrix}a_1, a_2, a\\ b_1, b_2, b_3\end{matrix}\right)$ при $c_2=b_2-1$ и $a_1+b_1=a_2+b_2$. М. Н. Олевский

10532. О сумме двусторонних гипергеометрических рядов ${}_3H_3$ частного вида. Бейли (On the sum of a particular bilateral hypergeometric series ${}_3H_3$. Bailey W. N.), Quart. J. Math., 1959, 10, № 38, 92—94 (англ.)

Отправляясь от представления $A\equiv {}_3H_3\left(\begin{matrix}a\ b\ c\\ d\ e\ f\end{matrix}\right)$ в виде двучленной линейной комбинации рядов ${}_3F_2$ (Jackson M., J. London Math. Soc., 1952, 27, 116—123), автор находит выражение для A при $c=f+n$, $n>0$ — целое, через обрывающийся ряд ${}_3F_2\left(\begin{matrix}f-a,\ f-b,\ -n\\ 1+f-d,\ 1+f-e\end{matrix}\right)$, которое при $n=0$ было отмечено Дэнгаллом (Doungall J., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1907, 25, 114—132), а при $n=1$ и $1+2f=b+e$ — Шукла (реф. 10531). М. Н. Олевский

10533. Несобственные интегралы, содержащие E-функции. Шарма (Infinite integrals involving E-functions. Sharma K. C.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1959, A25, № 3, 161—165 (англ.)

Устанавливаются выражения в E-функциях для интегралов $\int_0^\infty (t^2+2pt)^{-\mu/2}\ (p+t)^{-k}\ E[l;\ \alpha_r : m;\ \beta_s : z(p+t)]\,P_\nu^\mu(1+t/p)dt$, $R(\mu)<1$, $R(\mu+k+\nu)>0$, $R(\mu+k-\nu-1)>0$, $R(p)>0$, $|\arg z|<\pi$;

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}K_\nu(px)\,E[l;\alpha_r : m;\beta_s : z/\sqrt{x}\,]\,dx,$$

$R\left(\lambda\pm\nu-\frac{1}{2}\right)>0$, $R(p)>0$, $|\arg z|<\pi$.

М. Н. Олевский

10534. Заметка об интеграле от произведения нескольких многочленов Бернулли. Карлиц (Note on the integral of the product of several Bernoulli polynomials. Carlitz L.), J. London Math. Soc., 1959, 34, № 3, 361—363 (англ.)

Известно, что многочлены Бернулли определяются следующим образом:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{m=0}^{\infty}B_m(x)\frac{t^m}{m!},\quad B_m=B_m(0) \qquad (1)$$

и

$$\int_0^1 B_p(x)\,B_q(x)dx=(1)^{p+q}\frac{p!\,q!}{(p+q)!}\,B_{p+q}\ (p+q>2), \qquad (2)$$

В реферируемой работе обобщается формула (2). Получена следующая формула:

$$\int_0^1 B_{m_1}(x_1+y)\ldots B_{m_n}(x_n+y)dy=$$

$$=\sum_{r_j=0}^{m_j}\binom{m_1}{r_1}\ldots\binom{m_n}{r_n}\frac{B_{m_1-r_1}(x_1)\ldots B_{m_n-r_n}(x_n)}{r_1+r_2+\ldots+r_n+1}. \qquad (3)$$

Примечание референта. В работе имеются описки; не показано, как из формулы (3) следует формула (2). Б. Л. Голинский

10535. О некоторых специальных функциях. Ахундзаде (Бә'зи хүсуси функсијалар һаггында. Ахундзадә М. Ј.), АзәрбССР Елмләр Акад. хәбәрләри. Физ.-ријазијјат вә техн. елмләри сер. Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1959, № 4, 11—22 (азерб.; рез. русск.)

Работа посвящена изучению некоторых сложных специальных функций, встречающихся в теории цилиндрических оболочек. Из резюме автора

10536. Разложение параболических волновых функций. Алави, Уэлс (Expansions of parabolic wave functions. Alavi Y., Wells C. P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 6, 876—880 (англ.)

Основной результат заключается в разложении параболических волновых функций в ряды по сферическим волновым функциям с коэффициентами, выраженными через функции Пастернака. Дается обращение таких рядов, т. е. сферические волновые функции выражаются через интегралы от параболических волновых функций.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

10537. Математический аппарат. Преобразование Лапласа. Ритоу (Mathematical techniques. Laplace transformations. Ritow Ira), Electr. Manufact., 1959, 63, № 5, 150—157, 210 (англ.)

10538. Замечание к одной работе Яноши. Феньё (Megjégyzés Jánossy Lajos egy dolgozatához. Fenyő István), Mat. lapok, 1959, 10, № 1-2, 66—71 (венг.; рез. русск., нем.)

Изучается преобразование, которое может рассматриваться как обобщенное преобразование Лапласа. Пусть V есть такое множество функций двух переменных, для которых операция $u\,\ddagger\,v=\int_x^y u(x,t)\,v(t,y)\,dt$,

$u, v \in V$, коммутативна. Тогда, как известно, существует такое линейное преобразование T, которое отображает V на множество функций, определенных на отрезке $[0, \infty)$. Под обобщенным преобразованием Лапласа функции $u(x,y) \in V$ понимается преобразование $L(u) = \mathfrak{L}[T^{-1}(u)]$, где T^{-1} – преобразование, обратное T, $\mathfrak{L}$ обозначает обычное преобразование Лапласа. Это преобразование сходно по своим свойствам с преобразованием Лапласа, например, $L(u * v) = L(u)L(v)$, $u, v \in V$.

Из резюме автора

10539. Некоторые новые ядра, порождающие функции, двойственные себе. II. Агравал (Some new kernels for the derivation of self-reciprocal functions. II. Agrawal Bhagwan Das), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1957—1958 (1958), 8, № 2, 243—252 (англ.)

Функция $f(x)$ называется R_ν, если она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_\nu(xy) f(y) dy = f(x) \quad (\mathrm{Re}\,\nu > -1),$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода. Известна следующая теорема (Mehrotra B. M., Proc. London Math. Soc., 1932, 34, № 2, 231–240):

Если $f(x)$ есть R_μ и

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^s \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{s}{2}\right)\times$$

$$\times \chi(s) x^{-s}\, ds,$$

где $\chi(s) = \chi(1-s)$, $0 < c < 1$, то $g(x) = \int_0^\infty f(y)\, k(xy)\, dy$ есть R_ν. Используя этот результат и некоторые интегралы, вычисленные Синха (1942), автор получает различные ядра, преобразующие R_μ к R_ν.

Приведем следующие результаты. 1. Ядро

$$x^{3\nu-2} e^{-1/x}\, {}_1F_1(\nu; 4\nu-1; x)\, W_{\frac{1}{2},\,-\nu,\,2\nu-1}(x)$$

преобразует $R_{5\nu-3}$ к R_ν, если $2/5 < \nu < 3/4$, где ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ – обобщенная гипергеометрическая функция и $W_{k,m}(x)$ – обобщенная функция Уиттекера. 2. Ядро $x^{3-\nu-1/2} e^{-x} \times {}_1F_1(2\nu-\beta; \beta; x)$ преобразует $R_{\nu-1}$ к R_ν, если $\nu < \beta - 1/2$, $\beta > 0$.

С. А. Акопян

10540. Некоторые результирующие ядра, порождающие функции, двойственные себе. Агравал (Some resultant kernels for the derivation of self-reciprocal functions. Agrawal Bhagwan Das), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1957—1958 (1958), 8, № 2, 253—260 (англ.)

Продолжение предыдущей работы (реф. 10539). Автор использует следующую теорему Агравала (Agrawal R.P., Nat. Inst. Sci., 1947, 13, № 6, 305):

Результирующим ядром $G(x) = \int_0^\infty P_1(xy)\, P_2(y) dy$ двух ядер вида

$$P_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} 2^s \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{s}{2}\right)\chi(s)\, x^{-s} ds$$

и

$$P_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} 2^s \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2}+\frac{s}{2}\right)\omega(s) x^{-s} ds,$$

где $0 < c < 1$, $0 < c' < 1$; $\omega(s) = \omega(1-s)$; $\chi(s) = \chi(1-s)$, является ядро, преобразующее R_ν к R_λ. С помощью этого результата автор получает различные ядра, преобразующие R_ν к R_λ. Приведем два примера таких ядер.

1. Ядро $x^{\nu-3/2}\, {}_2F_1(2\nu-1, 2\nu-2m-1, 4\nu-4m-1; 1-x)$ преобразует $R_{\nu-2}$ к R_ν, если $\nu > \frac{3}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)$, $1/6 \leqslant m < 1/2$.

2. Ядро $x^{-\nu/3-1/2}\, {}_2F_1\left(-\frac{2\nu}{3}, \frac{2\nu}{3}+1; -\frac{4\nu}{3}; x\right)$ преобразует R_ν к R_ν, если $\mathrm{Re}\,\nu > 3/2$.

С. А. Акопян

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10541. Высказывания и тенденции развития в теории сигналов. Ч. I. Средние значения и функциональные преобразования. Ланге (Aussagen und Entwicklungstendenzen der Signaltheorie. Teil I. Mittelwerte und Funktionstransformationen. Lange F. H.), Wiss. Z. Univ. Rostock. Math.-naturwiss. Reihe, 1958—1959, 8 № 2, 125—136 (нем.)

Популярная статья по теории информации.

В. В. Немыцкий

10542. О систематическом расстоянии растительных массивов. Марчевский, Штейнхаус (O odległości systematycznej biotopów. Marczewski E., Steinhaus H.), Zastosow. mat., 1959, 4, № 3, 195—203 (польск.; рез. русск., англ.)

Если в растительном массиве (биотопе), например, в лесу, $\mathfrak{A}$ имеется a видов, в массиве $\mathfrak{B}$ – b видов, а w есть число общих видов, т. е. видов, имеющихся как в массиве $\mathfrak{A}$, так и в массиве $\mathfrak{B}$, то расстоянием между этими массивами называется число $r = 1 - \frac{w}{a+b-w}$.

Это число характеризует разницу между массивами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. В частности, если в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеются одни и те же виды ($a = b = w$), то расстояние между массивами равно нулю, а если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не имеют общих видов ($w = 0$), то расстояние будет наибольшим, т. е. равно 1. Вообще, если μ-произвольная фиксированная мера, т. е. неотрицательная, аддитивная функция множества, расстояние между двумя μ-измеримыми множествами определяется равенством

$$\rho(A, B) = \frac{m(A \div B)}{m(A + B)},$$

где $A + B$ обозначает соединение множеств, а $A \div B$ – симметричную разность. Или, более общо, расстояние между двумя неотрицательными μ-измеримыми функциями определяется по формуле

$$\rho(f, g) = \frac{\int |f-g| dm}{\int \max(f, g) dm}. \qquad (1)$$

Определенное так расстояние удовлетворяет условию треугольника и разным условиям регулярности. Формула (1) может служить для определения расстояния между растительными массивами не только относительно числа видов, но и относительно численности различных видов, имеющихся в этих биотопах.

Резюме автора

10543. Спектры одинарных импульсов высокой частоты с изменяющейся во время импульса несущей частотой. Вишневский (Widma pojedynczych impulsów w. cz. o zmiennej w czasie trwania impulsu częstotliwości nośnej. Wiśniewski F.), Prace Przemysł. inst. telekomun., 1959, 9, № 28, 1—14 (польск.; рез. русск., англ., франц.)

Рассмотрен вопрос расчета спектров одинарных импульсов высокой частоты с переменной несущей частотой, с использованием преобразования Фурье. Приведены условия возникновения несимметрического спектра в зависимости от формы модулирующей функции. Резюме автора

10544. Множители Лагранжа. Солцер (Lagrange's multipliers. Saltzer C.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 3, 225 (англ.)

10545. Об интеграле моментов давления в сверхзвуковом потоке. Дин Лу (On the integral of moments of pressure in supersonic flow. Ting Lu), J. Aero/Space Sci., 1959, 26 № 11, 758—759 (англ.)

10546. Критерий устойчивости для нелинейных систем. Гу, Вулф, Цзан (A stability criterion for nonlinear systems. Ku Y. H., Wolf A. A. — Discussion. Tsang N. F. — Authors' reply.), Applic. and Ind., 1959, № 43, 144—148 (англ.)

См. также: 10126, 10202, 10315, 10367 К, 11005 11009 К—11011 К.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

10547. Обобщение теоремы Шеффера. Ван Гоцзюнь (Wang Gwo-Jjunn), Сибэй дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Xibei daxue xuebao. Ziran kexue, 1958 (1959), № 3, 89—92 (кит.; рез. англ.)

Пусть G — нигде не плотное совершенное множество на прямой линии L, а A — счетное множество; по известной теореме Шеффера, для любой пары вещественных чисел C_1, $C_2 (C_1 > C_2)$ найдется число C, $C_1 > C > C_2$ такое, что A после сдвига на C не пересекается с G.

Автор обобщает эту теорему Шеффера, заменяя L пространством с группой параллельных переносов, в понятие которого входят все банаховы пространства, а G — множеством первой категории в данном пространстве. Ши Чжун-цы

10548. Алгебра операторов в локально выпуклом пространстве. Маринеску (Algèbres d'opérateurs dans un espace localement convexe. Marinescu G.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1957, 2, 413—417 (франц.)

Автор называет векторное пространство E псевдотопологическим объединением локально выпуклых линейно топологических пространств $E_i, i \in I$ (réunion pseudo-topologique d'espaces localement convexes), если все E_i являются подпространствами пространства E такими, что: а) $E = \bigcup_{i \in I} E_i$; б) для каждых двух индексов i_1 и i_2 существует индекс i_3 такой, что $E_{i_3} \supset E_{i_1} \cup E_{i_2}$; в) топология в E_{i_3} слабее топологии в E_{i_1} и в E_{i_2}. Доказано, что если E и F — локально выпуклые пространства, то множество $L(E,F)$ всех линейных непрерывных отображений из E в F, снабженное обобщенными полунормами (допустимо значение полунормы $+\infty$)

$$\| T \|_{\alpha,\beta} = \sup_{\| x \|_\alpha \leq 1} \| Tx \|_\beta \quad (\alpha \in A,\ \beta \in B),$$

где $\| \cdot \|_\alpha$, $\| \cdot \|_\beta$ $\alpha \in A$, $\beta \in B$ — семейства полунорм, определяющих топологии соответственно в E и F, является псевдотопологическим объединением некоторых локально выпуклых пространств. C. Bessaga

10549. О значении и пределе обобщенной функции в точке. Лоясевич (Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point. Łojasiewicz S.), Studia math., 1957, **16**, № 1, 1—36 (франц.)

Пусть T — обобщенная функция, определенная в одномерном интервале $a < x < b$. Символ $T(x_0 + \lambda x)$ обозначает, как обычно, суперпозицию T и линейной функции $x_0 + \lambda x$ переменной x. Если $\lim_{\lambda \to 0} T(x_0 + \lambda x)$ при $-\infty < x < \infty$ существует в смысле предела обобщенных функций, то он является постоянной обобщенной функцией, т. е. константой C (РЖМат, 1956, 8161).

Число C называется значением T в точке x_0 $(a < x_0 < b)$ и обозначается через $T(x_0)$. Заменив $-\infty < x < \infty$ на $-\infty < x < 0$ или на $0 < x < \infty$ и $\lambda \to 0$ на $\lambda \to 0+$, получим аналогичное определение правого и левого предела T в x_0. Реферируемая статья содержит систематический анализ этих трех понятий. Мы приведем здесь только основные результаты о значении обобщенной функции в точке (аналогичные результаты о правом и левом пределах могут быть получены легкой модификацией). Значение $T(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда в окрестности точки x_0 T является n-й производной непрерывной функции F, имеющей в точке x_0 дифференциал Данжуа порядка n, т. е. $F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o(|x - x_0|)^n$. Тогда $T(x_0) = n!\, a_n$ и $T(x_0) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \varepsilon = O(\lambda)}} T(x_0 + \varepsilon + \lambda x)$. С другой стороны, если $\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} T(x_0 + \varepsilon + \lambda x)$ в смысле предела обобщенных функций существует, то T есть функция, определенная в окрестности x_0 и непрерывная в x_0. Существуют обобщенные функции T, являющиеся производными непрерывных функций f, для которых $T(x_0)$ не обязательно существует для каждого x_0 (множество таких функций f резидуально). Если обобщенная функция T имеет значение всюду, то эти значения образуют локально интегрируемую функцию (первого беровского класса и обладающую свойством Дарбу) и T равна этой функции. Локально интегрируемая функция, рассматриваемая как обобщенная функция T, имеет значение в точке x_0 тогда и только тогда, когда ее примитивная имеет обычную производную в x_0, совпадающую в этом случае с $T(x_0)$. Для положительных мер, рассматриваемых как обобщенные функции, значение в точке совпадает с плотностью. Если обобщенная функция имеет значение в x_0, то ее примитивная также имеет значение в x_0. Автор вводит также и исследует понятие порядка значения обобщенной функции в x_0.

Примечание референта. Работа содержит некоторые ошибки (например, значение и пределы обобщенной функции в точке определены некорректно). R. Sikorsk

10550. О линейной размерности пространства L_p $(p > 2)$. Кадец М. И. Научн. докл. высш. школы. Физ-матем. н., 1958, № 6, 104—107

Пейли (Paley, Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, № 4) установил, что в пространстве L_p при $p > 2$ существует подпространство, изоморфное l_q, лишь в двух следующих случаях: $q = p$ или $q = 2$. Автор находит некоторые условия, при которых подпространство пространства $L_p (p > 2)$ изоморфно l_p или l_2. Через M_δ $(\delta > 0$ обозначается множество всех функций $f(x) \in L_p$, для ко-

торых mes $E\{|f(x)|\geqslant\delta\|f\|\}\geqslant\delta$. Доказывается следующая теорема:

Если бесконечномерное подпространство X пространства $L_p(p>2)$ принадлежит какому-нибудь множеству M_δ, то X изоморфно l_2. Если же X не содержится ни в каком M_δ, то в X существует подпространство, изоморфное l_p.

Приводится ряд следствий этой теоремы. В частности, устанавливается, что бесконечномерное подпространство X пространства $L_p(p>2)$ изоморфно l_2 в том и только в том случае, когда X замкнуто и в метрике L_2.

Имеется ряд опечаток. В заголовке статьи вместо знака $<$ должно быть $>$, на стр. 106 и 107 вместо C должно быть c. А. С. Маркус

10551. Обобщенные функции одной переменной: соотношения между двумя определениями, вычисление производной, интегрирование. Буи (Les distributions d'une variable: relations entre deux définitions, dérivation, intégration. Bouix Maurice), Ann. télécommuns, 1959, **14**, № 9-10, 236—255 (франц.)

Обзорная статья. Подробно разбираются свойства обобщенных функций, определенных по Микусинскому (РЖМат, 1957, 1611, 6502). Более сложные свойства (в частности, связанные со значениями обобщенных функций в отдельных точках) приведены без доказательства. Разобран ряд простых примеров. Далее рассматриваются простые свойства обобщенных функций, определенных по Соболеву и Шварцу, а также связь обоих определений; обсуждаются их взаимные методические преимущества. А. Д. Мышкис

10552. Линейные неравенства и свойства замкнутости в линейных нормированных пространствах. Фан Цюй (Linear inequalities and closure properties in normed linear spaces. Fan Ky), Semin. Analyt. Funct. Vol. 2. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 202—212 (англ.)

Приводятся без доказательств некоторые теоремы о линейных неравенствах, а также различных типах полноты последовательностей элементов в линейных нормированных пространствах с приложением к теории аналитических функций. Доказательства этих результатов содержатся в работах автора (РЖМат, 1958, 4835; совместно с Дэвисом — РЖМат, 1960, 5498). Ю. А. Шашкин

10553. Одна теорема о следах. Лион (Un théorème de traces; applications. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 22, 2259—2261 (франц.)

Рассматривается следующая схема: E — пространство Банаха, $\Lambda_i(i=1,2,\ldots,\nu)$ — неограниченные операторы, определенные на $D(\Lambda_i)\subset E$, являющиеся производящими операторами сильно непрерывных полугрупп $t\to G_i(t)$ таких, что $G_iG_j=G_jG_i(i,j=1,2,\ldots,\nu)$.

Пусть α и p — фиксированные числа такие, что $1\leqslant p\leqslant\infty$, $-\frac{1}{p}<\alpha<1-\frac{1}{p}$. Определяются следующие Банаховы пространства: E^k — пересечение областей определения операторов $\Lambda^q=\Lambda_1^{q_1}\cdot\Lambda_2^{q_2}\cdots\Lambda_\nu^{q_\nu}$ $(q=(q_1,q_2,\ldots q_\nu);|q|=\sum_{i=1}^{\nu}q_i=k)$, снабженное нормой $\|e\|_{E^k}=\|e\|_E+\sum_{|q|=k}\|\Lambda^q e\|_E$; $W^m=W^m(p,\alpha,\Lambda_i,E)$ — пространство всех таких функций $n(\cdot)$, определенных на $(0,\infty)$ со значениями из E, причем $D_t^j u(t)\in E^{m-j}$ для $0<t<\infty$, $j=0,1\ldots m$, и

$$\|u\|_{W^m}=\Big(\sum_{j=0}^{m}\int_0^\infty t^{\alpha p}\|D_t^j u(t)\|_{E^{m-j}}^p dt\Big)^{1/p}<\infty$$

(D_t^j — производная в смысле обобщенных векторных функций); $T^0=T^0(p,\alpha,\Lambda i,E)$ — пространство всех таких $e\in E$, что $\|e\|_{T^0}=\|e\|_E+\Big(\sum_{i=1}^{\nu}\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\|G_i(t)e-e\|^p dt\Big)^{1/p}<\infty$; $T^k=T^k(p,\alpha,\Lambda_i,E)$ — пространство всех таких $e\in E^k$, что $\Lambda^q e\in T_0$ для $|q|=k$ с нормой $\|e\|_{T^k}=\sum_{|q|=k}\|\Lambda^q e\|_{T^0}$. Приводятся следующие результаты:

Теорема 1. Формула $Au=\{u(0),u^1(0),\ldots,u^{m-1}(0)\}$ определяет непрерывное линейное преобразование пространства W^m на все пространство $T^{m-1}\times T^{m-2}\times\ldots\times T^0$.

Теорема 2. Пусть вместе со схемой $E,\Lambda_i(i=1,2,\ldots,\nu)$ E^k,T^k,W^k, рассматривается аналогичная другая схема $\widetilde{E},\widetilde{\Lambda}_i(i=1,2,\ldots,\widetilde{\nu}),\widetilde{E}^k,\widetilde{T}^k,\widetilde{W}^k$; тогда если π — линейный непрерывный оператор из E^k в $\widetilde{E}^k$ $(k=0,1,\ldots,m)$, то π линейно и непрерывно отображает пространства T^k в $\widetilde{T}^k$ для $0<k<m$. В случае $E=L^q(R^\nu)$, $\Lambda_i=\frac{\partial}{\partial x_i}(i=1,2,\ldots,\nu)$ получаются некоторые ранее известные теоремы о пространствах Соболева.

A. Pełczyński

10554. О квазигармонических операторах. Мак-Нерни (Concerning quasi-harominc operators. Mac Nerney J. S.), J. Elisha Mitchell Scient. Soc., 1957, **73**, № 2, 257—261 (англ.)

Пусть S означает полное линейное нормированное пространство, $Q\Phi(S)$ — класс „генераторов", т. е. функций $F(t)$ вещественного аргумента (со значениями в пространстве линейных операторов из S в S), обладающих свойствами: а) ограниченность вариации на каждом конечном промежутке; б) идемпотентность скачков слева и справа в каждой точке. $QH(S)$ означает класс квазигармонических операторов (РЖМат, 1957, 642). Функции этого класса имеют представление $M(s,t)=\prod_s^t(I+dF)$ $(M\in QH(S),\ F\in Q\Phi(S))$, что записывается так: $M=E(F)$.

Доказывается формула, являющаяся аналогом известной формулы для матрицанта суммы двух матриц (РЖМат, 1953, 593К).

Основной результат: Пусть S_1 и S_2 — два полных нормированных пространства, T — линейный оператор из S_1 в S_2. Пусть, далее, функция $F\in Q\Phi(S_1\times S_2)$ имеет вид: $F(u)=\begin{pmatrix}0 & W(u)\\ TW(u)T & 0\end{pmatrix}$ и $M=E(F)$ $(M\in QH(S_1\times S_2))$. Тогда $WT\in Q\Phi(S_1)$ и четыре составляющих оператора M связаны соотношениями $M_{11}\pm M_{12}T=E(\pm WT)$, $M_{22}T\pm M_{21}=TE(\pm WT)$. В случае, когда $S_1=S_2$ и T есть оператор умножения на мнимую единицу, эти соотношения дают „тригонометрическую" форму M:

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}[E(iW)+E(-iW)] & \frac{1}{2i}[E(iW)-E(-iW)]\\ -\frac{1}{2i}[E(iW)-E(-iW)] & \frac{1}{2}[E(iW)+E(-iW)]\end{pmatrix}.$$

М. К. Гавурин

10555. Системы определителей. Сикорский (Determinant systems. Sikorski R.), Studia math., 1959, **18**, № 2, 161—186 (англ.)

Дано систематическое изложение алгебраической теории определителей для линейного уравнения $Ax=x_0$

(в пространстве X) и сопряженного уравнения $\xi A = \xi_0$ (в сопряженном пространстве Ξ). Линейные (в общем случае бесконечномерные) пространства X и Ξ определены вполне симметричным образом и играют всюду симметричную роль; в связи с этим эндоморфизм A в X и его сопряженный в Ξ рассматриваются как билинейные функционалы на $\Xi \times X$. В кольце $\mathfrak{A}$ всех билинейных функционалов выделяется класс фредгольмовых функционалов, дающих фредгольмовы эндоморфизмы в X и в Ξ (т. е. такие эндоморфизмы, что для соответствующих им уравнений имеют место теоремы Фредгольма). Рассматривается подкольцо $\mathfrak{B}$ кольца $\mathfrak{A}$ такое, что: 1) $I \in \mathfrak{B}$ и $K \in \mathfrak{B}$, где I — единичный функционал, K — любой конечномерный функционал; 2) если $A \in \mathfrak{B}$ и A^{-1} существует, то $A^{-1} \in \mathfrak{B}$ (существование A^{-1} означает, что A отображает X взаимно однозначно на всё X). Для некоторых A из $\mathfrak{B}$ вводится понятие системы определителей $\{D_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, которая играет роль, аналогичную роли определителя и миноров Фредгольма; метод введения $\{D_n\}$ аксиоматический — в качестве определения D_n постулируются некоторые соотношения, известные из классической теории. В согласии с методом Лежанского (РЖМат, 1955, 351, 352), D_n истолковывается как $2n$ — линейный функционал на $\Xi^n \times X^n$ (D_0 есть скаляр), в отличие от более сложного истолкования Гротендика (РЖМат, 1958, 479) и Растона (Ruston A. F. Proc. London Math. Soc., 1951, **53**, № 2, 327 — 384). Основным результатом, устанавливаемым в работе, является теорема о том, что $A \in \mathfrak{B}$ имеет систему определителей в том и только том случае, когда A типа Фредгольма, и тогда $\{D_n\}$ определяется единственным образом с точностью до постоянного множителя $\neq 0$. Кроме того, выводится формула для D_n, дающая связь между истемой $\{D_n\}$ и решениями рассматриваемых уравнений; в случае обратимости A, эта формула была получена (в другой формулировке и для специального случая) Растоном (РЖМат, 1954, 3004). Примеры систем определителей для случая, когда X, Ξ — банаховы пространства, имеются (при некоторых предпосылках относительно A) у Лежанского (РЖМат, 1955, 352), а также (при более ограничительных предпосылках относительно A) у Растона (РЖМат, 1954, 3004) и Гротендика (РЖМат, 1958, 479).

С. Н. Крачковский

10556. Пространство мультипликаторов типа $L^p(-\infty, \infty)$. Краббе (A space of multipliers of type $L^p(-\infty, \infty)$. Krabbe Gregers L.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 3, 729—737 (англ.)

V_∞ — множество функций одной переменной, определенных в $(-\infty, \infty)$, имеющих ограниченную вариацию и равных нулю на бесконечности; L^p, $p > 1$ — множество функций, p-е степени которых суммируемы в $(-\infty, \infty)$; L^0 — множество ступенчатых функций с компактным носителем. Функция $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, называется мультипликатором класса L^p, если для любого $x \in L^0$ интеграл

$$B_p(x,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\lambda\theta} f(\theta)d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\theta} x(t)dt \qquad (1)$$

существует, и $\sup_{\|x\|_{p'}=1} \|B_p(x,f)\|_p < \infty$. Символ $\|\ \|_p$ означает норму в L^p. Доказывается, что всякая функция из V_∞ есть мультипликатор типа L^p; при этом $\|B_p(x,a)\|_p \leqslant \frac{1}{2} c_p \|x\|_p \|a\|_v$, где $\|a\|_v$ означает полную вариацию функции $a(t)$ на всей числовой оси, а c_p есть норма в L_p сингулярного интегрального оператора с ядром Коши. Эта теорема представляет собой некоторое усиление для частного случая одной независимой переменной теоремы референта о мультипликаторах интегралов Фурье (РЖМат, 1958, 4824). Из других результатов статьи отметим следующий. Пусть функция $f(t)$ одновременно суммируема и имеет ограниченную вариацию $(-\infty, \infty)$. Тогда интеграл (1) можно представить в виде сингулярного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \frac{F(\theta - \lambda)}{\theta - \lambda} d\theta,$$

в котором F есть преобразование Фурье—Стилтьеса от f.

Примечание референта. Автор утверждает, что его определение мультипликатора несколько шире аналогичного определения референта. На самом деле оба определения тождественны.

С. Г. Михлин

10557. О непрерывности линейных операций в пространствах Сакса с применением к теории суммирования. Орлич (On the continuity of linear operations is Saks spaces with an application to the theory of summability. Orlicz W.), Studia math., 1957, **16**, № 1, 69—73 (англ.)

Автор доказывает сначала три теоремы о поведении линейных операций в пространствах Сакса. Они сложно формулируются и потому не могут быть изложены в реферате.

В качестве применений доказано несколько результатов относительно методов суммирования Теплица. Пусть методы Теплица $A^1, A^2, \ldots$ регулярны для сходящихся к 0 последовательностей. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех ограниченных последовательностей, одновременно суммируемых к 0 при всех методах A^n и пусть B — метод Теплица, регулярный для O-сходящихся последовательностей. Тогда преобразованные последовательности $B_i(x)$ либо сходятся к 0 для всякой $x \in \mathfrak{A}$, либо множество $\{B_i(x)\}_{x \in \mathfrak{A}}$ не сепарабельно в пространстве ограниченных последовательностей. При тех же предположениях, если каждая последовательность из $\mathfrak{A}$ B-суммируема, то $B(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Если A^n удовлетворяет вышеуказанным предположениям, то множество всех ограниченных расходящихся последовательностей A^n, суммируемых к 0 для $n = 1, 2, \ldots$, либо пусто, либо не сепарабельно в пространстве ограниченных последовательностей.

A. Alexiewicz

10558. О собственных и присоединенных функциях оператора дифференцирования. Любич Ю. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 94—103

Рассматривается оператор дифференцирования D_σ:

$$D_\sigma f(x) = if'(x) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi), \qquad (1)$$

определенный на некотором многообразии функций пространства $C(-\pi, \pi)$, удовлетворяющих „краевому" условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\sigma(x) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\sigma(x)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[-\pi, \pi]$, причем предполагается, что концы интервала являются точками роста $\sigma(x)$. В этих предположениях оператор (1) обладает бесконечным числом собственных значений, являющихся корнями уравнения

$$S(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda x} d\sigma(x) = 0. \qquad (3)$$

Если λ_0 — кратный нуль целой функции $S(\lambda)$, то оператор (1) наряду с собственной функцией $e^{-i\lambda_0 x}$ имеет еще цепочку присоединенных $xe^{-i\lambda_0 x}, \ldots, x^{k-1}e^{-i\lambda_0 x}$.

Через E_σ обозначается система собственных и присоединенных функций оператора (1), через E'_σ — ортого-

нальное дополнение к E_σ в пространстве функционалов над $C(-\pi, \pi)$, т. е. в пространстве $V(-\pi, \pi)$ функций ограниченной вариации. Линейная размерность E'_σ называется дефектом системы E_σ и обозначается через $\operatorname{def} E_\sigma$. Изучается зависимость $\operatorname{def} E_\sigma$ от дифференциальных свойств функций $\sigma(x)$.

Очевидно, что функция ограниченной вариации $\tau(x)$ принадлежит E'_σ тогда и только тогда, когда частное

$$Q(\lambda) = T(\lambda)/S(\lambda), \tag{4}$$

где

$$T(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda x}\, d\tau(x) \tag{5}$$

является целой функцией. Исследуя функцию (4), автор приходит к следующей теореме: Дефект системы E_σ равен порядку многообразия $\{Q(\lambda)\}$. В частности, дефект конечен и равен $N+1$ тогда и только тогда, когда многообразие $\{Q(\lambda)\}$ состоит из всех полиномов степени не выше N. Находятся необходимые и достаточные условия, налагаемые на функцию $\sigma(x)$, при которых соответствующая система E_σ имеет наперед заданный дефект δ, $1 < \delta < \infty$. Эти условия формулируются в терминах функций $\tilde{\sigma}(x)$, которым соответствует дефект, равный 1.

Класс функции $\tilde{\sigma}(x)$ полностью не описан; указаны лишь достаточные условия принадлежности функции к этому классу.

Имеется также ряд других результатов. В. Б. Лидский

10559. Замечания к теории возмущений. Занен (A note on perturbation theory. Zaanen A. C.), Nieuw arch. wiskunde, 1959, 7, № 2, 61—65 (англ.)

Обсуждается доказанная в работе Тауда (РЖМат, 1959, 9258) теорема о спектре близких операторов в банаховом пространстве. Автор передоказывает некоторые леммы и делает ряд замечаний, расширяющих условия теоремы. В. Б. Лидский

10560. Характеристика алгебры всех вещественнозначных непрерывных функций на вполне регулярном пространстве. Андерсон, Блэр (Characterizations of the algebra of all real-valued continuous functions on a completely regular space. Anderson Frank W., Blair Robert L.), Illinois J. Math., 1959, 3, № 1, 121—133 (англ.)

Пусть X—топологическое пространство и $C(X)$—множество всех вещественно-значных непрерывных функций на X. Для компактных пространств X хорошо известны различные алгебраические характеристики множества $C(X)$. Именно: $C(X)$ можно рассматривать, например, как кольцо (алгебру) с единицей, как векторную структуру и т. д. Рассматривая произвольную алгебру с единицей или векторную структуру и т. д., можно привести необходимые (и достаточные) условия для того, чтобы она была изоморфна $C(X)$. Авторы получают ряд характеристик такого рода для случая, когда X—вполне регулярное топологическое пространство (а не только компакт). Приведены также новые характеристики и для случая компакта. Е. А. Горин

10561. Выпуклые и псевдопростые идеалы в кольцах непрерывных функций. Гилман, Колс (Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions. Gillman Leonard, Kohls Carl W.), Math. Z., 1960, 72 № 5, 399—409 (англ.)

Пусть X — топологическое пространство. $C(X)$ — кольцо непрерывных вещественных функций на X. Идеал $I \subset C(X)$ называется простым, если из $ab \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$. Идеал I называется псевдопростым, если из $ab = 0$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$. Идеал I называется (абсолютно) выпуклым, если из $(|a| \leqslant |b|)$, $0 \leqslant a \leqslant b$, $b \in I$ следует, что $a \in I$. Один из основных результатов реферируемой работы составляет теорема: Идеал $I \subset C(X)$ абсолютно выпуклый тогда и только тогда, когда он есть пересечение (абсолютно) выпуклых псевдопростых идеалов. Е. А. Горин

10562. Выпуклая оболочка сдвигов функции в L^1. Рейтер (The convex hull of translates of a function in L^1. Reiter H.), J. London Math. Soc., 1960, 35, № 1, 5—16 (англ.)

Доказана следующая теорема: Пусть G — локально компактная группа и g — замкнутая абелева подгруппа G такая, что существует инвариантная мера на однородном пространстве G/g. Тогда для каждой $f(x) \in L^1(G)$

$$\inf \int_G \left| \sum_{n=1}^{N} c_n f(x\sigma_n) \right| dx = \int_{G/g} dx' \left| \int_g f(x\xi)\, d\xi \right|, \tag{1}$$

где N — произвольное целое положительное число, $c_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{N} c_n = 1$, σ_n — элементы группы g, dx — левоинвариантная мера Хаара на G, dx' — инвариантная мера на левых классах G/g, $d\xi$ — мера Хаара на g. Эти меры нормированы так, что

$$\int_{G/g} dx' \int_g f(x\xi)\, d\xi = \int_G f(x)\, dx$$

для любой $f(x) \in L^1(G)$. Если G абелева и $g = G$, то правая часть (1) равна $\int_G |f(x)|\, dx$. Доказательство основано на леммах, имеющих самостоятельный интерес. Б. М. Левитан

10563. Операторный интеграл Хеллингера. Шмульян Ю. Л., Матем. сб., 1959, 49, № 4, 381—430

Пусть $H = H_1 \oplus H_2$ — гильбертово пространство и A_{12}, A_{21}, A_{22} — линейные ограниченные операторы, действующие соответственно из H_2 в H_1, из H_1 в H_2 и из H_2 в H_2, и обладающие следующими свойствами

$$A_{12}^* = A_{21},\ A_{22} \geqslant 0. \tag{1}$$

В §§ 1, 2 изучается множество всех линейных ограниченных самосопряженных операторов X, действующих в H_1, и таких, что оператор A, определенный в H матрицей $A = \begin{pmatrix} X & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, является неотрицательным. При естественном условии

$$\sup_{g \in H_2} \frac{\|A_{12}g\|^2}{(A_{22}g, g)} < +\infty \tag{2}$$

это множество не пусто и в нем существует минимальный оператор, обозначаемый через $\hat{\mathfrak{A}}$. Если выполняется условие (2) и оператор A_{22} имеет ограниченный обратный, то $\hat{\mathfrak{A}} = A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

В § 3 исследуется вопрос о точных гранях множества самосопряженных ограниченных операторов. Доказывается интегрируемость в смысле А. Н. Колмогорова всякой полуаддитивной сверху оператор-функции.

§ 4 посвящен исследованию операторного интеграла Хеллингера, который вводится следующим образом. Пусть R — кольцо подмножеств некоторого абстрактного пространства и $A_{12}(M)$, $A_{21}(M)$, $A_{22}(M)$ $(M \in R)$ вполне аддитивные оператор-функции, удовлетворяющие при каждом $M \in R$ условиям (1) и (2). Система $\mathfrak{A}(M) = \begin{pmatrix} A_{12}(M) \\ A_{21}(M) \quad A_{22}(M) \end{pmatrix}$ называется интегрируемой по Хеллингеру на множестве M_0 $(\in R)$, если интегрируема на этом множестве оператор-функция $\hat{\mathfrak{A}}(M)$. Интеграл $\int_{M_0} \hat{\mathfrak{A}}(dM) = \sup \sum_{k=1}^{n} \hat{\mathfrak{A}}(M_k)$, где supremum берется

по всевозможным конечным разбиениям множества M_0 на непересекающиеся попарно множества M_k ($K=1,2,\ldots,n$), называется интегралом Хеллингера системы $\mathfrak{A}(M)$ и символически обозначается через

$$\int_{M_0} A_{12}(dM)\,A_{22}^{-1}(dM)\,A_{21}(dM).$$

В § 5 операторный интеграл Хеллингера применяется к исследованию операторных матриц-функций, гармонических в единичном круге. Результаты, полученные в § 6 с помощью операторного интеграла Хеллингера, позволяют установить признаки того, что некоторое подпространство является порождающим для самосопряженного (вообще говоря, неограниченного) оператора.

Краткое изложение части результатов содержится в статье автора (РЖМат, 1959, 9270). Автор сообщил референту о следующих опечатках, имеющихся в статье: 1. На стр. 402 (в части тиража) отсутствует последняя строка, которая должна иметь вид:

$$\sup_{p\in P}(A(p)f, f) \equiv \alpha(f) < \infty. \qquad (3)$$

2. На стр. 426, 4 строка сверху, напечатано $E(M)-E(M)\times E(N)=\widetilde{E}(M)-E(N)\widetilde{E}(M)$; должно быть $\widetilde{E}(M)-\widetilde{E}(M)\times E(N)=\widetilde{E}(M)-E(N)\widetilde{E}(N)=0$. 3. На стр. 393, 13 строка снизу, напечатано $\widetilde{A}^{(n)} \leqslant \widetilde{A}^{n}$; должно быть $\widetilde{A}^{(n)} \leqslant A^{n}$. И. Ц. Гохберг

10564. Самосопряженность и спектр операторов Штурма — Луивилля. Бринк (Self-adjointness and spectra of Sturm — Liouville operators. Brinck Inge), Math. scand., 1959, 7, № 1, 219—239 (англ.)

Рассматривается дифференциальный оператор

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad -\infty < x < \infty, \qquad (1)$$

область определения которого составляют функции $u\in L^2(-\infty, +\infty)$, обладающие абсолютно непрерывной в каждом конечном интервале производной, и такие, что $Au\in L^2$. Устанавливаются некоторые новые достаточные условия, налагаемые на функцию $q(x)$, при которых оператор A является самосопряженным. Кроме того, обобщается известный критерий А. М. Молчанова дискретности спектра оператора (1) на случай, когда функция $q(x)$ в (1) не является ограниченной снизу. Это последнее условие заменяется следующим требованием: существует постоянная $c>0$ такая, что

$$\int_I q(x)\,dx \geqslant -c, \qquad (2)$$

где I — любой интервал, длина которого $\leqslant 1$.

Доказывается, что при выполнении условия (2) для дискретности спектра оператора (1), необходимо и достаточно, чтобы при любом $\lambda>0$ $\lim\limits_{|a|\to\infty}\inf\int_a^{a+\lambda} q(x)dx=+\infty$.

Доказывается, что условие (2) достаточно для самосопряженности оператора A. Более того, справедлива следующая теорема: Пусть $\omega(x)$ — положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что функции $\omega'(x)$ и $\omega''(x)$ также ограничены и $\int_0^{\infty}\omega(x)dx = \int_{-\infty}^{0}\omega(x)\,dx=\infty$. Тогда если $\int_I \omega(x)\,q(x)\,dx \geqslant -c$, то оператор (1) — самосопряженный. Указанными условиями, таким образом, устанавливается самосопряженность и дискретность спектра для случая не ограниченных снизу, но быстро осциллирующих функций.

В. Б. Лидский

10565. О существенном спектре краевых задач для уравнений в частных производных. Вольф (On the essential spectrum of partial differential boundary problems. Wolf František), Communs Pure and Appl. Math., 1959, 12, № 2, 211—228 (англ.)

Статья состоит из двух частей, причем первая („Абстрактные результаты") не содержит новых предложений, а, как указывает сам автор во введении, специализирует на случай операторов в гильбертовом пространстве (и в связи с этим упрощает доказательства) ряд теорем из работы И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна (РЖМат, 1959, 4885) и, в частности, получает новые доказательства теорем о спектрах возмущений самосопряженных операторов A в гильбертовом пространстве A-вполне непрерывными операторами. Во второй части эти теоремы применяются к исследованию спектров некоторых краевых задач для уравнений в частных производных. Приведем в качестве примера один из основных результатов. В n-мерном евклидовом пространстве рассматривается область G с границей Γ (на последнюю налагаются некоторые ограничения). Далее вводятся формальные дифференциальные операторы $B=\sum_{|\mu|=|\nu|=m} D^{\mu}a_{\mu\nu}D^{\nu}$ и $C=\sum_{|\mu|<2m} p_{\mu}D^{\mu}$, где μ (соответственно ν) — мультииндекс $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ длины $|\mu|=\sum\mu_l$, $\mu_l\geqslant 0$, а D^{μ} (соответственно D^{ν}) определяются как $D=\partial^{|\mu|}/dx_1^{\mu_1}\ldots dx_n^{\mu_n}$. Предполагается, что внутри области G оператор B удовлетворяет условию эллиптичности. Точки границы Γ, где это условие нарушается, а также изолированные точки границы и точки, где нарушаются естественные условия гладкости коэффициентов $a_{\mu\nu}$, называются сингулярными по отношению к B точками. В область определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B включаются только те функции, которые на границе Γ в окрестности каждой ее не сингулярной точки Γ аннулируются вместе со своими $m-1$ нормальными производными. Существенным спектром $\sigma_e(A)$ самосопряженного оператора A называется множество, остающееся после удаления из спектра $\sigma(A)$ изолированных собственных значений конечной кратности. Если оператор $A=B+C$, где B и C определены выше, причем $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(B)$ и $p_{\mu}(x)=0$ в окрестности каждой точки границы, сингулярной по отношению к эллиптическому самосопряженному оператору B, то существенный спектр $\sigma_e(A)=\sigma_e(B)$, т. е. лежит на действительной оси, а вне ее спектр $\sigma(A)$ состоит из дискретного множества собственных значений, которым отвечают конечномерные собственные подпространства. Получены также некоторые достаточные условия дискретности спектра оператора. И. С. Иохвидов

10566. Некоторые гильбертовы пространства целых функций. Бранджес (Some Hilbert spaces of entire functions. Branges Louis de); Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 5, 840—846 (англ.)

Пусть H — гильбертово пространство, состоящее из целых функций, содержащее ненулевой элемент и обладающее следующими свойствами: 1) если $f(z)\in H$ и w — нуль функции $f(z)$, то функция $f(z)(z-\overline{w})/(z-w)$ также входит в H и имеет ту же норму; 2) если w — не вещественное число, то линейный функционал $\Phi(f)=f(w)$ ($f\in H$) непрерывен; 3) если $f(z)\in H$, то функция $\overline{f(\overline{z})}$ также входит в H и имеет ту же норму. Тогда существует такая целая функция $E(z)$, что $|E(\overline{z})|<|E(z)|$ при $y>0$ ($z=x+iy$) и что H состоит из тех и только тех целых функций $f(z)$, для которых $\|f\|_E^2=\int|f(t)|^2|E(t)|^{-2}dt<\infty$ и $|f(z)|\leqslant(4\pi y)^{-1}\|f\|_E^2(|E(z)|^2-|E(\overline{z})|^2)$. Функция $E(z)$ может быть выбрана так, чтобы $\|f\|_E$ совпадала с нормой в пространстве H.

А. С. Маркус

10567. Системы и ряды элементов с неограниченными матрицами Грама. Талдыкин А. Т. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 6, 174—188

Изучаются системы элементов $\{\varphi_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ гильбертова пространства, не обладающие свойством ортогональности. Случай, когда матрица Грама системы $\{\varphi_k\}$, т. е. матрица $\Phi = \|(\varphi_i, \varphi_k)\|$ ограничена, рассмотрен автором раньше (Матем. сб., 1951, **29**, № 1, 79 — 120). Система элементов $\{\varphi_k\}$ называется минимальной, если из нее нельзя выбросить ни одного элемента без того, чтобы пространство, порожденное элементами φ_k, не уменьшилось. Оказывается, что матрица Грама минимальной системы представима в виде $\Phi = dQd$, где d — диагональная матрица с положительными диагональными элементами d_k и Q — ограниченная матрица, имеющая ограниченную обратную матрицу. Минимальная система $\{\varphi_k\}$ характеризуется тем, что для такой системы существует биортогональная в ней система элементов $\{\varphi^k\}$. Рассматривается класс K таких минимальных систем, для которых матрицы Φ и $\Phi' = \|(\varphi^i, \varphi^k)\|$ взаимно обратны. Приведем следующие основные результаты автора, первый из которых представляет собой обобщение известной теоремы Фишера — Рисса:

1) Для того чтобы последовательность чисел $\{A_k\}$ служила системой компонент некоторого элемента f относительно системы $\{\varphi_k\}$ класса K (т. е. $A_k = (f, \varphi_k)$), необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (A_k/d_k)^2$.

2) Для каждого элемента f из пространства, порожденного элементами системы $\{\varphi_k\}$ класса K, справедливы (единственные) разложения в биортогональные ряды

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \varphi_k,\ A^k = (f, \varphi^k),\quad f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi^k,\ A_k = (f, \varphi_k)$$

в смысле сильной сходимости. Г. Ф. Кангро

10568. Плотность множества экстремальных обобщенных резольвент симметрического оператора. Гилберт (The denseness of the extreme points of the generalized resolvents of a symmetric operator. Gilbert Richard C.), Duke Math. J., 1959, **26**, № 4, 683—691 (англ.)

Как известно, множество $\mathfrak{R}$ всех обобщенных резольвент $R(\lambda)$ симметрического оператора A является выпуклым. Обобщенная резольвента $R(\lambda)$ называется экстремальной, если ее нельзя представить в виде $R(\lambda) = \mu_1 R_1(\lambda) + \mu_2 R_2(\lambda)$, где $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda) \in \mathfrak{R}$, $R_1(\lambda) \neq R_2(\lambda)$, μ_1 и μ_2 — положительные числа, сумма которых равна 1. М. А. Наймарком (Изв. АН СССР, Сер. матем., 1947, **11**, № 4, 327 — 344) установлено, что обобщенные резольвенты, порожденные так называемыми конечномерными самосопряженными расширениями оператора A, являются экстремальными.

Пусть дефектные числа замкнутого симметрического оператора A равны и конечны. Основываясь на результатах М. А. Наймарка (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, **4**, № 3, 277 — 318) и референта (Докл. АН СССР, 1950, **71**, № 2, 241 — 244; 1951, **78**, № 2, 217 — 220), автор показывает, что множество обобщенных резольвент $R(\lambda)$, порожденных всевозможными конечномерными расширениями оператора A, является плотным в $\mathfrak{R}$ в смысле равномерной сходимости операторных функций параметра λ на замкнутых ограниченных множествах в комплексной плоскости, не содержащих вещественных значений λ. Для случая симметрического дифференциального оператора второго порядка на полуоси близкий результат установлен ранее иным путем И. М. Глазманом и П. Б. Найман (РЖМат, 1956, 2997).

В работе используется понятие параллельного проектора $K(\lambda, \lambda_0)$ $(\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0)$ замкнутого эрмитова оператора A, введенное референтом (Докл. АН СССР, 1949, **67**, № 4, 611 — 614). Для любого невещественного λ из полуплоскости $\Pi(\lambda_0)$ (верхней или нижней), содержащей λ_0, $K(\lambda, \lambda_0)$ есть оператор из $\mathfrak{M}(\lambda_0)$ в $\mathfrak{M}(\bar{\lambda})$, определяемый условием: $\varphi - K(\lambda; \lambda_0)\varphi \in (A - \lambda E) D(A)$; $\mathfrak{M}(\mu)$ обозначает дефектное подпространство оператора A: $\mathfrak{M}(\mu) = \mathfrak{G} \ominus (A - \mu E) D(A)$. Доказывается теорема об аппроксимации параллельного проектора эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m) $(m < \infty)$ параллельными проекторами эрмитовых операторов, действующих в конечномерных гильбертовых пространствах.

Примечание референта. Предлагаемый в работе вывод матричного представления параллельного проектора лишь несущественно отличается от соответствующего вывода, данного ранее референтом (Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-т, 1952, **11**, 17 — 66). Полученная матричная функция параметра λ после умножения на $\zeta = \dfrac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0}$ совпадает с характеристической матрицей-функцией от ζ, впервые введенной для случая изометрического оператора с равными конечными дефектными числами М. С. Лившицем (Докл. АН СССР, 1947, **58**, № 1, 13 — 15). А. В. Штраус

10569. К теории расширений J-симметрических операторов. Жихарь Н. А., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 4, 352—365 (рез. англ.)

Пусть J — некоторый оператор сопряжения в гильбертовом пространстве H, а A — линейный оператор с плотной в H областью определения D_A. A называется J-симметрическим, если $(A\varphi, J\psi) = (\varphi, JA\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in D_A$, что эквивалентно соотношению $A \subset JA^*J$. Если же $A = JA^*J$, то оператор A называется J-самосопряженным.

Теорема 2. Всякий J-симметрический оператор A с точкой регулярного типа λ_0 можно расширить до J-самосопряженного A', причем так, что λ_0 будет регулярной точкой для A'. Такие расширения автор называет корректными. Характеристика всех корректных J-самосопряженных расширений J-симметрического оператора с точкой регулярного типа λ_0 дается с помощью аналога второй формулы Неймана (теорема 5).

§ 2 посвящен приложению абстрактной теории расширений, развитой в § 1, к одномерной краевой задаче на полуоси. Оператор J в пространстве $L^2(0, \infty)$ определяется равенством $J[f(x)] = \overline{f(x)}$. Изучается замыкание L дифференциального оператора L', порожденного выражением

$$l[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (d^{n-k}/dx^{n-k})[p_k(x)(d^{n-k}y/dx^{n-k})].$$

Здесь $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — комплекснозначные коэффициенты, а область определения оператора L' состоит из финитных функций $\varphi(x)$, абсолютно непрерывных вместе со своими квазипроизводными до $(2n-1)$-го порядка, удовлетворяющих условиям $\varphi(0) = \varphi^{[1]}(0) = \ldots = \varphi^{[2n-1]}(0) = 0$. Операторы L' и L — J-симметрические.

Теорема 6. Дефектное число m оператора L для любой его точки регулярного типа (т. е. размерность ортогонального дополнения к линеалу $(L - \lambda_0 I) D_L$) удовлетворяет неравенствам $n \leqslant m \leqslant 2n$. Отыскав резольвенту некоторого специальным образом построенного корректного J-самосопряженного расширения $\hat{L}$ оператора L, автор применяет это расширение для получения описания всех корректных расширений при помощи граничных условий.

Теорема 8. Пусть в некоторой точке λ_0 регулярного типа оператора L, m — его дефектное число

$(n \leqslant m \leqslant 2n)$, а функции $\varphi_k(x;\lambda) \in L^2(0,\infty)$ $(k=1,\ldots,m)$ образуют ортонормированную систему решений уравнения $l[u]-\lambda_0 u=0$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между классом всех корректных расширений (J-самосопряженных) $\widetilde{L}_b$ оператора L и классом всех комплексно-симметрических матриц $b=\|b_{kj}\|_1^m$, определяемое формулой $D_{\widetilde{L}_b}=D_L+\Gamma_b$, где Γ_b — линейная оболочка элементов w_k вида $w_k=(\hat{L}-\lambda_0 I)^{-1}\overline{\varphi_k(x;\lambda_0)}+\sum_{j=1}^{m} b_{kj}\varphi_j(x;\lambda_0)$. Область определения $D_{\widetilde{L}_b}$ оператора $\widetilde{L}_b$ состоит из всех тех функций $\varphi \in D_{JL^*J}$, которые удовлетворяют граничным условиям $[\varphi, w_k]_0^\infty=0$ $(k=1,2,\ldots,m)$ (теорема 9).

Имеются опечатки, затрудняющие чтение статьи, особенно в формулировке теоремы 5 (формула (21)) и в строке, следующей за формулой (36). И. С. Иохвидов

10570. Ограниченные операторы, перестановочные с линейным дифференциальным оператором второго порядка. Луценко И. Е., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 75—78

Рассматривается оператор

$$Ly=y''-q(x)y, \qquad (1)$$

действующий в гильбертовом пространстве $L^2(-l,l)$, $q(x)$ — вещественная функция. Оператор (1) вводится на максимальной области определения (без граничных условий). Находится общий вид ограниченных операторов, перестановочных с L. Кроме того, в предположении, что $q(x)$ — четная функция, находится общий вид перестановочных с L унитарных операторов и инволюций. Так, например, все перестановочные с L (при $q(-x)\equiv q(x)$) унитарные операторы имеют вид: $U=e^{i\alpha}E_+\oplus e^{i\beta}E_-$, где α и β — вещественные постоянные, а E_+ и E_- — единичные операторы в подпространстве четных и соответственно нечетных функций.

В. Б. Лидский

10571. Асимптотические ряды для задач на собственные значения с возмущением. Суонсон (Asymptotic perturbation series for characteristic value problems. Swanson C. A.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 2, 591—608 (англ.)

Рассматриваются обыкновенные линейные дифференциальные операторы $L=p_n\frac{d^n}{dx^n}+p_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+p_0$ на полуоткрытом интервале $(0,b]$ $(b>0)$, который в дальнейшем называется основным интервалом. Предполагается, что $p_j(x)\in C^j(0,b]$ и $p_n(x)\neq 0$ на $(0,b]$. Точка $x=0$ предполагается сингулярной для L. Пусть ε — малое положительное число. Обозначим через A_ε оператор, порожденный L и некоторыми однородными граничными условиями в точках $x=\varepsilon$ и $x=b$. Через A обозначим некоторое замыкание оператора L в основном интервале. Оператор A не предполагается самосопряженным, но предполагается, что спектр оператора A имеет по крайней мере одну изолированную точку. Доказывается, что для каждого собственного значения Λ основного оператора существует собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ возмущенного оператора A_ε, которое сходится при $\varepsilon\to 0$ к Λ. Кроме того, для $\lambda(\varepsilon)$ дается асимптотическое разложение. Дается также асимптотическое разложение для соответствующей собственной функции.

Б. М. Левитан

10572. Возмущение собственных значений и собственных элементов для некоторых несамосопряженных операторов. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 2, 251—253

Пусть L_0 — эллиптический, вообще говоря, несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка, и пусть L_1 — дифференциальный оператор порядка не выше второго. Рассматривается оператор

$$L_\varepsilon=L_0+\varepsilon L_1, \qquad (1)$$

определенный на функциях u, которые заданы в ограниченной области D и обращаются на границе Γ этой области в нуль: $u/\Gamma=0$. Пусть $\lambda=0$ — собственное значение оператора L_0 и пусть жорданов базис в соответствующем корневом подпространстве состоит лишь из одной цепочки $u_0,u_1,\ldots,u_n$; $Lu_0=0$; $Lu_i=u_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Пусть, кроме того, z_0 — собственный вектор сопряженного оператора L_0^*: $L_0^*z_0=0$ и пусть

$$(L_1u_0,z_0)\neq 0. \qquad (2)$$

Утверждается, что тогда при достаточно малых ε оператор (1) обладает n различными собственными значениями $\lambda^{(s)}(\varepsilon)$ $(s=1,2,\ldots,n)$, стремящимися при $\varepsilon\to 0$ к нулю. Эти собственные значения представляются сходящимися рядами

$$\lambda^{(s)}(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(s)}\varepsilon^{k/n}, \qquad (3)$$

причем числа $\lambda_1^{(s)}$ являются корнями уравнения $\lambda^n-(L_1u_0,z_0)=0$. Собственным значениям $\lambda^{(s)}(\varepsilon)$ отвечают собственные векторы $v_\varepsilon^{(s)}(x)$ $(s=1,2,\ldots,n)$, представимые рядами

$$v_\varepsilon^{(s)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k^{(s)}(x)\,\varepsilon^{k/n},\ (v_0(x)=u_0(x)); \qquad (4)$$

коэффициенты разложения (3) и (4) могут быть последовательно найдены из рекуррентных соотношений. В случае, если возмущающий оператор более высокого порядка, чем L_0, то в разложении (4) для собственных функций появляются члены типа пограничного слоя. Если же корневое подпространство имеет более сложную структуру (несколько жордановых цепочек), то и в этом случае удается получить с некоторыми усложнениями разложения вида (3) и (4). Соответствующая теорема сформулирована для случая матриц конечного порядка.

В. Б. Лидский

10573. Разложение по собственным функциям несимметрических дифференциальных операторов в частных производных. II. Браудер (Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. II. Browder Felix E.), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 1, 1—22 (англ.)

Полученная в первой части работы (РЖМат, 1959, 5846) теорема разложения типа теоремы Вейля — Планшереля обобщается на более общие пары операторов (L,B).

Пусть L и B — два линейных дифференциальных оператора в частных производных, определенные на открытом множестве G n-мерного евклидова пространства E^n, L' — сопряженный оператор для L, $C_c^\infty(L)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в G, (u,v) — скалярное произведение в $L^2(G)$. Предположим, что оператор B положительный, т. е. $(Bu,u)>0$ для каждой u из $C_c^\infty(G)$. Рассмотрим гильбертово пространство H_B с нормой $\|u\|_B=(Bu,u)^{1/2}$; пусть $[u,v]$ — скалярное произведение в H_B. Минимальной реализацией пары (L,B) в H_B является оператор A_0 с областью определения $C_c^\infty(G)$ и определенный равенством $[A_0u,v]=(Lu,v)$, $u,v\in C_c^\infty(G)$. Если, анало-

гично, A_0^1 есть минимальная реализация пары (L', B) в H_B, то максимальной реализацией пары (L, B) является оператор $A_1 = (A_0')^*$. Обобщенная функция u на G называется собственной функцией первого порядка пары (L, B), соответствующей собственному значению ζ (ζ — комплексное число), если $(L - \zeta B)u = 0$. Для $k > 1$ определение по индукции: u называется собственной функцией порядка k для пары (L, B), соответствующей собственному значению ζ, если $(L - \zeta B)^k u = Bv$, где v — собственная функция пары (L, B), соответствующая ζ порядка $(k-1)$.

В работе выделяется класс операторов, для которых имеет место разложение по определенным выше обобщенным собственным функциям. Б. М. Левитан

10574. О произведении проекторов единичной нормы в прямом произведении операторных алгебр. Томияма (On the product projection of norm one in the direct product of operator algebras. Tomiyama Jun), Tohoku Math. J., 1959, **11**, № 2, 305—313 (англ.)

Известно, что если M_1, M_2, N_1, N_2 — операторные W^*-алгебры, то каждым двум нормальным *-гомоморфизмам $\theta_1: M_1 \to N_1$ и $\theta_2: M_2 \to N_2$ соответствует единственный *-гомоморфизм $\theta: M_1 \otimes M_2 \to N_1 \otimes N_2$ такой, что $\theta(x \otimes y) = \theta_1(x) \otimes \theta_2(y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$. Аналогичная теорема справедлива и для C^*-алгебр. В реферируемой статье доказывается, что соответствующая теорема верна для проекторов единичной нормы: для всяких двух нормальных проекторов единичной нормы $\pi_1: M_1 \to N_1$ и $\pi_2: M_2 \to N_2$ существует единственный проектор $\pi: M_1 \otimes M_2 \to N_1 \otimes N_2$ такой, что $\pi(x \otimes y) = \pi_1(x) \otimes \pi_2(y)$ и норма π равна 1. Доказывается также, что если π_1 и π_2 — точные проекторы (т. е. являются точными на каждом положительном элементе), то π — тоже точный проектор. В качестве следствия из доказанных теорем автор получает следующие утверждения: 1) в каждой алгебре вида $M \otimes N$ существует достаточно много проекторов единичной нормы из $M \otimes N$ на M и N, рассматриваемые как подалгебры $M \otimes 1$ и $1 \otimes N$ алгебры $M \otimes N$; 2) если M и N — две алгебры конечного типа в смысле Диксмье, то $M \otimes N$ — тоже алгебра конечного типа и ее $\mathfrak{q}$-отображение совпадает с произведением $\mathfrak{q}_1 \otimes \mathfrak{q}_2$ соответствующих отображений M и N. А. А. Кириллов

10575. О собственных векторах на гиперболоидах в гильбертовом пространстве. Поволоцкий А. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика 1959, № 4, 126—140

В вещественном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассматриваются гиперболоиды $\gamma_c: (Jx, x) \geqslant c^2$ и гиперболические области $V_c: (Jx, x) \geqslant c^2$, где $J = P_1 - P_2$, $x \in \mathfrak{H}$ (см., например, М. М. Вайнберг, РЖМат, 1955, 3642 и 1957, 5737К). Доказывается лемма 1: V_c слабо замкнута. При помощи данной и других лемм устанавливаются теоремы:

1. Пусть выполнены условия: 1) $\Gamma x = \operatorname{grad} F(x)$, где F — слабо непрерывный и равномерно дифференцируемый в шаре $\|x\| \leqslant R$ пространства $\mathfrak{H}$ функционал, причем $\Gamma 0 = 0$ и $F(0) = 0$; 2) B — линейный самосопряженный положительно определенный и вполне непрерывный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$. 3) Если $r \leqslant \|x\| \leqslant R$, то

$$\|\Gamma x - Bx\| \leqslant K\|x\| < \nu m\|x\| \quad \text{и} \quad \left|F(x) - \frac{1}{2}(Bx, x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1\|x\|^2 < \frac{\nu}{4} m^2 \|x\|^2.$$

Тогда на каждом гиперболоиде γ_c, для которого $r^2 \leqslant c^2 < (\nu - 4K_1)(\nu + 4K_1)^{-1} R^2$, оператор $J\Gamma$ имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, причем $|\lambda - \nu| < 2K_1 + m^{-2}(K + 6K_1)$.

2. Пусть выполнены условия 1) и 2), а в условии 3) $K < \nu m$ и $K_1 < \min\left\{\frac{1}{4}\nu m^2, \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_0) m^2\right\}$, где λ_1 — наименьшее из положительных собственных чисел оператора JB, больших λ_0 (если нет собственных чисел $> \lambda_0$, то $\lambda_1 = \infty$). Тогда на каждом гиперболоиде γ_c, для которого $r^2 \leqslant c^2 < (\nu - 4K_1)(2\lambda_0 - \nu)^{-1} R^2$ оператор $J\Gamma$ имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, причем $|\lambda - \lambda_0| < m^{-2}(K + 4K_1)$. В последнем параграфе установлены предложения о точках бифуркации.

Примечание референта. Вопрос о собственных векторах на гиперболоидах в гильбертовом пространстве был впервые рассмотрен референтом (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 3) и при этом использовалась лемма 1 (РЖМат, 1953, 1222; стр. 676 оригинала). Приведенное здесь доказательство леммы 1 не отличается от доказательства референта. Без упоминания используется и метод, предложенный референтом. М. М. Вайнберг

10576. О дифференцировании в топологических векторных пространствах, определенных над телом комплексных чисел. Иино (Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. Iino Riichi), Proc. Japan Acad., 1959, 35, № 7, 343—348 (франц.)

Пусть E и F — векторные, локально выпуклые, сепарабельные, полные топологические пространства над телом комплексных чисел C. Обозначим через Γ_E и Γ_F множества полунорм, определяющих соответственно топологии пространств E и F. Далее, пусть $C[E, F]$ — пространство всех непрерывных отображений пространства E в F. Пусть $f \in C[E, F]$. Условимся писать $f(x) = o(x^n)$, если для каждой полунормы $q \in \Gamma_F$ существует открытая окрестность V нуля в E, полунорма $p \in \Gamma_E$, числовая позитивная функция $\varepsilon_q(x) \to 0$ при $x \to 0$ и целое число $n > 0$ такие, что $q(f(x)) \leqslant \varepsilon_q(x)[p(x)]^n$ для всех $x \in V - \{0\}$. Исходя из этих определений доказывается

Теорема 1. 1) Если $f, g, h \in C[E, F]$, $f - g = o(x^n)$ и $g - h = o(x^n)$, то $f - h = o(x^n)$; 2) если $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C[E, F]$, $f_1 - g_1 = o(x^n)$ и $f_2 - g_2 = o(x^n)$, то для произвольных комплексных чисел α и β будем иметь $(\alpha f_1 + \beta f_2) - (\alpha g_1 + \beta g_2) = o(x^n)$, 3) если $f, g \in C[E, F]$ и T — некоторое непрерывное линейное отображение E на F и

$$f(x) - g(x) = o(x^n), \quad \text{то} \quad f(Tx) - g(Tx) = o(x^n).$$

Пусть V — некоторая окрестность нуля в E, x_0 — точка в E, $U = x_0 + V$ — окрестность точки x_0 и f — отображение E в F. Скажем, что f дифференцируемо в смысле Фреше в точке x_0, если: $f(x_0 + h) - f(x_0) = T[h] + \alpha(x_0; h)$ для всех $h \in V - [0]$, где $T \in L[E, F]$, $\alpha(x_0; h) = o(h)$, $L[E, F]$ — пространство непрерывных линейных отображений E в F. Назовем оператор $T[h] = df(x_0; h) = df(x_0)h$ производной Фреше первого порядка в x_0 при приращении h. Если f — определенное и дифференцируемое в смысле Фреше в U отображение, то функция $x \to df(x)$, определенная в U, отображает U в $L[E, F]$ и обозначается через f'.

Теорема 2. 1) Множество отображений, определенных на U, со значениями в F, дифференцируемых в смысле Фреше в U, есть векторное пространство C и $f \to f'$ есть линейное отображение этого пространства в пространство отображений U в $L(E, F)$. 2) Если для всех $x \in E$ имеем $f(x) = \text{const}$, то $f' = 0 \in L[E, F]$. 3) Если $f = T$ и $T \in L[E, F]$, то $f' = T = \text{const} \in L[E, F]$. 4) Пусть f — отображение U в F, g — отображение, определенное в некотором открытом множестве, содержащемся в $f(U)$, с областью значений в некотором топологическом, локально выпуклом, сепарабельном, полном пространстве G. Если f дифференцируемо в

точке x_0 и g дифференцируемо в точке $f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ имеет производную, равную $dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$. 6) Пусть F — топологическая алгебра, в которой для любой пары (x, y) и полунормы $p \in \Gamma_F$ имеет место неравенство $p(xy) \leqslant p(x)\, p(y)$. Тогда, если f и g дифференцируемы в $x_0 \in E$, то fg тоже дифференцируемо в x_0 и $d(fg)(x_0; h) = f(x_0)\, dg(x_0; h) + g(x_0)\, df(x_0; h)$ для всех $h \in E$. Далее вводятся понятия слабой дифференцируемости отображения и дифференцируемости в смысле Фреше по направлению в локально выпуклых пространствах и устанавливается ряд их свойств. Доказана теорема о среднем значении для слабо дифференцируемого отображения. Э. С. Цитланадзе

10577. Интерполяционная теорема для сублинейных операторов в H_p. Уэйсс (An interpolation theorem for sublinear operators on H_p spaces. Weiss Guido), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 92—99 (англ.)

Интерполяционная теорема для сублинейных операторов в L_p, полученная Кальдероном и Зигмундом (РЖМат, 1957, 1603), в настоящей работе распространяется на аналогичные операторы, действующие в H_p-пространствах ($p > 0$).

Пусть T — отображение, определенное на классе функций, аналитических в круге $|W| < 1$, а значениями его являются измеримые функции в некотором пространстве с мерой (M, μ). Оператор T называется сублинейным, если: 1) TF однозначно определено, если $F = F_1 + F_2$ и определены TF_1 и TF_2;) для всякой константы k, $T(kF)$ определено, если определено TF; 3) $|T(F_1 + F_2)| \leqslant |TF_1| + |TF_2|$, $|T(kF)| = |k| \cdot |T(F)|$ почти всюду.

Оператор T называется типа (a, b), $a, b > 0$, если область определения T включает H_a и существует константа M, не зависящая от $F \in H_a$, такая, что $\|TF\|_b \leqslant M \cdot \|F\|_a$ (в левой части подразумевается L_b норма, а в правой H_a норма). Доказана

Теорема. Пусть T — сублинейный оператор типов $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$ и $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$ с соответствующими константами M_1 и M_2, где $1/\alpha_i > 0$, $1/\beta_i \geqslant 1$ $(i = 1,)$. Пусть $\alpha = (1 - t_0)\alpha_1 + t_0\alpha_2$ и $\beta = (1 - t_0)\beta_1 + t_0\beta_2$, где $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$. Тогда существует такая абсолютная константа K, что $\|TF\|_{1/\beta} \leqslant K M_1^{1-t_0} M_2^{t_0} \|F\|_{1/\alpha}$ для всех $F \in H_{1/\alpha}$ и, таким образом, T также типа $(1/\alpha, 1/\beta)$. Специальный случай этой теоремы, когда T линеен, известен ранее (Calderon A. P., Zygmund A., Ann. Math. Studies, 1950, 166—168). А. А. Бонами

10578. К вариационной теории нелинейных операторов и управлений. Вайнберг М. М., Качуровский Р. И., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 6, 1199—1202

Пусть A — линейный интегральный оператор $AV = \int_D K(x, y) V(y)\, dy$, $hu = g(u(x), x)$ — оператор Немыцкого и $\Gamma = Ah$ — оператор Гаммерштейна. Выделяется класс $\mathfrak{A}$ операторов A такой, что к уравнению $u = \Gamma u$ применим вариационный метод. Класс $\mathfrak{A}$ содержит самосопряженные вполне непрерывные операторы A со счетным числом положительных и счетным числом отрицательных характеристических чисел.

Пусть D — измеримое множество, принадлежащее квадрату $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Пусть ядро $K(x, y)$ симметрично. Положим $K_{i\nu}(x, y) = K\left(x + \frac{i-1}{n}, y + \frac{\nu - 1}{n}\right)$ для $0 \leqslant x, y \leqslant \frac{1}{n}$ $(i, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ n \geqslant 2)$. Легко видеть, что $K_{i\nu}(x, y) = K_{\nu i}(y, x)$. Рассмотрим в $L^2\left(0, \frac{1}{n}\right)$ оператор $A_{i\nu}V = \int_0^{1/n} K_{i\nu}(x, y) V(y)\, dy$. Говорят, что оператор $A \in \mathfrak{A}$, если при некотором n каждый из операторов $A_{i\nu}$ является самосопряженным и положительным в L_2.

Теорема 1. Пусть выполнены условия: 1) оператор $A \in \mathfrak{A}$ и действует вполне непрерывно из L^q в L^p $(p \geqslant$, $p^{-1} + q^{-1} = 1)$; 2) $|g(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^{p-1}$, $2\int_0^u g(V, x)\, dV \leqslant a_1 u^2 + b_1(x)|u|^{\alpha} + c(x)$, где $a(x) \in L^q$; $b > 0$; $a_1 < \lambda n^{-1}$; λ — наименьшее характеристическое число операторов $A_{i\nu}$, n — число, входящее в определение $A \in \mathfrak{A}$, $b_1(x) \in L^{\gamma}$, $\gamma = \frac{2}{2 - \alpha}$; $0 < \alpha < 2$; $c(x) \in L^1$. Тогда уравнение $u = \Gamma u$ имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее L^p. Идея доказательства заключается в сведении рассматриваемого уравнения к системе уравнений Гаммерштейна с симметричной матрицей линейных операторов.

Теорема). Пусть выполнены условия: 1) каждый самосопряженный и положительный оператор $A_{i\nu}$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p, причем $A_{i\nu} = A_{\nu i}$; 2) оператор Немыцкого $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h_i u = g_i(u_1(x), \ldots, u_n(x), x)$ действует из $L_{p,n}$ в $L_{q,n}$; 3) $g_i = \frac{\partial G}{\partial u}$, причем $2G(u_1, \ldots, u_n x) \leqslant \sum_{i=1}^n a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x)|u_i|^{\alpha} + c(x)$, где $0 \leqslant a_i n < \lambda_{i\nu_i}$ ($\lambda_{i\nu_i}$ — наименьшее характеристическое число ядер $K_{i1}, K_{i2}, \ldots, \ldots, K_{in}$); $0 < \alpha < 2$; $0 \leqslant b_i(x) \in L^{\gamma}$; $\gamma = \frac{}{2 - \alpha}$; $0 \leqslant c(x) \in L^+$. Тогда система $u_i(x) = \sum_{\nu=1}^n \int_D K_{i\nu}(x, y) \times g_\nu(u_1(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy$, $i = 1, \ldots, n$ имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству $L_{p,n}$. Если ядро $K(x, y)$ ограничено, то аналогично теореме 1 утверждается существование ограниченного решения. Установлены также теоремы о собственных функциях оператора Γ.

Теорема 5. Пусть оператор $A \in \mathfrak{A}$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p, $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ и $|g(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^{p-1}$, где $a(x) \in L^q$, $b > 0$, $g(0, x) = 0$. Тогда существует континуум собственных функций оператора Γ, принадлежащих пространству L^p, нормы которых меньше произвольного положительного числа. Аналогичный результат получен в случае ограниченного ядра $K(x, y)$ в пространстве ограниченных функций.

Теорема 7. Пусть потенциальный оператор $F(x)$, заданный в рефлексивном банаховом пространстве E, удовлетворяет условиям: $(F(x + y) - F(x), y) \geqslant 0$, $(F(x_0 + y) - F(x_0), y) \geqslant \|y\| \gamma(\|y\|)$, где x_0 — некоторый фиксированный вектор, x, y — произвольные векторы пространства E; $\gamma(t) > 0$ для $t > 0$ и

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^1 \gamma(tR)\, dt = +\infty.$$

Тогда существует единственное решение уравнения $F(x) = 0$ в E.

Приведены два следствия, касающиеся существования решений уравнений вида $x = AF(x)$. Э. С. Цитланадзе

10579. О непрерывности одного нелинейного оператора. Мисюркеев И. В., Тр. Семинара по функц. анализу. Воронежск. ун-т, 1958, вып. 6, 93

Рассматривается оператор $fu(x) = f[x, u(x)]$ $(x \in G)$, где G — ограниченное замкнутое множество n-мерного пространства, $f(x, u)$ — вещественная функция, определенная при $x \in G$ и $-\infty < u < \infty$ (РЖМат, 1957, 3310, 5737). Доказывается

Теорема. Пусть оператор f преобразует каждую функцию $u(x)$ из шара $T\{\|u\| \leqslant R\}$ пространства C непрерывных на G функций в непрерывную функцию. Тогда оператор f на T непрерывен.

Примечание референта. Данная теорема справедлива лишь при дополнительном предположении, что множество G совершенно. В самом деле, пусть x_0 — изолированная точка множества G и функция $f(x, u)$ непрерывна по совокупности переменных в каждой точке (x, u), где x — предельная точка G, $|u| \leqslant R$, и разрывна по u ($|u| \leqslant R$) при $x = x_0$. Тогда очевидно, что оператор f действует из T в C, но не является непрерывным на T.

Автор при доказательстве теоремы фактически использует совершенность множества G, не оговаривая этого. Более детальное рассмотрение оператора f, действующего из C в C, в том числе и этот результат, содержится в статье референта (РЖМат, 1960, 7878).

И. В. Шрагин

10580. О сходимости метода наискорейшего спуска для нелинейных уравнений. Вайнберг М. М., Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 1, 9—12

Установлены сходимость метода наискорейшего спуска для нелинейных уравнений в банаховых пространствах и оценки для погрешности приближенного решения.

Пусть $F(x)$ — потенциальный оператор, заданный в банаховом пространстве E. Тогда последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к решению x_0 уравнения

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

определяется итерационным процессом

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n A F(x_n), \tag{2}$$

где ε_n — некоторые положительные числа и A — ограниченный линейный оператор из E^* в E, нормированный условием

$$(y, Ay) \geqslant \|y\|^2, \; y \in E^*. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть дифференцируемый по Гато потенциальный оператор $F(x)$ удовлетворяет условию $\|h\| \gamma(\|h\|) \leqslant (F'(x)h, h) \leqslant M(\|x\|) \cdot \|h\|^2$, где $\gamma(t)$ — возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение, к которому сходится итерационный процесс (2) при любом начальном приближении x_1, если $\frac{1}{2M_n \|A\|^2} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{M_n \|A\|^2}$, где $M_n = \max\{1, M(R_n)\}$, $R_n = \|x_n\| + \|A\| \, \|F(x_n)\| > 0$.

Теорема сохраняется при замене неравенства $(F'(x)h, h) \geqslant \|h\| \gamma(\|h\|)$ неравенством $(F'(x)h, h) \geqslant \|h\| \gamma(\|x\|, \|h\|) \geqslant 0$, где $\lim\limits_{R \to \infty} \int_0^1 \int_0^1 \gamma(\tau + R, tR) d\tau dt = +\infty$. Пусть теперь оператор A удовлетворяет неравенству (3), причем $(A^{-1})^* \cdot A = I$, где I — единичный оператор в E^*. Тогда процесс (2) можно использовать для нахождения решения уравнения (1) и в том случае, когда $F(x)$ не является потенциальным.

Теорема 2. Пусть дифференцируемый по Гато оператор $F(x)$ из E в E^* удовлетворяет для всех $x, h \in E$ неравенствам: $\|F'(x)\| \leqslant M$, $(F'(x)h, h) \geqslant m\|h\|^2$, $0 < m = \text{const}, M = \text{const}$, причем $\|A\|(1 - m^2/M^2) < 1$. Тогда уравнение (1) имеет в E единственное решение x_0, к которому сходится процесс (2) (при $\varepsilon_n = \varepsilon = \text{const}$) со скоростью геометрической прогрессии, начиная с любого начального приближения x_1, если $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — корни уравнения $a^2 M^2 \varepsilon^2 - 2a^2 m \varepsilon + a - q^2 = 0$, $a = \|A\|$, $\sqrt{a(1 - m^2/M^2)} < q < 1$.

Для оценки погрешности имеет место формула: $\|x_n - x_0\| \leqslant a(1 - q)^{-1} \cdot q^{n-1}$, $a = a\varepsilon \|F(x_1)\|$.

Пусть норма в E дифференцируема по Фреше, причем остаток дифференциала удовлетворяет неравенству $|\omega(x; h)| \leqslant c(\|x\|) \|h\|^2$, $x \neq 0$, т. е. норма в E является гладкой.

Теорема 3. Пусть дифференцируемый по Гато оператор $F(x)$, действующий из пространства E с гладкой нормой в E, удовлетворяет условиям $\|F'(x)\| \leqslant M$, $(\text{grad}\|h\|, F'(x)h) \geqslant m\|h\|$ для всех $x, h \in E$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение x_0, к которому сходится процесс

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon F(x_n), \tag{4}$$

начиная с любого начального приближения x_1, если $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — корни (положительные) уравнения $CM^2\varepsilon^2 - 2m\varepsilon + 1 - q^2 = 0$, $\sqrt{1 - \frac{m^2}{CM^2}} < q < 1$, $C(\|x\|) = C = \text{const}$.

Для оценки погрешности имеет место формула $\|x_{n+1} - x_0\| \leqslant \frac{\varepsilon q^{n-1}}{1 - q} \|F(x_1)\|$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия: 1) уравнение (1), где $F(x)$ — оператор из пространства E с гладкой нормой в E, имеет решение x_0, для которого известна оценка $\|x_0\| < r$, 2) дифференцируемый по Гато оператор $F(x)$ удовлетворяет в шаре $D(\|x\| = R = 2r)$ условиям: $\|F'(x)\| \leqslant M = M(R)$, $(\text{grad}\|h\|, F'(x)h) \geqslant m\|h\|$, $0 < m = m(R)$. Тогда x_0 — единственное в D решение уравнения (1), к которому сходится процесс (5), если ε выбрано так же, как в теореме 3, где $C = C(R)$. Для оценки погрешности имеет место формула $\|x_n - x_0\| \leqslant q^{n-1}\|x_1 - x_0\|$, где начальное приближение x_1 выбрано так, что $\|x_1\| \leqslant r$.

Э. С. Цитланадзе

10581. К итеративному решению линейных функциональных уравнений. Бялый (Zur iterativen Behandlung linearer Funktionalgleichungen. Bialy Horst), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 347 (нем.)

Обобщаются ранее полученные автором (РЖМат, 1959, 6024) результаты о сходимости некоторых итеративных методов решения функционального уравнения $Tx = y$, где T — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве. Утверждается, что могут быть получены некоторые необходимые и достаточные условия сходимости этих методов, причем полная непрерывность T несущественна. Кроме того, если уравнение $Tx = y$ не имеет решений, то тем не менее последовательность приближений $\{x_n\}$ такова, что $\|Tx_n - y\| \to \inf\limits_x \|Tx - y\|$. Доказательства и даже формулировка упомянутых необходимых и достаточных условий отсутствуют.

И. К. Даугавет

10582. Принцип оценки ошибок для функциональных уравнений. Бертрам (Ein Fehlerabschätzungsprinzip für Funktionalgleichungen. Bertram G.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 346 (нем.)

Пусть u_0 — единственное решение нелинейного функционального уравнения $Tu = 0$, v — приближенное решение, $G(u)$ — функционал, $G[u_0] = 0$, $\varepsilon(z)$ — положительные решения уравнения $G(v + \varepsilon z) = 0$ при всевозможных z. Тогда $\|u_0 - v\| \leqslant \sup\limits_{\|z\| = 1} \varepsilon(z)$. Утверждается, что применение этого принципа приводит как к некоторым известным, так и к новым оценкам.

И. К. Даугавет

10583. Оценки ошибок для одного класса итеративных методов. Шмидт (Fehlerabschätzungen für eine Klasse von Iterationsverfahren. Schmidt J.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 392—394 (нем.)

Пусть функциональное уравнение $x = Tx$, где T — нелинейный оператор в полном линейном пространстве E, нормированном элементами некоторого полуупорядоченного пространства V, имеет единственное решение x. Приближенные решения этого уравнения x_n строятся, как решения уравнений: $x_n = T_n x_n$.

Теорема: Пусть S — подмножество E и пусть существуют линейные положительные операторы в V, M и K такие, что выполнены условия: 1) $\| T_n y - T_n z \| \leqslant M \| y - z \|$, $y, z \in E$; 2) $\| (T - T_n)y - (T - T_n)z \| \leqslant K \| y - z \|$, $y, z \in S$; 3) для каждого $a \in V$ сходятся равномерно ряды: $\sum_{\nu=0}^{\infty} M^\nu a$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty} P^\nu a$, где $P = (I - M)^{-1} K$; 4) $T_n x_{n-1} = Tx_{n-1}$; 5) сфера $\| y - x_1 \| \leqslant P(I - P)^{-1} \| x_1 - x_0 \| = f$ содержится в S. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению исходного уравнения x, причем $\| x_1 - x \| \leqslant f$. Указывается, что теорема может быть применена к исследованию метода Ньютона. И. К. Даугавет

10584. Об одном вопросе теории приближения функций. Ривкинд Я. И., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 6, 185—190

Рассматривается последовательность операторов $\{A_n\}$, преобразующих $C_{[a,b]}$ в себя и обладающих свойствами: 1) A_n вполне непрерывны; 2) A_n имеют общие собственные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$; 3) $R'_n \supseteq R'_{n+1}$, где через R'_n обозначено собственное подпространство оператора A_n, принадлежащее собственному значению, равному 1; 4) A_n — самосопряженные операторы; 5) $\lim_{n\to\infty} \| A_n \varphi - \varphi \| = 0$ для любой функции $\varphi \in C_{[a,b]}$. Последовательность $\{A_n\}$ называется „грубо" сходящейся к единичному оператору на множестве $M \subseteq C_{[a,b]}$, если для всякого $\varphi \in M$ выполняется неравенство $\| A_n \varphi - \varphi \| \geqslant K_\varphi \cdot \delta(n)$, где K_φ — постоянная, зависящая только от φ, а $\delta(n)$ — функция, убывающая к нулю при $n \to \infty$. Доказана следующая теорема: Последовательность $\{A_n\}$, удовлетворяющая условиям 1) — 5), „грубо" сходится на множестве $R'' = \prod_{n=1}^{\infty} R'_n$, где R'_n есть ортогональное дополнение R' в $C_{[a,b]}$. При этом $\delta(n) = \inf |1 - \lambda_k^{(n)}|$, $\lambda_k^{(n)} \neq 1$ ($\lambda_k^{(n)}$ — собственные значения оператора A_n). Эта теорема применяется далее к операторам Фейера, Валле-Пуссена и Бернштейна — Рогозинского.
В. Н. Никольский

10585. Об одновременном отыскании двух собственных чисел самосопряженного оператора. Бессмертных Г. А., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 6, 1106—1109

Пусть A — ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в вещественном гильбертовом пространстве H, M и m — верхняя и нижняя грани его спектра, причем m — изолированная точка спектра, m_1 — наименьшее число спектра, большее m. Рассматривается метод М. А. Красносельского отыскания нижней грани спектра: $x_{k+1} = x_k - 2\gamma_k \Delta_k$, $\Delta_k = A x_k - \mu_k x_k$, $\mu_k = (Ax_k, x_k)/(x_k, x_k)$, $\gamma_k = (\Delta_k, \Delta_k)/(A\Delta_k, \Delta_k)$, $\mu_k \to m$, $\{x_k\}$ сходится к некоторому вектору из инвариантного подпространства L_m, соответствующего собственному числу m.

Теорема 1: Если m и m_1 — изолированные точки спектра,

$$m > M/2 \qquad (1)$$

и x_0 не ортогонально L_m и L_{m_1}, то последовательность $\{\Delta_k\}$ сходится по направлению к некоторому вектору из L_m, а $\{1/\gamma_k\}$ — к m_1. При этом последовательность $y_k \in H$ называется сходящейся по направлению к $y \in H$, если $\lim_{k\to\infty} \left[1 - \frac{(y_k, y)^2}{\| y_k \|^2 \| y \|^2} \right] = 0$.

Теорема 2: Если m и M — изолированные точки спектра и

$$m < m_1/2, \qquad (2)$$

то при некоторых дополнительных предположениях о x_0 $\{\Delta_k\}$ сходится по направлению к некоторому вектору из L_M, а $\{1/\gamma_k\}$ — к M.

Если условия (1) и (2) не выполнены, то последовательность $\{\Delta_k / \| \Delta_k \|\}$, вообще говоря, расходится. В условиях теорем 1 и 2 применение к рассматриваемому процессу метода ускорения сходимости Л. А. Люстерника приводит к линеаризованному методу наискорейшего спуска. И. К. Даугавет

10586. О некоторых свойствах полуупорядоченного пространства непрерывных функций на бикомпакте. Диканова З. Т., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 6, 165—172

Рассматривается K-пространство $C_\infty(Q)$ (терминологию см. Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г., Успехи матем. наук, 1951, 6, вып. 3, 31 — 98) всех вещественных непрерывных функций, заданных на экстремальном бикомпакте Q и допускающих значения $+\infty$ и $-\infty$ на нигде не плотных множествах. Пусть $\mathfrak{G}_\infty(Q)$ — нормальное и полное подпространство пространства $C_\infty(Q)$; Φ — множество точек бикомпакта Q, в которых все $x(t) \in \mathfrak{G}_\infty(Q)$ обращаются в нуль.

Теорема 1. Для того чтобы пространство $\mathfrak{G}_\infty(Q)$, содержащее единичную функцию $x(t) \equiv 1$, было счетного типа, необходимо и достаточно, чтобы каждое замкнутое нигде не плотное множество $F \subseteq Q$ погружалось в замкнутое нигде не плотное множество F_0 типа G_δ.

Теорема 2. Для того чтобы пространство $\mathfrak{G}_\infty(Q)$, не содержащее функцию $x(t) \equiv 1$, было счетного типа, необходимо и достаточно, чтобы всякое замкнутое нигде не плотное множество $F \subseteq Q \setminus \Phi$ погружалось в замкнутое нигде не плотное множество F_0 типа G_δ.

Известно, что в регулярных K-пространствах (o)-сходимость обладает пятью свойствами (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М. — Л., 1950, 164 — 168): 1) аннулируемость последовательности; 2) устойчивость сходимости; 3) наличие регулятора сходимости; 4) наличие общего регулятора сходимости для счетного множества (o)-сходящихся последовательностей; 5) существование диагональной последовательности. А. Г. Пинскер установил ряд соотношений между свойствами 1) — 5). В частности, он доказал, что в расширенном K-пространстве эти свойства эквивалентны.

Во второй части работы найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы (o)-сходимость в пространстве $C_\infty(Q)$ обладала свойствами 1) и 3). Так как образ расширенного K-пространства при реализации на бикомпакте Q совпадает со всем $C_\infty(Q)$, то при помощи указанных выше условий дается новое простое доказательство теоремы об эквивалентности свойств 1) — 5) в расширенном K-пространстве. На основании полученных результатов в заключение доказывается теорема: Для того, чтобы пространство $C_\infty(Q)$ было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы каждое счетное множество замкнутых нигде не плотных множеств $F_n \subseteq Q$ погружалось в одно замкнутое нигде не плотное множество F типа G_δ: $\bigcup_n F_n \subseteq F$. Д. Ф. Харазов

10587. О множествах регулярных мер. I—II. Цудзимото (On the sets of regular measures. I—II. Tsujimoto Hitoshi), Proc. Japan Acad., 1959, 35, № 6, 273—278; № 7, 372—377 (англ.)

Пусть $(X, \mathbf{S})$ — топологическое измеримое пространство, $\mathbf{U}$ — класс всех открытых и $\mathbf{C}$ — класс всех компакт-

ных множеств из S. Множество $E \in S$ называется внутренне регулярным относительно определенной на S меры m, если $mE = \sup\{mC : C \subseteq E, C \in C\}$ и внешне регулярным относительно m, если $mE = \inf\{mU : U \supseteq E, U \in U\}$. Если каждое измеримое множество внутренне (внешне) регулярно относительно m, то мера m называется внутренне (внешне) регулярной.

Рассматривается некоторое множество Δ мер, определенных на S. Предполагается, что меры из Δ могут принимать как конечные, так и бесконечные значения. Изучаются и решаются следующие задачи: 1. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — последовательность мер из Δ и ν — мера на S такая, что $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$ $(E \in S)$. Выясняется, при каких условиях свойство внутренней или внешней регулярности мер μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сохраняется для меры ν. 2. Пусть $\mu_1 \in \Delta$, $\mu_2 \in \Delta$. Определим на S меры ν и τ, полагая для любого $E \in S$: $\nu(E) = \sup\{\mu_1(A_1) + \mu_2(A_2) : A_1 \cup A_2 = E, A_1 \cap A_2 = \theta, A_1 \in S, A_2 \in S\}$, $\tau(E) = \inf\{\mu_1(A_1) + \mu_2(A_2) : A_1 \cup A_2 = E, A_1 \cap A_2 = \theta, A_1 \in S, A_2 \in S\}$. Меры ν и τ называются соответственно верхней и нижней мерой мер μ_1 и μ_2. Аналогично определяются верхняя и нижняя меры для последовательности мер $\{\mu_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots; \mu_n \in \Delta)$ и множества мер $\{\mu_\lambda\}$ $(\mu_\lambda \in \Delta_1 \subseteq \Delta)$. Выясняется, при каких условиях свойство внутренней или внешней регулярности мер сохраняется для их верхней (нижней) меры. 3. Пусть f_1 и f_2 две неотрицательные измеримые функции на X и $\mu \in \Delta$. Для любого $E \in S$ положим: $\mu_1(E) = \int_E f_1(x)\, d\mu$; $\mu_2(E) = \int_E f_2(x)\, d\mu$; $\nu(E) = \int_E \sqrt{f_1(x) f_2(x)}\, d\mu$. Выясняются условия, при которых свойство внутренней или внешней регулярности мер μ_1 и μ_2 сохраняется для меры ν. 4. Выясняются условия, при которых свойство внутренней или внешней нерегулярности двух мер переносится на их верхние (нижние) меры.

Л. М. Абрамов

10588. Об интегрировании нелинейных операторов. Ли Вэнь-цин (Lee Wen-ching), Сямэнь дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Xiamen daxue xuebao, Ziran kexue ban, Univ. amoniensis acta scient. natur., 1959, № 1, 76—84 (кит.; рез. англ.)

Дается определение интеграла нелинейного оператора. Пусть оператор T отображает банахово пространство E, имеющее базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, в сепарабельное пространство E_1 типа B. Для любой пары элементов в E $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ и $b = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ таких, что $a_i < b_i$ для всех i, рассматривается множество элементов $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in E$, для которых $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$. Обозначим его через $M[a, b]$. Далее, пусть оператор T непрерывен на множестве $M[a, b]$; тогда

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно рассмотреть как оператор, определенный на V_n: $(a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ с областью значений в E_1. Если при этом существуют все интегралы в смысле Бохнера $\int \ldots \int_{V_n} T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = I_n \in E_1$, причем последовательность элементов $\{I_n\}$ сходится к некоторому элементу $I \in E_1$, то I называется интегралом Tx на множестве $M[a, b]$ и обозначается $I \equiv \int_{M[a,b]} Tx\, dx$. Доказываются некоторые элементарные свойства интеграла.

Ши Чжун-цы

10589. Некоторые математические проблемы релятивистской квантовой теории. Уайтман (Quelques problèmes mathématiques de la théorie quantique relativist Wightman A. S.), Problèmes math. théorie quantique champs. Paris, CNRS, 1959, 1—38 (франц.)

Работа содержит подробный анализ основных предпо ложений квантовой теории поля. В § 1 (Введение) авто описывает историческое развитие теории поля и выска зывает убеждение, что современные трудности это теории обусловлены не какими-либо физическими пара доксами, но в основном недостаточной определенность ее математического аппарата. В § 2 содержится описани неоднородной группы Лоренца и ее унитарных представ лений $U(a, \Lambda)$ в гильбертовом пространстве H состояни ψ квантовой системы. Последнее является прямой сум мой гильбертовых пространств, содержащих волновы функции чистых состояний. Формулируется требовани релятивистской инвариантности описания системы и ука зывается связь физических характеристик последней с свойствами представлений группы Лоренца. Далее (§ 3 вводится следующее определение понятия поля. Рас смотрим конечномерное представление $S(\Lambda)$ однородно группы Лоренца, обозначаемое $[i]$, и пространство $D[i]$ вектор-функций $f = \{f^j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, \dim[i])$, в которы каждая из компонент f^j является элементом K-про странства основных функций, определенных в пространст ве времени. Элементу (a, Λ) неоднородной группы Ло ренца сопоставляется преобразование $f \to f_{(a,\Lambda)} = S(\Lambda^{-1})^T f(\Lambda^{-1}(x - a))$. Пусть, с другой стороны задано некоторое непрерывное унитарное представлени $U(a, \Lambda)$ неоднородной группы Лоренца в гильбертово пространстве H, причем предполагается, что а) в H не существует состояний с отрицательной энергией и б) су ществует состояние вакуума Ψ_0, однозначно определяе мое условием $U(a, \Lambda)\Psi_0 = \Psi_0$. Тогда полем типа $[i]$ называется функция $T(f)$, определенная всюду в $D[i]$ и принимающая значения в множестве линейных опера торов, определенных в H (аксиома 1). При этом должны выполняться требования: 1) операторы $T(f)$ и $T^*(f)$ определены на одном и том же векторном подпро странстве $D \subset H$, причем $\Psi_0 \in D$, $U(a, \Lambda) D \subseteq D$, $T(f) D \subseteq D$, $T^*(f) D \subseteq D$; 2) оператор $T(f)$ является линейной функцией от $f \in D[i]$; 3) $(\Phi, T(f)\Psi)$ есть не прерывный функционал от f. В силу 2) и 3), $(\Phi, T(f)\Psi)$ является обобщенной функцией над пространством основ ных функций f. В качестве дальнейших основных аксиом определяется закон преобразования поля при преобра зованиях Лоренца (II), устанавливается требование ло кальной коммутативности (III) в предположении обычной связи между спином и статистикой и формулируется асимптотическое условие (IV) в применении к нейтраль ному скалярному полю. В § 4 приводится теорема, до казанная автором и устанавливающая те условия, при которых последовательность обобщенных функций можно рассматривать как средние значения по вакууму в слу чае скалярного поля. Далее изучение средних значений по вакууму сводится к изучению последовательности функций $\{f(z_1, \ldots, z_n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, зависящих от комплексных 4-векторов z_i; исследование аксиом (II) и (III) сводится к определению областей аналитичности этих функций. Приведен обзор работ 1956—58 гг. Излагаются также вопросы, связанные с изучением других физических требований в этой формулировке. В § 5 кратко упоминается о возможности определения понятия поля соотношением $TU_1 = U_2 T$, где U_1 — операторы представления группы Лоренца в пространстве $D[i]$, а U_2 — то же в пространстве H. В § 6 рассматривается вопрос о представлениях в гильбертовом пространстве канонических соотношений коммутации и антикоммутации и о наличии представлений, унитарно неэквивалентных „обычным". При этом операторы поля определяются с помощью основных функций, заданных на трехмерном пространстве. Формулируется теорема Хага, ука-

зывающая на то, что в релятивистски инвариантной теории „обычные" представления могут быть определены только в теории свободных полей, и обсуждается связь этой теоремы с теорией перенормировки. Раздел заканчивается определением операторов поля в заданный момент времени и формулировкой проблемы о совместности представлений перестановочных соотношений с требованием их инвариантности относительно евклидовых преобразований. Последний § 7 содержит обсуждение корпускулярного аспекта теории поля, связанного с возможностью определения операторов проектирования $E^{(n)}(S)$ (соответственно, $F^{(n)}(T)$), средние значения которых в состоянии Ψ определяют вероятность обнаружить ровно n частиц в заданном подмножестве S (соответственно T) $3n$-мерного пространства координат (соответственно импульсов). Формулируются требования, которым должны удовлетворять эти операторы.

Ю. А. Яппа

10590. Связь метода инвариантной вставки с принципами инвариантности. Прейзендорфер (Invariant imbedding relation for the principles of invariance. Preisendorfer Rudolph W.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 4, 320—323 (англ.)

Для интенсивности стационарных одномерных процессов переноса (например, лучистой энергии, диффузии нейтронов), сформулированных в абстрактной форме, на основе метода инвариантной вставки (РЖМат, 1958, 10051; 1959, 9134; 1960, 471 и др.) приводится одно общее соотношение, из которого, в частности, вытекают известные принципы инвариантности.

В. С. Владимиров

10591. Об операторах типа Рисса—Шаудера. Гольдман М. А., Крачковский С. Н., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 159—164

Дается новое доказательство известных предложений теории Рисса—Шаудера о линейных вполне непрерывных операторах, действующих из одного банахова пространства в другое, и теоремы С. М. Никольского (Изв. АН СССР. Сер матем, 1943, **7**, 3) об общем виде операторов, для которых имеет место теория Рисса—Шаудера.

И. Ц. Гохберг

10592. Алгебра микроскопического измерения. Швингер (The algebra of microscopic measurement. Schwinger Julian), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 10, 1542—1553 (англ.)

Методический вариант изложения основных принципов квантовой механики. Определяемая (небольшим числом постулатов) «алгебра измерений» изоморфна некоторой матричной алгебре $\mathfrak{M}$. Пусть символ $M(a, b)$ отвечает специальному измерению с результатом: «система находилась в состоянии b и после измерения перешла в состояние a». Символы $M(a, b)$ — образующие алгебры $\mathfrak{M}$ умножение в которой соответствует последовательному проведению соответствующих измерений. Фиксируя какой-либо «полный набор физических величин» A с возможными значениями a', a'',..., получаем базис в $\mathfrak{M}$ из «матричных единиц» $M(a', a'')$. Каждой физической величине ставится в соответствие эрмитова—относительно естественной инволюции — матрица из $\mathfrak{M}$.

Д. П. Желобенко

10593. Спектральные представления многовременных температурных функций Грина. Боголюбов Н. Н., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 3, 529—532

Произведение n произвольных локальных операторов, усредненное по большому ансамблю Гиббса, выражается при помощи спектральной функции $I(E_1, \ldots, E_{n-1})$. Для вычисления причинной n-временной температурной функции Грина необходимо знать спектральные функции для произведений n таких операторов, взятых в различном порядке. До сих пор рассматривались представления только двухвременных функций Грина, и правила вычисления спектральных функций были известны лишь для двойных произведений операторов. В данной работе детально рассмотрены трехвременные структуры и получены конкретные формулы для вычисления их спектральных функций. Аналогично можно провести рассмотрение и средних от произведений n операторов. В этом направлении получены следующие результаты. В стационарных условиях эти произведения зависят от $n-1$ временных аргументов. Осложнения с аналитичностью причинной функции Грина устраняются введением 2^{n-1} запаздывающих и опережающих функций K_l, фурье-образ каждой из которых, будучи представлен $(n-1)$-мерным интегралом типа Коши, оказывается аналитической функцией $n-1$ переменных $E_1, \ldots, E_{n-1}$ (в области с соответствующими знаками мнимых частей $E_1, \ldots, E_{n-1}$); совокупность всех K_l образует единую аналитическую функцию $\widetilde{K}$ с особенностями (типа линий разреза) при $\operatorname{Im} E = 0$. Спектральная функция $I(E_1, \ldots, E_{n-1})$ выражается через линейную комбинацию предельных значений $\widetilde{K}$ при стремлении мнимых частей E_l к нулю всеми возможными способами. Соответствующие общие формулы оказываются, однако, настолько громоздкими, что автор не находит возможным привести их в настоящей статье.

Н. А. Тихонов

10594. О спинорных преобразованиях. Зайков (Върху спинорните трансформации. Зайков Рашко), Изв. Бълг. АН. Отд. физ.-матем. и техн. н. Сер. физ., 1959, **7**, 239—259 (болг.; рез. русск., нем.)

Показывается, что многие рассматривавшиеся до сих пор в квантовой теории поля преобразования 4-компонентных спиноров, связанные, в частности, с преобразованиями собственной группы Лоренца, с отражением пространственных координат и времени, зарядовым сопряжением и их всевозможными комбинациями, а также изменением знака собственного времени частиц, могут формулироваться в форме общего преобразования, включающего их как частные случаи. При этом вместо обычных спинорных операторов ψ и $\bar{\psi} = i\psi^* \alpha_4$ (α_4 — матрица Дирака) в качестве канонически сопряженных спиноров вводятся величины $\omega = \psi \exp(im_0\tau)$ и $\bar{\omega} = i\omega^* \Delta\alpha_4$, где τ — собственное время частицы с массой m_0 а Δ — некоторый унитарный оператор, подобранный таким образом, чтобы гамильтониан, записанный в терминах ω и $\bar{\omega}$, был инвариантен по отношению к рассматриваемым преобразованиям.

П. И. Фомин

См. также: 10089, 10161, 10186, 10209, 10310, 10477 10518, 10599, 10600, 10732.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

10595. Квантовая теория и основания теории вероятностей. Купман (Quantum theory and the foundations of probability. Koopman B. O.), Appl. Probability. New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Co., 1957, 97—102 (англ.)

Чтобы избежать трудностей, связанных с включением квантовой механики в общую теорию вероятностей (совмещение событий является, вообще говоря, некоммутативной операцией), предлагается переформулировка основных аксиом теории вероятностей, в основу которой положены условные вероятности. И. И. Гихман

10596. Конечная частотная теория вероятностей. Копленд (A finite frequency theory of probability. (Copeland Arthur H., Sr), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 278—284 (англ.)

Учитывая, что обычная частотная теория физических вероятностей использует бесконечные последовательности испытаний, что невозможно на практике, автор предлагает то, что он называет «конечной» частотной теорией. «Вероятности» рассматриваются как субъективные оценки вероятностей, встречающихся в статистических гипотезах. Эти оценки можно проверить обычными статистическими методами, т. е. средствами конечной последовательности испытаний, и отвергнуть при различных условленных уровнях значимости. В более общем аспекте теория содержит рекомендацию считать высказывание x верным, если оценка вероятности этого высказывания превосходит λ, причем правила выбора λ не приводятся, но предлагается практически использовать $\lambda=0{,}95$. В качестве математического аппарата используется булева алгебра высказываний. I. J. Good

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 376.

10597. Задачи индуктивного вывода. Нейман (The problem of inductive inference, Neyman Jerzy), Communs Pure and Appl. Math., 1955, **8**, № 1, 13—45 (англ.)

Разбираются общие идеи с иллюстрациями задач современной физики (однородность нейтральных V-частиц). По мнению референта, автор в целом сторонник так называемой «ортодоксальной» (колмогоровской) теории вероятностей с некоторой склонностью к выделению вопросов, связанных с теорией решений (так что можно было бы озаглавить статью: Теория рационального поведения или теория индуктивного поведения). Это выделение относится только к вопросам приложения абстрактной теории, а не к аксиоматике, которая, являясь колмогоровской, не оставляет места для таких понятий, как функция «выгоды» и пр. Требование различать абстрактную теорию и её приложения не особенно распространено среди физиков. Каждое практическое приложение основано на допущении, что некоторая модель абстрактной теории подходит для данного случая. Точное истолкование слова «подходит», однако, не дается. Возможно, что автор не возражал бы против субъективистского объяснения этого слова, если только сами модели содержат вероятности, основанные на длинном ряде частот. Цель этого ограничения — придать вероятностным утверждениям практическую несомненность. Задача V-частиц иллюстрирует известный статистический прием Е. Пирсона и автора (Philos. Trans. Roy. Soc. London., 1933, **A231**, 289—337; 1937, **A236**, 333—380). I. J. Good

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 8, 838.

10598. Две системы аксиом теории вероятностей. Поппер (Two autonomous axiom systems for the calculus of probabilities. Popper K. R.), Brit. J. Philos. Sci., 1955, **6**, № 21, 51—57 (англ.)

10599. Замечание о строгой измеримости. Варадараджан (A remark on strong measurability. Varadarajan V. S.), Sankhyā, Indian J. Statist., 1958, **20**, № 3-4, 219—220 (англ.)

Пусть (Ω, S, μ) — вероятностное пространство, X — метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X и φ — измеримое отображение Ω в X. Часто важно бывает знать, является ли φ строго измеримым, т. е. пределом почти всюду простых отображений Ω в X. Это всегда так, если $\varphi(\Omega)$ сепарабельно. В предположении, что для всякого бесконечного кардинального числа a $2^a > c$ (c — мощность континуума), в заметке доказано, что если мощность S не превосходит c, то $\varphi(\Omega)$ сепарабельно. В. В. Сазонов

10600. Вероятностные меры на сепарабельных гильбертовых пространствах. Кампе-де-Ферье (Mesures de probabilité sur un espace de Hilbert séparable. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 14, 1850—1853 (франц.)

Пусть l_2 — пространство всех числовых полседовательностей x, для которых $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2(x) < \infty$ ($\xi_n(x)$ — n-я координата последовательности x). В предыдущей статье автора (РЖМат, 1958, 5894) построен класс мер μ на l_2, обладающих свойствами: 1) $\mu(l_2) = 1$; 2) все линейные функционалы измеримы относительно меры μ; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{l_2} \xi_n^2(x)\, d\mu < \infty$.

В настоящей заметке конструируются все меры с такими свойствами. Сформулирован также аналог усиленного закона больших чисел для последовательности случайных элементов из сепарабельного гильбертова пространства. М. И. Ядренко

10601. Частичное упорядочение и его приложение к теории вероятностей. Нараяна (A partial order and its applications to probability theory. Narayana T. V.), Sankhyā, Indian J. Statist., 1959, **21**, № 1-2, 91—98 (англ.)

Пусть $t_1 + \ldots + t_r = t'_1 + \ldots + t'_r = n$. Считается, что r-разбиение $(t_1, \ldots, t_r)$ „доминирует" над r-разбиением $(t'_1, \ldots, t'_r)$, если $t_1 + \ldots + t_j \geqslant t'_1 + \ldots + t'_j$ ($j = 1, 2, \ldots, r-1$). Определяется общее число „доминирований" при некотором упорядочении r-разбиений. Обобщение этой задачи допускает следующую теоретико-вероятностную формулировку. „Два кандидата A и B должны получить на выборах соответственно m и n голосов, причем $m > n$. Какова вероятность того, что A в продолжение всех выборов будет по числу голосов впереди B по крайней мере на L голосов? ($1 \leqslant L \leqslant m - n$)". В работе рассматривается также связь обеих задач с изучением некоторой игры с двумя монетами, связанной с появлением числа гербов, на 2 большего количества решеток. В. Н. Сачков

10602. Оценка в одной вероятностной задаче. Хьюэр (Estimation in a certain probability problem. Heuer Gerald A.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 8, 704—706 (англ.)

Пусть эксперимент с N равновероятными возможными исходами производится k раз. Тогда вероятность того, что по крайней мере один из исходов появится дважды, равна

$$t = 1 - \frac{N!}{(N-k)!N^k}. \qquad (1)$$

В заметке находится асимптотическое решение уравнения (1) относительно k для $0 < t < 1$. Получено, что k асимптотически равно $L(t)\sqrt{N}$, где $L(t) = \sqrt{-\log(1-t)}$. Приведенная в конце работы таблица показывает, что полученная аппроксимация является хорошей и для сравнительно небольших значений N. В. Н. Сачков

10603. Перемешивание карт последовательными тасовками. Батикль (Le mélange des cartes par coupes successives. Baticle Edgar), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 9, 1284—1286 (франц.)

Рассмотрим отрезок длиной 1, расположенный вертикально. Пусть верхняя его точка имеет координату 0, нижняя — координату 1. Над этим отрезком производится операция, называемая тасовкой: „снимаем" сверху часть отрезка некоторой случайной длины (с равномерной функцией распределения) и приставляем ее к нижнему концу оставшейся части. Снова считаем, что верхний конец получившегося отрезка имеет координату 0, а нижний — 1. Вводится случайная величина u_n: Пусть некоторая точка A отрезка до начала тасовки имела координату u_0. Тогда через u_n обозначается координата точки A после n-кратной тасовки. В заметке выписывается функция распределения для u_n при произвольных u_0 и n. Для случая $u_0 = 0$ приведено выражение для математического ожидания $\bar{u}_n$ величины u_n и вычислен $\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n = \frac{e-2}{e-1} \approx 0{,}4179$.

Примечание референта. Задача либо решена неверно, либо неточно сформулированы ее условия, так как при указанных условиях она имеет тривиальное решение: u_n для любого n и u_0 равномерно распределена на отрезке [0, 1], а $\bar{u}_n \equiv 0{,}5$. Многочисленные опечатки мешают выяснить намерения автора. Р. Ф. Матвеев

10604. Класс функций распределения, где частное следует закону Коши. Лаха (On a class of distribution functions where the quotient follows the Cauchy law. Laha R. G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 93, № 2, 205—215 (англ.)

Строятся примеры функций распределения, отличных от нормальной и имеющих моменты вплоть до заданного $2m$-го порядка таких, что частное двух независимых и одинаково распределенных с указанной функцией распределения величин следует закону Коши (как известно, так же ведут себя нормальные распределения с одинаковыми средними и дисперсиями). Ю. В. Линник

10605. О равномерной сходимости семейств последовательностей случайных величин. Парзен (On uniform convergence of families of sequences of random variables. Parzen Emanuel, Univ. Calif. Publs Statist., 1954, 2, № 2, 23—53) (англ.)

Пусть $\theta \in \Omega$ — некоторый параметр, каждому значению которого отвечает последовательность $\{X_j\}$ независимых случайных величин. Автор устанавливает условия того, что сумма $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ подчиняется закону больших чисел (по вероятности и почти наверное) и стремится к нормальному закону равномерно относительно θ. В частности, рассматривается случай, когда X_j, отвечающие одному значению θ, имеют одинаковое распределение $F^\theta(x)$. Пусть $F_n^\theta(x)$ — распределение S_n. В терминах характеристик $F^\theta(x)$, $F_n^\theta(x)$ устанавливаются критерии равномерной сходимости $F_n(x)$ к $F(x)$ при $n \to \infty$. Из этих результатов автор выводит равномерность некоторых асимптотических свойств статистических оценок и, в частности, выводит одну теорему Гливенко—Кантелли. Здесь невозможно привести все результаты. R. Fortet

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 9, 806.

10606. О необходимых и достаточных условиях применимости усиленного закона больших чисел, выраженных в терминах моментов. Фиш (On necessary and sufficient conditions for the validity of the strong law or large numbers expressed in terms of moments. Fisz M.), Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci math., astron. et phys., 1959, 7, № 4, 221—225 (англ.; рез. русск.)

Приводятся доказательства следующих двух теорем. Теорема 1. Для последовательности независимых симметрично распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, удовлетворяющих неравенствам $|X_i| < i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, не существует необходимых и достаточных условий применимости усиленного закона больших чисел, выраженных в терминах дисперсий случайных величин X_i.

Теорема 2. Для произвольной последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ не существует необходимых и достаточных условий применимости усиленного закона больших чисел, выраженных в терминах моментов $EX_i, EX_i^2, \ldots, EX_i^r$ $(i = 1, 2, \ldots)$ при любом фиксированном r.

Примечание референта. Результат более сильный, чем теорема 1, получен Ю. В. Прохоровым (РЖМат, 1960, 7930). В. В. Петров

10607. О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами. Цареградский И. П., Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 4, 470—474 (рез. англ.)

Рассматривается последовательность взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, каждая из которых имеет два возможных значения 1 и 0, принимаемых с вероятностями p и $q = 1 - p$. Пусть $s_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $F^n(x) = P\{s_n < x\}$, $\mathfrak{G}$ — совокупность неограниченно делимых распределений,

$$\rho(F^n, \mathfrak{G}) = \inf_{G \in \mathfrak{G}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F^n(x) - G(x)|.$$

Теорема 1. Существует абсолютная постоянная C_0 такая, что $\sup_{0 \le p \le 1} \rho(F^n, \mathfrak{G}) \le \frac{C_0}{\sqrt{n}}$.

Теорема 2. Если $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения целочисленных случайных величин, $f(t)$ и $g(t)$ — соответствующие характеристические функции и $I = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt < \infty$, то $\sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - G(x)| \le \frac{1}{4} I$.

В. В. Петров

10608. О центральной предельной теореме для выборок из конечной совокупности. Эрдёш, Реньи (On the central limit theorem for samples from a finite population. Erdős Paul, Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1959, 4, № 1, 49—61 (англ.; рез. венг., русск.)

Пусть имеется генеральная совокупность из n элементов со значениями некоторого признака, равными $a_1, a_2, \ldots, a_n \left(\sum_{k=1}^n a_k = 0, \ldots, \sum_{k=1}^n a_k^2 = D^2 \right)$, соответственно. Производится выборка объема $s = np$: а) с возвращением, б) без возвращения. Обозначим ξ_j $(1 \le j \le s)$ значение признака у j-го элемента выборки. Хорошо известно, что в случае а) ξ_j суть независимые одинаково распределенные случайные величины и в усло-

виях Линдеберга (или Ляпунова) выборочное среднее $s^{-1}\sum_{j=1}^{s}\xi_j$ асимптотически нормально (со средним 0). Авторы доказывают, что и в случае б) условие Линдеберга (или Ляпунова) оказывается достаточным для асимптотической нормальности выборочных средних, хотя в этом случае величины ξ_j уже не будут независимыми (но будут образовывать класс эквивалентных случайных величин, см. А. Я. Хинчин, Докл. АН СССР, 1952, 85, 713—714, и Е. Б. Дынкин, РЖМат, 1953, 827). Например, обозначая $F_{n,s}(x)$ функцию распределения $\frac{1}{\sqrt{pq}\,D}\sum_{j=1}^{s}\xi_j$ и $\Phi(x)$ — (0, 1) нормальную функцию распределения, имеем: для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что $|F_{n,s}(x)-\Phi(x)|<\varepsilon$, как только $\sqrt{\frac{n}{s}}\frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{3/2}}<\delta$. Результаты авторов, будучи почти окончательными, значительно обобщают результаты Дейвида (David F. N., Statist. Res. Mem., 1938, 69—99) и Мэдоу (Madow W. G., Ann. Math. Statistics, 1948, 19, 535—545). Следует отметить, что принципиально возможный путь вывода предельных теорем для классов эквивалентных величин и событий указывается цитированными выше работами А. Я. Хинчина и Е. Б. Дынкина. Ю. В. Прохоров

10609. О сходимости почти наверное рядов со случайными членами. Дюге (Sur la convergence presque certaine des séries aléatoires. Dugué D.), J. math. pures et appl., 1959, 38, № 3, 267—273 (франц.)

Рассматривается ряд $\sum X_i$, где X_i — независимые случайные величины.

Доказывается (теоремы 1 и 2): Если $\sum M|X_i|^\alpha<\infty$, $0<\alpha\leqslant 2$, то найдутся такие константы a_i, что $\sum(X_i-a_i)$ сходится почти наверное; если, кроме того $1<\alpha\leqslant 2$, и $\sum|MX_i|<\infty$, то можно взять $a_i=0$. Эти утверждения имеются, например, на стр. 240 книги Лоэва (Loéve M., Probability Theory, 1955 (РЖМат, 1956, 3981 К)), но метод доказательства новый. Обозначим $\Delta_{\xi,\varepsilon}$ тот из замкнутых интервалов Δ длины $\varepsilon/2$, которому соответствует максимальная вероятность события $\xi\in\Delta$; $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $M_\alpha=\sum_{i=1}^{n}M|X_i|^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 2$.

Теорема 3. Если все интервалы $\Delta_{S_n-S_k,\varepsilon}$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, содержат 0, то $P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>\varepsilon\}\leqslant\frac{C(\alpha)\cdot\varepsilon^{-\alpha}M_\alpha}{1-C(\alpha)\cdot\varepsilon^{-\alpha}M_\alpha}$. Ю. В. Прохоров

10610. Одно замечание к усиленному закону больших чисел. Обретенов (Eine Bemerkung über das starke Gesetz der großen Zahlen. Obretenov Apostol), Math. Nachr., 1959, 17, № 3-6, 151—155 (нем.)

Пусть $\{\xi_n\}$ — независимые случайные величины. Доказываются теоремы:

1. Если при некотором q, $0\leqslant q<1$, $\sum n^{-(1+q)}M|\xi_n|^{1+q}<\infty$, то $\{\xi_n\}$ удовлетворяют усиленному закону больших чисел, т. е. $P\{n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-M\xi_k)\to 0\}=1$.

2. Если при некотором σ, $0\leqslant\sigma<1$, $B_n=O(n^{1+\sigma})$ ($B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$, $b_k=D\xi_k$), то $\{\xi_n\}$ удовлетворяют усиленному закону больших чисел. Первое утверждение известно (Loève M., Probability Theory (РЖМат, 1956, 3981 К), стр. 241); второе вытекает из критерия Колмогорова, так как сходимость ряда $\sum n^{-3}B_n^2$ эквивалентна сходимости ряда $\sum n^{-2}b_n$. Ю. В. Прохоров

10611. Об одной теореме об условном предельном распределении для одинаково распределенных независимых случайных величин. Шнелль (On a conditional limiting distribution theorem. Schnell Edit), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1959, 4, № 1, 3—10 (англ.; рез. венг., русск.)

Пусть ξ_n — независимые одинаково распределенные величины со средним нуль и конечной дисперсией, $s_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, $f(t)=Me^{it\xi_1}$. Если выполнено условие C Крамера: $\limsup_{|t|\to\infty}|f(t)|<1$, то при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P\{a_1\leqslant s_n\leqslant b_1\}}{P\{a_2\leqslant s_n\leqslant b_2\}}=\frac{b_1-a_1}{b_2-a_2},\ \text{если } a_2\leqslant a_1<b_1\leqslant b_2.$$

Доказательство основано на том, что выписанные выше вероятности приближаются интегралами типа $\int h(x)dF_{s_n}(x)$, где $h(x)$ — функция с абсолютно интегрируемым преобразованием Фурье $\psi(t)$. Но $\int h(x)\,dF_{s_n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\psi(t)f^n(-t)dt$, а последний интеграл может быть оценен методом Лапласа. См. также работы Каллианпура и Роббинса (РЖМат, 1955, 3856) и Реньи (РЖМат, 1958, 4851). Ю. В. Прохоров

10612. О максимальных частичных суммах последовательностей независимых случайных величин. Пакшираджан (On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. Pakshirajan R. P.), Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 4, 398—404 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин со средними 0 и дисперсиями $DX_n=\sigma_n^2$; $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, $s_n=DS_n$, $S_n^*=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|$. При условиях: $s_n\to\infty$, при $n\to\infty$, $\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>s_n^{1-\alpha}}x^2dF_k(x)=O(\log^{1/2}s_n\cdot s_n^{2-3\alpha})$, доказывается, что $P\{S_n^*<xs_n\}=\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}\exp\left(-\frac{(2j+1)^2\pi^2}{8x^2}\right)+O\left(\frac{\log\log s_n}{\log s_n}\right)$. Этот же остаточный член при более жестких ограничениях на слагаемые получен Чжуном (Chung K. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 205—233). При конечных третьих моментах референтом (РЖМат, 1957, 8789) получен остаточный член $o(L_n^{1/4}\log^2 L_n)$, где L_n — „ляпуновское отношение“: $L_n=s_n^{-3/2}\sum_{n=1}^{n}M|X_k|^3$.

Ю. В. Прохоров

10613. Об одном классе предельных теорем. Кац (A class of limit theorems. Kac M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 2, 459—471 (англ.)

Пусть X_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с симметричной плотностью и абсолютно интегрируемой характеристической функцией $f(t)$, допускающей в окрестности нуля разложение $1-f(t)\sim|t|^\gamma$, $1<\gamma<2$. Пусть Ω — ограниченное измеримое

множество на прямой и $P_n(l, \Omega)$ $(l=0, 1, 2, \ldots)$ — распределение вероятностей для числа l сумм $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, значения которых принадлежат Ω. Тогда существуют пределы $\lim_{n\to\infty} n^{1-\frac{1}{\gamma}} P_n(l, \Omega)$, $1 < \gamma \leqslant 2$, и $\lim_{n\to\infty} \log n \cdot P_n(l, \Omega)$, $\gamma = 1$. Положим $V(x) = 1$, $x \in \Omega$ и $V(x) = 0$, $x \bar{\in} \Omega$. Метод доказательства состоит в том, что сначала находится асимптотика при $z \to 1$ производящей функции преобразований Лапласа $\sum_{n=0}^{\infty} z^n Me^{-u\sum_1^n V(S_k)}$, а затем применяется тауберова теорема для степенных рядов и предельная теорема для преобразований Лапласа. Ю. В. Прохоров

10614. Центральная предельная теорема в многомерном случае. Такано (Central convergence criterion in the multidimensional case. Takano Kinsaku), Ann. Inst. Statist. Math., 1955, 7, № 2, 95—102 (англ.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия сходимости распределений сумм $s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nl_n}$, независимых при каждом n случайных p-мерных векторов $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nl_n}$, равномерно бесконечно малых при $n \to \infty$, к p-мерному безгранично делимому закону распределения. Полученные условия применяются для вывода условий сходимости к нормальному, пуассоновскому и некоторым другим конкретным распределениям. Отметим, что эти результаты могут быть непосредственно получены из соответствующих результатов для одномерных случайных величин, содержащихся в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова „Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин" (М.— Л., 1949), так как для существования предельного распределения у s_n необходимо и достаточно существование предельного распределения у $(z, s_n) = \sum_1^{l_n} (z, x_{nl})$ для всякого z из p-мерного евклидова пространства и величины (z, x_{nl}) уже одномерны. А. В. Скороход

10615. Одно условие, при котором имеет место сильный закон больших чисел. Сороа (Una condición para que se cumpla la ley fuerte de los grandes números. Zoroa P.), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1959, 53, № 3, 491—494 (исп.)

Пусть X_l — последовательность случайных величин с математическими ожиданиями $EX_l = \mu_l$. Обозначим $S_n = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu_j)$. Если для каждой возрастающей последовательности индексов n_l $P\left\{\lim_{i\to\infty} S_{n_i}/n_i = 0\right\} = 1$, то имеет место $P\{\lim S_n/n = 0\}$ при выполнении следующего условия: Для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти „кусочно-монотонную" последовательность положительных чисел $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n_1} \leqslant \alpha_{n_1+2} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n_2}$; $\alpha_{n_2+1} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n_3}$; ... такую, что $\limsup\left(\frac{n_{l+1}}{n_l} - 1\right)\alpha_{n_{l+1}} \leqslant K\varepsilon$, $\sum P\{|X_n - \mu_n| \geqslant \alpha_n\} < \infty$. W. Richter

10616. О рядах косекансов. Ч. II. Кестен (On a series of cosecants. II. Kesten Harry), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, A62, № 2, 110—119; Indagationes math., 1959, 21, № 2, 110—119 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 46 8.

Пусть X — равномерно распределенная случайная величина, заданная на $[0, 1]$; $n_{k+1}/n_k > q > 1$ ($\{n_k\}$ — последовательность целых чисел). А. Зигмунд высказал гипотезы:

α) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\sin \pi n_k X}$ сходится или расходится с вероятностью 1 в зависимости от того, сходится или расходится $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$.

β) Если $\sup_{0<r<n} |c_n| \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |c_k|} \to 0$ $(n \to \infty)$, то $\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |c_k|} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\sin \pi n_k X}$ имеет асимптотическое распределение Коши.

Автор доказывает гипотезу α). Далее, полагая:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi t} & \text{на } \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ \frac{1}{2\pi\left(\frac{1}{2} - t\right)} & \text{на } \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ \frac{1}{2\pi(t-1)} & \text{на } \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases}$$

автор доказывает, что $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(2^k X) < \alpha\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2\sigma^2} du$ для подходящего α.

Ю. В. Линник

10617. О величине ошибки в приближении к устойчивым распределениям. I, II. Липшуц (On the magnitude of the error in the approach to stable distributions. I, II. Lipschutz Miriam), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1956, A59, № 3, 281—287; 288—294; Indagationes math., 1956, 18, № 3, 281—287; 288—294 (англ.)

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, где X_k — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Дёблин вывел необходимые и достаточные условия для сходимости функций распределения надлежаще нормированных сумм S_n к устойчивому закону (Studia math., 1940, 9, 71—96). Референт оценил ошибку приближения в общем случае. Здесь рассматриваются только положительные случайные величины, однако другие ограничения довольно слабые. Ошибка приближения зависит от $d(m, x) = h(mx)/h(m) - 1$, где $1 - F(x) = h(x)/x^{\nu}$. Соответственно различным предположениям о $d(m, x)$ выводятся оценки ошибки для конечных x и в случае $1 < \nu < 2$ при $x \to -\infty$. H. Bergström

Из Math. Revs, 1957, 18, № 4, 340.

10618. Один парадокс из теории случайных множеств. Леви (Un paradoxe re la théorie des ensembles aléatoires. Lévy Paul), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 2, 181—184 (франц.)

Строятся примеры функций от случайных величин X, заданных на отрезке $[0, 1]$ и имеющих там абсолютно непрерывную функцию распределения, обладающих парадоксальными свойствами. Функции этого вида $y = f(x)$ отображают отрезок на какое-либо пространство Ω^* так, чтобы множества $C(x)$ чисел из $[0, 1]$, находящихся на рациональном расстоянии от $x \in [0, 1]$, попадали бы в одну точку $y \in \Omega^*$, и каждая точка $y \in \Omega^*$ имела бы такой полный прообраз $C(x)$. Тогда $Y = f(x)$ „зависит от непрерывного закона распределения" в том смысле, что вероятность фиксированного значения Y равна 0. Вместе с тем, ни для какого множества $E^* \subset \Omega^*$ нельзя определить

$P(Y \in E^*)$ так, чтобы она была отличной от 0 или 1. Ю. В. Линник

10619. Предельные теоремы для однородных стохастических процессов. Бохнер (Limit theorems for homogeneous stochastic processes. Bochner S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, **40**, № 8, 699—703 (англ.)

Пусть $\varphi(\cdot)$ — k-мерная безгранично делимая характеристическая функция и $F(\cdot, t)$ — функция распределения, соответствующая $[\varphi(\cdot)]^t$; $G_n(\cdot) = nF(\cdot, s/n)$; $\mu(\cdot)$ — непрерывная функция на E_k, равная нулю в 0. Формулируются девять теорем, относящихся к предельному поведению $\int_{E_k} (1 - e^{-2\pi i \beta \mu(x)})\, dG_n(x)$ при $n \to \infty$. Например, если $\mu(x)$ линейна с точностью $o(|x|)$ в окрестности 0, то получается каноническая форма безгранично делимого закона; если $\mu(x)$ квадратична с точностью $o(|x|^2)$, то имеет место обобщение теорем Кунисава и Маруяма (Rept Statist. Appl. Res. Union Japan Sci. Eng., 1951, **1**, № 3, 22—77).

Исследуются и другие случаи, например, когда F соответствует симметричному устойчивому закону и $\mu(x) = |x|^q$. K. L. Chung

Из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 379.

10620. Соотношения между предельными законами. Лоэв (Relations entre lois limites. Loève Michel), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 23, 1585—1587 (франц.)

Последовательность независимых инфинитезимальных случайных величин сходится по распределению к безгранично делимому (б. д.) закону, если и только если их максимумы и минимумы (в каждом ряду двухиндексной схемы) сходятся по распределению к некоторым простым законам, определяемым каноническим представлениям б. д. закона. То же самое имеет место для некоторых функций случайных величин, изученных Бохнером (реф. 10619). K. L. Chung

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 494.

10621. Поправка к работам В. В. Петрова. Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 4, 485

См. РЖМат, 1960, 5565.

10622. Центральная предельная теорема для сходящейся неоднородной конечной цепи Маркова. Мотт (The central limit theorem for a convergent non-homogeneous finite Markov chain. Mott J. L.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1958—1959, **A65**, № 2, 109—120 (англ.)

Пусть P_j, $j \geqslant 1$, — матрица переходных вероятностей на j-м шагу в неоднородной цепи Маркова с конечным числом состояний. Доказывается, что если при $j \to \infty$ $P_j \to P$, где P — положительно регулярная матрица (т. е. при некотором k все элементы матрицы P^k положительны), то число x_n попаданий за первые n шагов в фиксированное состояние в неоднородном случае асимптотически нормально с теми же параметрами, что и в случае соответствующей однородной цепи с переходной матрицей P. Доказательство основано на подсчете асимптотики моментов величин $x_n \cdot n^{-1/2}$. Ю. В. Прохоров

10623. Некоторые замечания к работе В. Л. Гончарова «Из области комбинаторики». Бабкин В. И., Беляев П. Ф., Максимов Ю. И., Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 4, 445—450 (рез. англ.)

Рассматривается последовательность испытаний с двумя возможными исходами, связанная в простую однородную цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей, не содержащей нулевых элементов. Пусть ν_i — число серий длины i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) одного из исходов, а ν_k — число соответствующих серий длины k и более. Показывается, что случайный вектор $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$ после соответствующей нормировки распределен асимптотически нормально. Подсчитывается матрица вторых моментов для ν. Рассматривается возможность распространения полученных результатов на случай последовательности с произвольным числом исходов. Результаты работы являются обобщением известных результатов В. Л. Гончарова (Изв. АН СССР, 1944, 8, № 1, 3). В. Н. Сачков

10624. Аналитические случайные процессы. Беляев Ю. К., Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 4, 437—444 (рез. англ.)

Случайный процесс $\xi(t)$ называется аналитическим в области D, если почти все его выборочные функции допускают аналитическое продолжение в этой области. Доказана теорема, утверждающая аналитичность $\xi(t)$ в окрестности $t = t_0$ при условии аналитичности в окрестности (t_0, t_0) ковариации $B(t, s)$. Для гауссовых процессов справедливо и обратное. Дано несколько примеров. Для стационарных процессов имеет место теорема: Если ковариация $B(\tau)$ — целая функция экспоненциального типа с показателем не выше σ, то такими же будут и почти все выборочные функции этого процесса. Если $\xi(t)$ — стационарный процесс с ограниченным спектром $\left(B(\tau) = \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i\tau\lambda}\, dF(\lambda)\right)$, то с вероятностью 1 $\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{\lambda}\right) \frac{\sin \lambda\left(t - \frac{k\pi}{\lambda}\right)}{\lambda\left(t - \frac{k\pi}{\lambda}\right)}$, где λ — любое число, большее λ_0. Получена оценка сходимости этого ряда. В заключение исследуются аналитические процессы, разлагающиеся в ряд $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k t^k$, где ξ_k — некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и разными дисперсиями.

Р. Ф. Матвеев

10625. О вероятностной зависимости между случайной величиной и случайной функцией. Легупиль (Sur la dépendance de probabilité entre une variable aléatoire et une fonction aléatoire. Legoupil Jean), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 16, 1444—1446 (франц.)

Рассматривается задача о нахождении наилучшего (в смысле метода наименьших квадратов) приближения Y_1 к случайной величине Y при помощи линейного функционала от значений случайной функции $X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ (ср. также Дуб Дж., Вероятностные процессы, гл. XII, М., 1956). Формулируются некоторые очевидные свойства искомого наилучшего приближения Y_1. Выписывается система двух интегральных уравнений относительно функций $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t, t')$, к которой сводится нахождение наилучшего приближения к Y вида $Y_1 = \int_a^b \rho_1(t) X(t)\, dt + \int_a^b \int_a^b \rho(t, t') X(t) X(t')\, dt\, dt'$ (в несколько ином виде эти уравнения выписаны также в работе П. И. Кузнецова, Р. Л. Стратоновича и В. И. Тихонова; РЖМат, 1955, 5204). А. М. Яглом

10626. Случайная функция броуновского движения. Шварц (La fonction aléatoire du mouvement brownien. Schwartz Laurent), Sémin. Bourbaki. Secrét. math., 1957—1958, 10. Paris, 1958, 161—1—161—23 (франц.)

Приводятся основные определения теории вероятностей, определяются случайные величины со значениями из произвольного линейного топологического пространства, изучаются простейшие свойства этих величин, дается определение гауссовых величин со значениями из линейного топологического пространства. Затем вводится понятие одномерного процесса броуновского движения и выводятся некоторые известные свойства этого процесса. Рассматривается обобщенная производная процесса броуновского движения и с ее помощью опре-

деляется стохастический интеграл по процессу броуновского движения. Л. В. Скороход

10627. Феноменологическая интерпретация интегралов от случайных функций из некоторого класса. II. Рамакришнан (Phenomenological interpretation of the integrals of a class of random functions. II. Ramakrishnan Alladi), Proc. Koninkl. nederl. acad. wet., 1955, **A58**, № 5, 634—645; Indagationes math., 1958, **17**, № 5, 634—645 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 6006.

Рассматривается ряд примеров эквивалентных случайных процессов, плотности вероятностей для значений которых при любом фиксированном t совпадают, но индивидуальные реализации различны. Таковыми являются, например, процессы $y(t)=\int_0^t n(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau$; $y^*(t)=\int_0^t n(t-\tau)\varphi(t,t-\tau)\,d\tau$, где $n(t)$ — случайная величина с распределением Пуассона, имеющим параметр λt. Так, если $\varphi(t,\tau)\equiv e^{-\tau}$, то плотность вероятности $\pi(y,t)$ каждой из случайных величин $y(t)$ и $y^*(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial\pi(y,t)}{\partial t}=-\lambda\pi(y,t)+\lambda\pi[y-(1-e^{-t}),t]+\frac{\partial}{\partial y}[y\pi(y,t)]$, а если $\varphi(t,\tau)\equiv e^{-(t-\tau)}$, то в этом уравнении выпадает последнее слагаемое. Второй рассмотренный пример — интегралы $I(t)=\int_0^t Q(\tau)\,d\tau$; $I^*(t)=\int_0^t Q(t-\tau)\,d\tau$, где $Q(t)$ — ступенчатая функция со скачками в случайных точках, имеющая на k-м интервале между скачками значение $q_1 q_2 \dots q_k$, причем q_i — одинаково распределенные случайные величины. Третий пример — двукратные интегралы от $Q(t)$, четвертый — n-кратные интегралы, т. е. величины вида $Q_n(t)=\int_0^t Q(\tau)\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau$. Указывается интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет плотность вероятности для $Q_n(t)$, а также аналогичных n-кратных интегралов от $n(t)$. А. С. Монин

10628. Процессы, представимые в виде интегралов от случайных функций из некоторого класса. Рамакришнан (Processes represented as integrals of a class of random functions. Ramakrishnan Alladi), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1956, **59**, № 1, 120—127; Indagationes math., 1956, **18**, № 1, 120—127 (англ.)

Рассматривается задача о нахождении распределения вероятностей для случайной величины

$$y_m(t)=\int_0^t\varphi_m(\tau_m)\,d\tau_m\dots\int_0^{\tau_3}\varphi_2(\tau_2)d\tau_2\int_0^{\tau_2}\varphi_1(\tau_1)x(\tau_1)d\tau_1=\int_0^t F(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

где t фиксировано, $x(\tau)$ — случайная функция, $\varphi_k(\tau)$ — неслучайные функции. Предлагается воспользоваться тем, что плотность вероятности для $y_m(t)$ получается из плотности вероятностей для $y_m(t,a)=\int_0^t F(a,\tau)x(\tau)d\tau$ заменой a на t. Последняя плотность вероятности может быть найдена с помощью указываемого в работе дифференциального уравнения, которому удовлетворяет совместная плотность вероятностей $\pi(y_m,x;t,a)$ величин $y_m(t,a)$ и $x(t)$. Далее рассматриваются функции $r(t)$, изображающие случайное распределение случайного количества точек по интервалу $(0,t)$, т. е. определяемые соотношением $dx(\tau)/d\tau=\sum_{i=1}^N\delta(\tau-\tau_i)$, где точки τ_i и их количество N случайны. В этом случае момент величины $y_m(t)$ удается выразить в интегральной форме через $\Phi(t,\tau)=\int_\tau^t F(t,\tau')\,d\tau'$ и плотности вероятностей $f_n(t_1,\dots,t_n)$ для координат n случайные точек τ_i. Так, например,

$$\overline{y_m^2}(t)=\int_0^t\int_0^t\Phi(t,\tau_1)\Phi(t,\tau_2)f_2(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2+\int_0^t\Phi^2(t,\tau)f_1(\tau)\,d\tau.$$

В частности, рассматривается случай, когда $x(\tau)=n(\tau)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda\tau$. В этом случае преобразование Лапласа $p(s,t)$ плотности вероятности $\pi(y,t)$ величины $y(t)$ имеет вид $p(s,t)=\exp\left[-\int_\infty^t\lambda\{1-e^{-s\Phi(t,\tau)}\}\,d\tau\right]$.

В заключение отмечается, что функцию $y_m(t)$ можно рассматривать как решение некоторого обыкновенного дифференциального уравнения m-го порядка с неслучайными коэффициентами и правой частью $x(t)$. А. С. Монин

10629. Диффузия при дискретных движениях. Гупта (Diffusion by discrete movements. Gupta H. C.), Sankhyā, Санкия, Indian. J. Statist., 1958, **20**, № 3-4, 295—308 (англ.)

Рассматривается дискретное случайное блуждание на прямой, при котором скорость диффундирующей частицы может иметь два значения u_1 и u_2, и на каждом шаге по времени (длины τ) скорость с вероятностью p не меняется и с вероятностью $q=1-p$ меняется. Пусть c_1 и c_2 — вероятности значений u_1, u_2 в начальный момент. Определяются вероятности $\alpha(n,\nu)$ и $\beta(n,\nu)$ значений u_1 и u_2 в момент $n\tau-0$ после перемещений $(n+\nu)/2$ раз направо и $(n-\nu)/2$ раз налево. Для α получается разностное уравнение $\alpha(n+1,\nu)-p[\alpha(n,\nu-1)+\alpha(n,\nu+1)]+(p^2-q^2)\alpha(n-1,\nu)=0$. Полагая $n\tau=t$ и $x=(u_1-u_2)\nu\tau/2\nu\tau$, в пределе при малых τ для $\alpha(x,t)$ получается дифференциальное уравнение гиперболического типа, рассмотренное ранее Гольдштейном (Goldstein S., Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, **4**). В случае $u_1=-u_2=u$ рассматриваются задачи с наличием отражающих или поглощающих барьеров, обобщающие ряд задач, рассмотренных ранее Чандрасекхаром (Chandrasekhar S., Rev. mod. Phys., 1943, **15**).

Примечание референта. Дискретное случайное блуждание указанного типа, с предельным переходом к гиперболическому дифференциальному уравнению, по-видимому, впервые рассмотрено В. А. Фоком (1926) в задаче об одномерной диффузии фотонов. Гиперболическое уравнение диффузии может быть получено также методами А. Н. Колмогорова в предположении, что координата (непрерывная) и скорость (дискретная) диффундирующей частицы совместно образуют марковский случайный процесс. Такой вывод дан референтом (Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1955, № 3, 234—248) А. С. Монин

10630. Диффузия при непрерывных движениях. Гупта (Diffusion by continuous movements. Gupta H. C.), J. Math. and Phys., 1959, **38**, № 1, 36—41 (англ.)

Рассматривается непрерывное случайное блуждание частицы по прямой, при котором скорость частицы может принимать n значений $u_1,\dots,u_n$ с вероятностями $p_{rs}\delta t$ перехода от u_s к u_r за время δt. Пусть

$\chi_r(x,t)\,dx$ — вероятность того, что в момент t координата частицы x лежит в интервале dx, а скорость равна u_r. Тогда $\frac{\partial\chi_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial\chi_r}{\partial x}+P_r\chi_r-\sum' p_{rs}\chi_s=0$ (в последней сумме член, соответствующий $r=s$, опускается). Эту систему уравнений надлежит решать при начальных условиях $\chi_r(x,0)=c_r\delta(x)$, где c_r — начальное распределение вероятностей для значений u_r скорости частицы. В случае $n=2$ указанная система уравнений эквивалентна телеграфному уравнению. Рассматривается только случай $n=2$, коэффициенты уравнений считаются постоянными, и уравнения решаются путем использования преобразования Фурье по x и преобразования Лапласа по t. Решения получаются в конечном виде (в цилиндрических функциях). При больших t они асимптотически приближаются к гауссовским функциям. Рассматривается также случай непрерывного точечного источника диффундирующих частиц, испускающего их с интенсивностью $\rho(t)$, причем пропорция частиц со скоростями u_1 и u_2 равна $c_1:c_2$. Наконец, рассматривается случай, когда вероятности перехода являются функциями от времени.

А. С. Монин

10631. **Непрерывные обобщения неравенства Чебышева. Уитл** (Continuous generalizations of Tchebichev's inequality. Whittle P.), Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 4, 386—394 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается случайный процесс $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, удовлетворяющий условиям: 1) $E[x(t)]^2<\infty$ и 2) существует $x'(t)$ и $E[x'(t)]^2<\infty$. В основе полученных в работе результатов лежит следующая теорема: Пусть $S(x,y)$ — симметричный билинейный функционал, заданный на траекториях процесса $x(t)$, $S(x,x)\geqslant 0$. Предположим, что существует интегральный оператор $Y_s=\int_0^1 B(t,s)\,x(s)\,ds$ такой, что из $Y_s(t)=B(t,s)$ следует $S(x,Y_s)=x(s)$. Тогда $P\{|x(t)|^2\leqslant B(t;t)\cdot S(x,x)\}$. Оценка сверху для $P\{|x(t)|>a$ хотя бы при одном $t\}$ через $Ex(t)$ и $E[x(s)]$ получена с помощью соответствующего $S(x,y)$; в основе этого выбора лежат полученные ранее результаты для конечного набора случайных величин $x_1,\ldots,x_n$. В заключение указывается, что развитыми в работе методами можно несколько улучшить известный результат Вейля о связи между скоростью убывания собственных чисел интегрального оператора и дифференцируемостью ядра (доказательство будет опубликовано в другом месте).

А. М. Каган

10632. **О полугруппах положительных матриц. I. Юркат** (On semi-groups of positive matrices. I. Jurkat W. B.), Scripta Math., 1959, 24, № 2, 123—131

Рассматривается полугруппа положительных матриц $P(t)=\{p_{ij}(t)\}$, $t\geqslant 0$, в предположении, что $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=p_{ij}(0)$. Доказывается, что функции $p_{ij}(t)$ непрерывны при $t\geqslant 0$ и что существуют производные $q_{jk}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(p_{jk}(t)-\delta_{jk})$, причем $-\infty\leqslant q_{jj}\leqslant 0$, $0\leqslant q_{jk}<+\infty$ при $j\neq k$. Если $q_{ii}>-\infty$, то функции $e^{-q_{ii}t}p_{ij}(t)$ и $e^{-q_{ii}t}p_{ji}(t)$ не убывают с ростом t, производные $p'_{ij}(t)$ и $p'_{ji}(t)$ существуют и непрерывны при $t\geqslant 0$, причем $p'_{ij}(t+s)=\sum_k p'_{ik}(t)\,p_{kj}(s)$, $p'_{ji}(t+s)=\sum_k p_{jk}(s)\,p'_{ki}(t)$. Часть из этих результатов получена ранее для случая полугруппы стохастических матриц (Колмогоров А. Н., Уч. зап. МГУ, 1951. Сер. матем., 4, вып. 148, 53—59; Юшкевич А. А., Дипломная работа, МГУ, 1953).

Автором установлена абсолютная непрерывность функций $p'_{ij}(t)$ в случае $q_{ii},q_{jj}>-\infty$. При этом

$$p''_{ij}(t+s)=\sum_k p'_{ik}(t)\,p'_{kj}(s) \qquad (1)$$

для почти всех пар t, $s\geqslant 0$ в смысле обычной двумерной меры Лебега. Ряд (1) сходится абсолютно.

М. Г. Шур

10633. **О полугруппах положительных матриц. II. Юркат** (On semi-groups of positive matrices. II. Jurkat W. B.), Scripta Math., 1959, 24, № 3, 207—218 (англ.)

В работе (первую часть см. реф. 10632) изучаются полугруппы $P(t)=(p_{ij}(t))$ $(t\geqslant 0)$ положительных матриц, элементы которых имеют в нуле конечные производные q_{ij}. Пусть D — матрица с элементами $d_{ij}=-\delta_{ij}q_{ij}$. Если при любых $s>0$ и $t>0$ матрицы $P(s)DP(t)$ имеют конечные элементы, то полугруппа $P(t)$ удовлетворяет обоим уравнениям А. Н. Колмогорова. При этом производные $p''_{ij}(t)$ существуют, непрерывны при $t>0$ и $P''(s+t)=P'(s)P'(t)=P''(s)P(t)=P(s)P''(t)$, $P''(t)=QP'(t)=P'(t)Q$. Автор изучает вопрос об однозначности соответствия между полугруппами $P(t)$ и матрицами $P'(0)$. Пусть $P(t)$ и $\widetilde{P}(t)$ — полугруппы рассматриваемого вида и $P'(0)=\widetilde{P}'(0)=Q$. Если при $t>0$ $P'(t)=P(t)Q$ $\widetilde{P}'(t)=Q\widetilde{P}(t)$ и матрицы $P(s)(P(0)+D)\widetilde{P}(t)$ имеют конечные элементы при всех $s,t>0$, то $P(t)=\widetilde{P}(t)$.

Каждой матрице Q, являющейся производной в нуле от некоторой полугруппы $P(t)$, автор, копируя конструкцию Феллера (РЖМат, 1959, 1758), ставит в соответствие некоторую полугруппу $\widetilde{P}(t)$. Эта полугруппа обладает тем свойством, что $\widetilde{P}'(0)=Q$ и $\widetilde{P}(t)\geqslant P_1(t)$, какова бы ни была полугруппа $P(t)$ такая, что $P'_1(0)=Q$.

В статье приводятся также некоторые условия, достаточные для существования производных $p^{(n)}_{ij}(t)$ для $n\geqslant 2$, и исследуются эти производные.

М. Г. Шур

10634. **О линейном случайном блуждании с поглощающими границами. Шёберг** (Über lineare Irrfahrt mit Absorptionsschranken. Sjöberg Boris. Acta Acad. aboensis. Math. et phys., 1958, 21, № 13, 13 S., ill.) (нем.)

Рассматривается классическая задача о случайном блуждании частицы по целым точкам отрезка $[0,a]$ с поглощением на обеих границах и с одинаковыми вероятностями перехода вправо и влево p и $q=1-p$ для всех внутренних точек. С помощью явного вычисления характеристических чисел матрицы перехода получаются точные выражения для вероятностей перехода за n шагов. Затем рассматривается случай, когда на каждом шагу в одном и том же внутреннем состоянии j рождается новая частица и все частицы блуждают независимо друг от друга. Выводится формула для математического ожидания числа частиц в данном внутреннем состоянии k в любой момент n; доказывается, что распределение числа частиц в данном состоянии в момент n сходится при $n\to\infty$ к предельному распределению и вычисляется предельное математическое ожидание E_{jk}. Затем исследуется зависимость E_{jk} от j и k и устанавливается, что E_{jk} достигает максимума при $j=k=[a/2]$ независимо от значения p. Устанавливается также, что предельное математическое ожидание общего числа непоглощенных частиц $\sum_{k=1}^{a-1}E_{jk}$ будет максимальным при

$$j=\left[\frac{\log\frac{1-u^a}{a(1-u)}}{\log u}+1\right],\quad u=p/q,$$

если $p\neq q$, и при $j=[a/2]$, если $p=q=1/2$.

А. А. Юшкевич

10635. Образующие стохастических матриц. Кавасима (Les générateurs génétiques des matrices stochastiques. Kawashima Genkichi), Bull. Univ. Osaka Prefect., 1958, **A6**, 25—32 (франц.)

Пусть $P(s,t)=\|P_{jk}(s,t)\|$; $Q(s,t)=\|Q_{jk}(s,t)\|$; $j,k=1,\ldots,n$; — стохастические матрицы (матрицы переходных вероятностей для марковских процессов с конечным числом состояний). Мы говорим, что система (P,Q) порождает стохастические матрицы, если матрицы $P\times Q$, $P\times(P\times Q)$, $Q\times(P\times Q)$, ... также являются стохастическими. (Умножение матриц определено следующим образом: $P\times Q=\left[\frac{PQ+QP}{2}\right]^{1/2}$). Аналогично определены системы из трех стохастических матриц (P,Q,R), порождающих стохастические матрицы. Остальную часть статьи занимают многочисленные примеры.

Р. Ф. Матвеев

10636. Предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний. Мешалкин Л. Д., Теория вероятностей и ее применения, 1958, **3**, № 4, 361—385 (рез. англ.)

Рассматривается последовательность серий испытаний, связанных в простую однородную цепь Маркова с возможными состояниями $E_1,\ldots,E_s$; n-я серия состоит из n испытаний и управляется матрицей $P(n)=P=\|p_{uv}\|_{u,v=1}^{s}$. В развитие работ Р. Л. Добрушина (РЖМат, 1954, 3017) и А. А. Ильяшенко в реферируемой работе описываются все одномерные распределения, могущие служить при $n\to\infty$ предельными для числа попаданий μ в состояние E_1 в n-й серии. Если выполнено условие

$$\min_{\substack{u,v\\ u\neq v}}(\eta_{u,u}+\eta_{u,v}+\eta_{v,u})>\varepsilon, \qquad (1)$$

где $\eta_{u,v}$ — условная вероятность попасть в течение n-й серии хотя бы раз в E_v, находясь в начальный момент в E_u, то предельным распределением для $\alpha(\mu-n\theta)$ при любых $\alpha(n)$ и $\theta(n)$ может быть только одно из указанных в теоремах 1—5. Например, теорема 1 относится к тому случаю, когда $p_{uv}\to\bar{p}_{uv}$ при $n\to\infty$ и предельная цепь состоит из одного класса существенных состояний с k подклассами, в которой первое состояние существенно и одно образует один из подклассов. Тогда (при выполнении еще одного условия) $\mu-n/k$. сходится при $n\to\infty$, $n\equiv r(\mathrm{mod}\,k)$, по вариации к решетчатому распределению, характеристическая функция которого выписана. Если же (1) не выполнено, то, как доказано в теореме 7, предельное распределение для $\alpha(\mu-n\Theta)$ может быть получено в качестве предельного для цепей с числом состояний, меньших s. Очень интересным является введение понятия пути из одной группы состояний в другую и установление связи между ним и минорами матрицы $E-P$. Оно широко используется при доказательстве теорем.

А. М. Каган

10637. Полумартингалы на цепях Маркова. Кемень, Снелл (Semimartingales of Markov chains. Kemeny John G., Snell J. Laurie), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 143—154 (англ.)

Пусть $P=\{p_{ij}\}$ — переходная матрица цепи Маркова с конечным числом состояний, причем множество состояний цепи, для которых $p_{ii}=1$ („граница“ цепи), не пусто и из каждого состояния можно за какое-то число шагов достичь B. Число состояний, не принадлежащих B, обозначим через s. Тогда множество U вер-них полумартингалов, т. е. функций $z=\{z_j\}$ от состояний цепи, удовлетворяющих условиям $Pz\geqslant z$, $z\geqslant 0$, $z_j=v_j$ $(j\in B)$, где v_j — заданные неотрицательные граничные значения, представляет собой невырожденный s-мерный выпуклый многогранник. Пусть $P(T)$, где T — произвольное множество негранничных состояний, обозначает переходную матрицу, получающуюся превращением всех состояний из T в граничные. Каждой вершине z множества U соответствует такое T, что z является мартингалом для $P(T)$ (т. е. $P(T)z=\bar{z}$), обращающимся в нуль на T и принимающим значения v_j на B. Если все v_j положительны и из любого состояния можно попасть за один шаг в B, то всем T отвечают разные крайние точки U, так что U имеет в этом случае 2^s вершин. Вершины легко могут быть найдены с помощью финальных вероятностей для $P(T)$. Множество U^* нижних полумартингалов ($Pz\leqslant z$, $z\geqslant 0$, $z_j=v_j$ при $j\in B$) может быть получено геометрически с помощью отражения из U.

А. А. Юшкевич

10638. Об одном вопросе Поля Леви. Чакон (On a question of Paul Lévy. Chacon Rafael V.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 460—465 (англ.)

Описывается предельное поведение переходных функций $p_{ij}(t)$ марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний при $t\to\infty$. До сих пор рассматривалось предельное поведение функций $p_{ij}(t)$ в предположении измеримости этих функций (например, Lévy P., Ann. scient. École norm. supér., 1951, **3**, 327 — 381). Здесь доказывается существование предела $\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)$ в предположении, что $p_{ij}(t)>0$ $(i=1,2,\ldots)$ (без предположения измеримости).

В. А. Волконский

10639. Исследование аддитивных функционалов от марковских процессов. Дарлинг (Étude des fonctionnelles additives des processus markoviens. Darling D. A.), Calcul probabilités et applic. Paris, CNRS, 1959, 69—76. Discuss., 77—80 (франц.)

Делается обзор известных результатов об аддитивных функционалах типа $u(t)=\int_0^t V(x_s)\,ds$ от марковского процесса с траекториями x_t ($V(x)$ — измеримая функция на фазовом пространстве). Приводятся интегральное и дифференциальное уравнения, которым удовлетворяет функция

$$R_s(x,A)=\int_0^\infty M_x\{\exp[i\xi u(t)]\mid x_t\in A\}\,P(t,x,A)\,e^{-st}dt$$

($P(t,x,A)$ — переходная функция процесса). Приводится уравнение для преобразования Лапласа от функции распределения момента первого достижения некоторого множества

$$F_s(x,A)=\int_0^\infty e^{-st}P_x\{x_\tau\in B,\,0\leqslant\tau<t\mid x_t\in A\}P(t,x,A)dt.$$

Подробнее рассматриваются интегральные уравнения для нахождения функций $R_s(x,A)$ и $F_s(x,A)$ для процессов с независимыми приращениями, которые для отдельных функций $V(x)$ могут быть сведены к дифференциальному уравнению или решены в явном виде (в виде ряда). Кроме того, дается сводка известных случаев существования предельного распределения для величины $u(t)$ при $t\to\infty$. В дополнение приводится дискуссия о возможности построения и применения марковских процессов с „многомерным временем“.

В. А. Волконский

10640. О «длительностях пребывания» для марковских процессов. Дарлинг, Кац (On occupation times for Markoff processes. Darling D. A., Kac M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, № 2, 444—458 (англ.)

Пусть $x(t)$, $t \geqslant 0$ — однородный марковский процесс с произвольным фазовым пространством, $V(x) \geqslant 0$ — функция на этом пространстве, $\zeta(t) = \int_0^t V(x(\tau))\,d\tau$. Изучается предельное при $t \to \infty$ распределение величины $u^{-1}(t)\zeta(t)$, где $u(t)$ — нормирующая функция. В частном случае: $V(x) = 1$ при $x \in E$, $V(x) = 0$ при $x \bar{\in} E$, $\zeta(t)$ дает длительность пребывания процесса во множестве состояний E. Обозначим

$$p_s(x, E) = \int_0^\infty e^{-st} P(t, x, E)\,dt.$$

Пусть (A) при $s \to 0$ равномерно по x с $V(x) > 0$

$$\int V(y)\, p_s(x, dy) \sim Ch(s),$$

где $C > 0$ и $h(s) \to \infty$ при $s \to 0$. Тогда при $k \geqslant 0$

$$\int_0^\infty e^{-st}\,d\mu_k(t) \sim k!\,C k h^k(s),\ \mu_k(t) = M\zeta^k(t).$$

Если $h(s) = L(1/s)\,s^{-\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $L(1/s)$ — медленно меняющаяся функция, то применение тауберовой теоремы Карамата и метода моментов приводит к формуле $\lim\limits_{t\to\infty} P\{C^{-1}h^{-1}(1/t)\,\zeta(t) < x\} = g_\alpha(x)$, где $g_\alpha(x)$ имеет моменты $k!/\Gamma(\alpha k + 1)$ (это так называемое распределение Миттаг — Леффлера, см., например, работу Полларда (Pollard H., Bull. Amer. Math., Soc., 1948, **54**, 1115—1116)). При $\alpha = 1$ $g_\alpha(x)$ есть вырожденное распределение в точке 1, при $\alpha = 1/2$ это урезанное нормальное распределение $1/\sqrt{\pi}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ и при $\alpha = 0$ — показательное распределение $1 - e^{-x}$. Теорема 1 допускает следующее обращение: если при выполнении условия (A) и некоторой $u(t)$ величина $u^{-1}(t)\zeta(t)$ имеет невырожденное предельное распределение, то необходимо $h(s) = L(1/s)\,s^{-\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, и, следовательно, предельное распределение умножением аргумента на константу приводится к одному из распределений $g_\alpha(x)$. Работа обобщает результаты, полученные ранее различными путями Феллером (Feller W., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 98 — 119), Чжуном и Кацем (Chung K. L., Kac. M., Mem. Amer Math. Soc., 1951, **6**, 1—11) и Каллианпуром и Роббинсом (РЖМат, 1954, 1729).

Ю. В. Прохоров

10641. Некоторые классы однородных счетных марковских процессов. Добрушин Р. Л., Теория вероятностей и ее применения, 1957, **2**, № 3, 377—380 (рез. англ.)

Под процессом понимается набор переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих уравнениям Колмогорова — Чэпмена, причем требуется существование переходных плотностей $a_i = -p'_{ii}(0)$, $a_{ij} = p'_{ij}(0)$, подчиненных условию $a_i = \sum_j a_{ij} < \infty$. По данным a_{ij} строится дискретная цепь с теми же состояниями E_i и переходными вероятностями $p_{ij} = a_{ij}/a_i$ (она задает переходы по состояниям процесса до момента τ первого накопления скачков). Будем говорить, что процесс не имеет начал, если нельзя выбрать такую последовательность различных состояний E_{i_k}, что $p_{i_{k+1}, i_k} > 0$ для всех k. Пусть D_R обозначает событие: „выборочная функция цепи с переходными вероятностями p_{ij}, начиная с какого-то момента, остается в множестве состояний R^a. Скажем, что процесс имеет $n < \infty$ концов $R_1, \ldots, R_n$, если все пространство состояний можно разбить на непересекающиеся множества $R_1, \ldots, R_n$ такие, что 1) $P\{D_{R_i}\} > 0$, $i = 1, \ldots, n$, 2) $\sum_i P\{D_{R_i}\} = 1$, 3) при $R \supset R_i$ вероятность $P\{D_R\}$ равна либо 0, либо $P\{D_{R_i}\}$. В работе дается полное описание всех процессов с данными переходными плотностями $\{a_{ij}\}$, когда $\{a_{ij}\}$ удовлетворяют условиям отсутствия начал и конечности числа концов. Ввиду громоздкости построений дадим лишь наглядное описание результата. Для однозначного определения $p_{ij}(t)$ нужно задать поведение процесса после первого момента накопления скачков τ. Все концы делятся на регулярные, для которых $\tau = \infty$ с вероятностью 1, и нерегулярные, для которых $\tau < \infty$ с вероятностью 1. Регулярность конца однозначно определяется по $\{a_{ij}\}$. Нерегулярные концы произвольно (независимо от $\{a_{ij}\}$) делятся на простые и особые, и особые концы произвольно объединяются в непересекающиеся связки концов. Из простого конца в момент τ происходит скачок либо в какое-нибудь состояние, либо в какую-нибудь связку. Вероятности этих событий можно выбирать произвольно (лишь сумма их должна быть равна 1). Из особого конца в момент τ происходит скачок в связку, содержащую этот конец. Скачок в связку в момент t означает, что при любом $\varepsilon > 0$ выборочная функция за время $(t, t + \varepsilon)$ успеет побывать в бесконечном числе состояний каждого конца, входящего в связку. Поведение процесса после момента τ для каждой связки определяется набором констант, которые должны удовлетворять некоторым уравнениям и неравенствам, зависящим от $\{a_{ij}\}$, и в пределах этих уравнений и неравенств выбираются произвольно. Доказательства в работе не приведены.

А. А. Юшкевич

10642. Скачкообразные марковские процессы. Дынкин Е. Б., Теория вероятностей и ее применения, 1958, **3**, № 1, 41—60 (рез. англ.)

Вычисляются инфинитезимальные операторы однородных по времени скачкообразных марковских процессов с произвольным фазовым пространством $(E, \mathfrak{B})$. Процесс называется скачкообразным, если для любых t, ω найдется такое $\varepsilon > 0$, что $x(t + h, \omega) = x(t, \omega)$ при $0 < h \leqslant \varepsilon$. Пусть N — совокупность всех трансфинитных чисел, соответствующих вполне упорядоченным множествам не более чем счетной мощности. Число $\gamma \in N$ назовем неразложимым, если оно не представляется в виде суммы двух меньших чисел. Через τ_α и x_α $(\alpha \in N)$ обозначим соответственно момент α-го скачка и $x(\tau_\alpha)$, через B — совокупность ограниченных $\mathfrak{B}$-измеримых функций на E. Тогда слабый инфинитезимальный оператор процесса $\tilde{A}$ является сужением оператора $\mathfrak{A}f(x) = -a(x)f(x) + a(x)\int_E \Pi(x, dy)f(y)$, где $a(x)$ — плотность вероятности выхода из x, $\Pi(x, \Gamma)$ $(\Gamma \in \mathfrak{B})$ — распределение в момент скачка из x, и область определения $D_{\mathfrak{A}}$ оператора $\mathfrak{A}$ состоит из таких f, что $f \in B$ и $\mathfrak{A}f \in B$. Область $D_{\tilde{A}}$ может быть описана двумя способами:

I. Положим $\Pi^\alpha_\lambda f(x) = M_x\{e^{-\lambda\tau_\alpha} f(x_\alpha)\}$ $(\lambda \geqslant 0,\ \alpha \in N,\ f \in B)$, $\Pi^\alpha f(x) = \Pi^\alpha_0 f(x)$. Тогда при любом $\lambda > 0$ $D_{\tilde{A}}$ состоит из тех $f \in D_{\mathfrak{A}}$, для которых $\Pi^\alpha_\lambda f(x)$ непрерывно зависит от α (сходимость α_n к α означает, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ и α — наименьшее число, большее всех α_n). Отсюда получается, что переходные вероятности процесса однозначно определяются заданием $a(x)$ и функции $\Pi(\gamma, x, \Gamma) = \int_{x_\gamma \in \Gamma} e^{-\lambda\tau_\gamma} P_x(d\omega)$ $(\Gamma \in \mathfrak{B})$ для какого-нибудь $\lambda > 0$ и всех неразложимых чисел γ. Вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять $\Pi(\gamma, x, \Gamma)$

и $a(x)$, чтобы им соответствовал какой-либо скачкообразный процесс, остается открытым.

II. Пусть N_γ — должным образом определенная σ-алгебра событий, зависящих только от поведения траектории на сколь угодно малом отрезке $(\tau_\gamma - \varepsilon, \tau_\gamma)$, где γ — неразложимое число. Тогда $D_{\widetilde{A}}$ состоит из тех $f \in D_{\mathfrak{A}}$, для которых при каждом неразложимом γ $M(x)\{f(x_\gamma) \mid N_\gamma\} = \lim_{\alpha \uparrow \gamma} \overline{\lim_{\beta \uparrow \gamma}} \Pi^{\beta}_{\alpha} f(x_\alpha)$. Это позволяет обозреть класс всех скачкообразных процессов с заданными $a(x)$ и $\Pi(x, \Gamma)$. Все такие процессы могут быть построены индуктивно (индукция ведется по неразложимым трансфинитам γ), на каждом шагу нужно задавать лишь N_γ-измеримую функцию $\pi_\gamma(\omega, \Gamma)$ $(= P_x\{x_\gamma \in \Gamma \mid N_\gamma\})$, являющуюся случайной мерой и в остальном произвольную (σ-алгебра N_γ определяется по ранее построенным $\pi_\beta(\omega, \Gamma)$ с $\beta < \gamma$). Индукция продолжается до тех пор, пока $P_x(\tau_\gamma < \infty) > 0$ для какого-либо x. Кроме того, в работе доказывается, что каждое из условий $D_{\widetilde{A}} = D_{\mathfrak{A}}$ и $\lim_{n\to\infty} \Pi^n_\lambda f = 0$ $(\lambda > 0)$ необходимо и достаточно для того, чтобы $P_x(\tau_\infty = \infty) = 1$ при всех x, а также получается ряд результатов о строении σ-алгебры N_γ. А. А. Юшкевич

10643. О «времени прохождения» некоторых марковских случайных функций. Брени (Sur les «délais de passage» de certaines fonctions aléatoires de Markov. Breny H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, 27, № 1-2, 5—16 (франц.)

Пусть $n(t)$ — марковский стационарный процесс „размножения и гибели“ с возможными состояниями 0, 1, 2, ... и $m(s, L) = \min_{s \le t \le s+L} n(t)$, $M(s, L) = \max_{s \le t \le s+L} n(t)$. Выводятся рекуррентные соотношения для вычисления преобразования Лапласа функций переменной L, $F^S_R(L) = P\{m(s, L) \ge R \mid n(s) = S\}$, $S \ge R$, $G^S_R(L) = P\{M(s, L) \le R \mid n(s) = S\}$, $S \le R$, и формулы для безусловных вероятностей аналогичных событий. При выводе используется свойство строгой марковости процесса. Полученные формулы применяются к расчету пучка волокон. С математической точки зрения пучок волокон характеризуется схемой „размножения и гибели“, в которой поступления новых волокон соответствуют процессу Пуассона, а длины поступающих волокон независимы между собой и имеют фиксированное отрицательно показательное распределение. И. И. Гихман

10644. Производящие функции и полугрупповая теория ветвящихся марковских процессов. Бхаруча-Рид, Рубин (Generating functions and the semigroup theory of branching Markov processes. Bharucha-Reid A.T., Rubin Herman), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1958, 44, № 10, 1057—1060 (англ.)

Указывается на связь между производящими функциями ветвящихся процессов и инфинитезимальными операторами соответствующих марковских процессов. Приводятся без доказательства теоремы о спектральных свойствах инфинитезимальных операторов некоторых классов ветвящихся процессов. А. В. Скороход

10645. О некоторых процессах с полной стохастической связью. Теодореску (Sur certains processus à liaisons complètes. Theodorescu Radu), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, 24, № 3, 260—262 (франц.)

Для общих стационарных случайных процессов формулируется теорема, являющаяся аналогом одной эргодической теоремы, установленной А. Н. Колмогоровым для процессов Маркова (Колмогоров А. Н. Успехи матем. наук, 1938, вып. 5, 5 — 41).

Пусть ω обозначает выборочную функцию случайного процесса в отрезке времени $(-\infty, 0)$ и $P_t\{\omega, X^{[0,u)}\}$ — условная вероятность при заданном ω множества функций $X^{[0,u)}$, заданных на отрезке $[t, t+u)$. Предположим, что выполняются следующие два условия:

1) Существует положительная функция $\varepsilon(\alpha)$, $0 \le \alpha < \infty$, $\int_0^\infty \varepsilon(\alpha)\, d\alpha < \infty$, такая, что для всех достаточно больших s $(s > S)$, $\varepsilon(s) < 1$ и $|P_t\{\omega_1, X^{[0,u)}\} - P_t\{\omega_2, X^{[0,u)}\}| \le \int_s^\infty \varepsilon(\alpha)\, d\alpha$, для любых $t > 0$, $X^{[0,u)}$ из данного поля событий и любых ω_1, ω_2, совпадающих на отрезке $[-s, 0)$; 2) $P_0\{\omega, X^{[0,u)}\} \ge \lambda P_0\{\omega', X^{[0,u)}\}$, $0 < \lambda \le 1$, для произвольных ω, ω', $X^{[0,u)}$.

Тогда, при $t \to \infty$ вероятность $P_t\{\omega, X^{[0,u)}\}$ стремится к определенному пределу, не зависящему от ω. Если существуют плотности вероятностей перехода, то соответствующий результат имеет место для плотностей. И. И. Гихман

10646. О процессе нуль-один и о некоторых его применениях. Акаикэ (On a zero-one process and some of its applications. Akaike Horotugu), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, 8, № 2, 87—94 (англ.)

Рассматривается стационарный в узком смысле процесс с дискретным параметром $x_n(\omega)$. Предполагается, что функция $x_n(\omega)$ почти наверное принимает лишь значения 0 и 1. Предполагается также существование чисел $p_n \ge 0$ $(1 \le n \le N)$, в сумме, равных единице таких, что для любого набора целых чисел $n < n_1 < \ldots < n_k$ $P\{x_n(\omega) = x_{n_1}(\omega) = \ldots = x_{n_k}(\omega) = 1\} = L\prod_{j=1}^{k} P_{n_j - n_{j-1}}$, где P_n определяются рекуррентной формулой: $P_0 = 1$, $P_n = \sum_{i=1}^{\min(N, n)} p_i P_{n-i}$ $(n > 0)$, а $L = \left(\sum_{i=1}^{N} n p_n\right)^{-1}$.

Теорема. Если $p_{n_i} \ne 0$ $(1 \le i \le s)$ и $\sum_{i=1}^{s} p_{n_i} = 1$ и наибольший общий делитель чисел n_i $(1 \le i \le s)$ равен единице, то процесс $\{x_n(\omega) - L\}$ имеет непрерывную спектральную плотность $g(x) = 2R(0) + 4\sum_{n=1}^{\infty} R(n)\cos 2\pi n x$, где $R(n) = L(P_n - L)$.

Автор указывает применение излагаемой теории. М. Г. Шур

10647. Оптимизация одного класса нелинейных фильтров. Лаббок (The optimization of a class of nonlinear filters. Lubbock J. K.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1959, C, № 344E, 15 pp., ill. (англ.)

Рассматривается задача о наилучшем (в смысле метода наименьших квадратов) приближении к стационарному случайному процессу $z(t)$ при помощи величины вида

$$y(t) = \int_0^\infty K(x(t-\tau), \tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

где $K(x,\tau)$ — ядро, определяемое из условия минимума среднеквадратичной ошибки фильтрации, а $x(t)$ — еще один стационарный случайный процесс, статистически связанный с $z(t)$. Показывается, что нахождение ядра $K(x,\tau)$ может быть сведено к решению интегрального уравнения

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, \tau_2)\, p_2(x_1, x_2; \tau_1 - \tau_2)\, dx_2 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} z p_2(x_1, z; \tau_1)\, dz, \quad \tau_1 \ge 0,$$

где $p_2(x_2, x_2; \tau)$ — плотность двумерного распределения вероятностей для величин $x(t)$ и $x(t+\tau)$, а $p_2(x_1, z; \tau)$ — плотность распределения величин $x(t)$ и $z(t+\tau)$. В частном случае, когда общий класс величин (1) заменяется

классом величин $y(t)=f[x(t)]$ (т. е. считается, что $K(x, \tau)$ должно иметь вид $f(x)\cdot\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — δ-функция), нетрудно написать явную формулу для оптимального значения функции $f(x)$:

$$f(x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} z p_2(x, z; 0)\, dz}{p(x)},\quad p(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2; \tau) dx_2;$$

при некоторых специальных предположениях о виде плотности $p_2(x_1, z; \tau)$; отсюда можно получить вполне конкретные рекомендации для практического построения наилучшего нелинейного фильтра «без памяти» (т. е. вида $y(t)=f[x(t)]$). Задача о нахождении наилучшего нелинейного фильтра «с бесконечной памятью» (т. е. вида (1)) является значительно более сложной; указываются некоторые специальные методы «последовательных приближений», позволяющие строить все более и более сложные фильтры, дающие все меньшую и меньшую среднеквадратичную ошибку. В заключение рассматриваются два примера, в первом из которых среднеквадратичная ошибка на выходе оптимального нелинейного фильтра «без памяти» сравнивается с ошибкой, возникающей при использовании некоторых простых аппроксимаций оптимальной функции $f(x)$, а во втором ошибка на выходе наилучшего нелинейного фильтра «без памяти» сравнивается с ошибкой, возникающей при использовании оптимального линейного фильтра и при использовании некоторых специальных нелинейных фильтров «с бесконечной памятью» (в этом втором примере переход от линейных фильтров к нелинейным фильтрам «без памяти» позволяет уменьшить ошибку фильтрации на 30%, но дальнейший переход от фильтров без памяти к общим фильтрам с бесконечной памятью, по-видимому, уже не может привести к заметному улучшению качества фильтрации). А. М. Яглом

10648. Определение энергетического спектра и функции корреляции. Абреу-Фару (Determinação do espectro de poténcia e da função de autocorrelação a partir de «séries no tempo». Abreu Faro Manuel José de), Tecnica, 1959, **34**, № 295, 5—27 (порт.)

Обзорная статья о вычислении спектральной плотности и корреляционной функции временных рядов; основное внимание уделяется случаю, когда спектральная плотность тождественно равна нулю вне некоторого ограниченного спектрального интервала. Статья сопровождается конкретными численными примерами. А. М. Яглом

10649 К. Вероятность, статистика и истина. Изд. 2-е, перем. Мизес (Probability, statistics and truth. 2nd rev. ed. Mises Richard von. London, Allen and Unwin, 1957, 244 pp.) (англ.)

Второе (английское) издание, сохранив общую идейную направленность и содержание, в деталях подверглось заметным изменениям: рассмотрен ряд дополнительных вопросов; автор чаще прибегает к формулам и простым арифметическим подсчетам; некоторое внимание уделено изложению иных взглядов на основы теории вероятностей, развитых в известной монографии А. Н. Колмогорова и нашедших почти всеобщее распространение среди специалистов. Следует отметить, что сам Мизес остался до конца жизни чужд теоретико-множественным идеям в вопросах обоснования теории вероятностей.

Как и в первом, немецком, издании реферируемая книга включает шесть лекций. Первые две из них подверглись лишь незначительной литературной обработке. В третьей лекции добавлено изложение взглядов Колмогорова на проблему обоснования теории вероятностей, а также обзор дальнейших работ по развитию и уточнению частотной теории. Четвертая лекция, посвященная закону больших чисел, пополнилась рядом параграфов: рассмотрен усиленный закон больших чисел (с рассуждениями о том, как включить понятие усиленного закона больших чисел в частотную теорию), дано представление о статистических функциях. В пятой лекции добавлены сведения о фишеровском понятии правдоподобия, общие идеи проверки статистических гипотез, рассуждения об особенностях статистических заключений по малым выборкам. В шестую лекцию включены разделы, посвященные квантовой механике, принципу неопределенностей Гейзенберга, электронной теории металлов, эргодической теореме и цепям Маркова.

По рецензии Б. В. Гнеденко из бюл. «Новые книги за рубежом», 1959, № 10.

10650 К. Случайные элементы в пространстве Банаха. Мурье (Eléments aléatoires dans un espace de Banach. Mourier Edith. Paris, Gauthier-Villars, 1954, 84 p.) (франц.)

Доказательства и дополнительные замечания к результатам о случайных величинах со значениями в банаховом пространстве, доказанным ранее (C. r. Acad. sci., 1949, **229**, 1300—1304; 1950, **231**, 28—29; 1951, **232**, 923—925; РЖМат, 1959, 2928).

10651 К. Теория вероятностей и математическая статистика. Фиш (Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Fisz Marek. Übers. aus dem Polnisch. nach der 2. verb. und erw. Aufl. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1958, X. 528 S., ill.) (нем.)

Перевод с польского (РЖМат, 1960, 8010К)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

10652. Плотность вероятности. Положительность и порядок. Берто (Densité de probabilité. Positivité et ordre. Bertaut Félix), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 1, 27—29 (франц.)

Рассмотрим случайную величину $E(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n G(x_j)$. Случайные величины $x_1, \ldots, x_n$ независимы и одинаково распределены. Математическое ожидание функции $G(x_j)$ равно нулю, дисперсия — единице. Обозначим $\mu_q=M\{E^q\}$; $\mu_q'=M\{G(x)\}^q$. Через p, k_p' обозначим соответствующие кумулянты. Предположим, что n велико (или, что то же: $\varepsilon=1/\sqrt{n}$ мало), а $k_p'/p!$ являются медленно меняющимися функциями p. Тогда $k_p/p!=O(\varepsilon^{p-2})$. При этих условиях исследуются различные способы представления плотности вероятности $P(x)$ для функции $E(x_1, \ldots, x_n)$ при помощи кумулянт. Указано, что разложение $P(x)$ в известный ряд Эджворта не всегда удобно, так как: 1) конечная сумма членов этого ряда может принимать отрицательные значения; 2) слагаемые одного и того же порядка убывания по ε могут быть многочленами различных степеней по x. Предложено другое разложение функции $P(x)$, лишенное этих недостатков. При таком разложении: $P(x)=1/\sqrt{2\pi}\exp\{-x^2/2+Q\}$, где $Q(x, \varepsilon)$ — некоторый ряд, метод построения которого указан. В разобранном примере $G(\xi)=\frac{\xi}{\sqrt{M\xi^2}}$. Говорится о возможных обобщениях результата на случай матричнозначных функций $E(x_1, \ldots, x_n)$.

Р. Ф. Матвеев

10653. О новой случайной игре в кости и ее приложениях. Когурэ (On the new random dice and their applications. Kogure Masao), Repts Statist. Applic.

Res., Union Japan. Scientists and Engrs, 1958, 5, № 2, 35—48 (англ.)

Указывается способ получения последовательностей случайных чисел для генеральной совокупности любого объема путем бросания некоторой части, составленной из двух пирамид, склеенных основаниями. Рассчитываются параметры кости, обеспечивающие одинаковую вероятность для появления каждой грани. Приводятся также способы получения последовательностей случайных чисел с помощью двух костей, числа граней на которых дают в произведении величину объема генеральной совокупности. В. Н. Сачков

10654. Квазиразмах выборки из экспоненциальной совокупности. Райдер (Quasi-ranges of samples from an exponential population. Rider Paul R.), Ann. Math. Statistics, 1959, 30, № 1, 252—254 (англ.)

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ — упорядоченная выборка из совокупности $f(x) = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$. Статистика $w_r = x_{n-r} - x_{r+1}$ называется квазиразмахом порядка r. При $r = 0$ w_0 — обычный размах. В статье даются распределение w_r, производящая функция моментов этого распределения, кумулянты k_p порядка p, среднее значение и дисперсия w_r. Исходя из последних показано, что при $n \to \infty$ среднее значение квазиразмаха w_r расходится как гармонический ряд, а дисперсия w_r приближается к конечному числу; $Dw_0 \to \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$. При $r = 0$ и $n \to \infty$, $k_3 \to 2{,}4041$, $k_4 \to \frac{\pi^4}{15}$; $k_3/\sqrt{k_2} \to 1{,}1395$, $k_4/k_2^2 \to 12/5$. М. К. Камалов

10655. Модальные интервалы для χ^2-распределений. Сибуя (Modal intervals for chi-square distributions. Sibuya Masaaki), Ann. Inst. Statist. Math., 1958, 9, № 3, 225—236 (англ.)

Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ — непрерывная плотность унимодального распределения. Если числа L и U $(L<U)$ удовлетворяют условиям $\int_L^U f(x) = 1 - \alpha$, $f(U) = f(L)$, то интервал $[L, U]$ называется $(1-\alpha)$-значимым модальным интервалом для $f(x)$. Приводится таблица значений L, U и некоторых других величин для χ^2-распределения с n степенями свободы для $1 - \alpha = 0{,}80$; 0,90; 0,95, 0,99 и $n = 3\,(1)\,30\,(10)\,100$. Подробно описываются методы расчета. Рассматриваются применения к оценке параметра в гамма-распределениях: точечная оценка, оценка границы относительной ошибки, построение наименьшего в среднем доверительного интервала. Л. Я. Савельев

10656. О теории оценок по отношению. Гаек (On the theory of ratio estimates. Hájek Jaroslav), Aplikace mat., 1958, 3, № 5, 384—398 (англ.; рез. чешск., русск.)

Развивается теория «оценок по отношению» комбинированием метода больших выборок (асимптотический метод), метода линейной регрессии и метода, основанного на предположении нормальности. Например, оценки дисперсий, полученные по асимптотическому методу, приспособляются для конечного объема выборки при помощи подходящих предположений о регрессии. Полученные результаты затем проверяются при условии нормального распределения, и оказывается, что при обстоятельствах, характерных для выборочного исследования, доверительный интервал, построенный на основании распределения Стьюдента, покрывает точное значение с большей вероятностью, чем вероятность, которой соответствует коэффициент t_a. В статье показано, что указанный доверительный интервал короче доверительного интервала Филлера.

Далее в работе рассматривается вопрос, как получить оценку дисперсии оценки по отношению в случае, когда а) эта оценка является сложной, или когда b) выборка является выборкой по группам (типической) и многоступенчатой, или же когда с) выборка проводится методом двух фаз, который делает относительную оценку несмещенной. Резюме автора

10657. Линейное приближение неполной β-функции. Кимбалл, Лич (Approximate linearization of the incomplete β-function. Kimball A. W., Leach E.), Biometrika, 1959, 46, № 1-2, 214—218 (англ.)

Неполная β-функция имеет выражение: $I_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \Big/ \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$. Цель статьи — исследовать точность приближений $I_x(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-t^2/2}\,dt$ при различных зависимостях y_α от x, p и q. Даны три вида зависимости: 1) $y_\alpha = A + BX$, где $A = \frac{9q-1}{3\sqrt{q}}$; $B = -3\sqrt{q}\left[1 + \frac{2p-1}{q}\right]^{1/3}$ $X = \left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{21}{23} + \frac{1}{19x} + \frac{1}{3}\,e^{-5{,}2x}\right)\right]^{1/3}$; 2) $y_\alpha = A - 3\sqrt{q}\left[(1-x) + \frac{2p-1}{2q}\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}\right)\right]^{1/3}$; 3) $y_\alpha = \frac{p(1-x) - x(q-1) - 0{,}5}{[(p+q-1)\,x(1-x)]^{0{,}5}}$. Для значений $2 \leqslant p \leqslant 500$, $1 \leqslant q \leqslant 451$ и x в окрестности уровней 0,05; 0,30; 0,70; 0,95 приведена таблица точных и приближенных значений неполной β-функции. Указывается на преимущества различных видов приближений в зависимости от значений p, q и x. П. А. Строганов

10658. Связь между распределением Пуассона и χ^2—распределением (Relation entre loi de Poisson et loi de χ^2), Rev. statist. appl ., 1959, 7, № 2, 33—35 (франц.)

Приводятся графики для определения некоторых вероятностей, использующие связь между распределением Пуассона с параметром m и χ^2-распределением с $2c$ степенями свободы, основанную на соотношении: $\frac{1}{\Gamma(c)}\int_m^\infty e^{-u}u^{c-1}du = \sum_{k=0}^{c-1}\frac{m^k}{k!}e^{-m}$. Л. Я. Савельев

10659. Распределение сравнений: пуассоновские предельные формы и получение методов аппроксимации. Бартон (The matching distributions: Poisson limiting forms and derived methods of approximation, Barton D. E.), J. Roy. Statist. Soc., 1958, B20, № 1, 73—92 (англ.)

Рассматриваются следующие задачи сравнения:

1) Имеются две совокупности по N элементов в каждой. В первой совокупности элементы имеются k различных сортов, причем a_i элементов i-го сорта $(1 \leqslant i \leqslant k)$, так что $\sum_{i=1}^k a_i = N$. Во второй совокупности, помимо b_i элементов i-го сорта $(1 \leqslant i \leqslant k)$ имеется b_0 элементов, которые называются бланками, при этом $\sum_{i=0}^k b_i = N$. Случайным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами этих совокупностей и определяется распределение r пар, в которых сорт элементов первой и второй совокупностей совпадают. Более общая задача:

2) Сравниваются K совокупностей с различным распределением элементов по k сортам. Рассматриваются три типа сравнений: а) K элементов заданы в определенном порядке; б) среди K элементов имеется по крайней мере два одного сорта; в) по крайней мере один из K элементов заданного сорта. Для решения таких комбинаторных задач автор строит выражения

для факториальных моментов искомых распределений. Изучается асимптотическое поведение рассматриваемых распределений при $N \to \infty$. Работа содержит довольно подробный обзор по проблеме и список литературы, относящейся к математической части проблемы.

В. С. Королюк

10660. Некоторые условия состоятельности и равномерной состоятельности статистических процедур. Крафт (Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures. Kraft Charles. Univ. Calif. Publs Statist., 1955, 2, № 6, pp. 125—141) (англ.)

Приводятся условия состоятельности или равномерной состоятельности критерия проверки одного множества гипотез против другого. Указываются применения к критериям и оценкам максимального правдоподобия.

J. Wolfowitz

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 5, 505.

10661. Решающие правила для проблем классификации, основанные на расстоянии. Мацусита (Decision rule, based on the distance, for the classification problem. Matusita Kameo), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, 8, № 2, 67—77 (англ.)

Определим расстояние между распределениями вероятностей $F = \{p_i\}$ и $G = \{q_i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ соотношением: $\|F - G\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2$. Пусть даны две дискретные случайные величины X и Y с распределениями соответственно F и G. Случайная величина Z имеет одно из этих распределений. Требуется статистически решить, какое именно. Пусть S_n, S'_m, S''_l — эмпирические распределения для X, Y, Z соответственно, где l, m, n означают числа наблюдений. Предлагается следующее решающее правило: когда $\|S_n - S''_l\| \leqslant \|S'_m - S''_l\|$, считаем, что Z имеет распределение F; когда $\|S_n - S''_l\| > \|S'_m - S''_l\|$, считаем, что Z имеет распределение G. Приводится естественное обобщение этого правила на случай большого числа случайных величин. Даются оценки и асимптотическое выражение для вероятности $P\{\|S_n - S''_l\| \leqslant \|S'_m - S''_l\|\}$ $(l, m, n \to \infty)$, когда Z имеет распределение F. Рассматривается случай, когда X, Y, Z являются случайными векторами. Задача сводится к одномерной путем специального выбора линейных комбинаций компонент. Исследуется также случай, когда распределения величин X, Y зависят от неизвестных параметров. Библ. 9 назв.

Л. Я. Савельев

10662. Элементарное доказательство асимптотического χ^2-распределения. Моргенштерн (Elementarer Beweis für die asymptotische χ^2-Verteilung. Morgenstern D.), Metrika, 1958, 1, № 3, 239—241 (нем.)

Дается вывод асимптотического распределения величины $A = \sum_{i=0}^{s} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$. При этом используется метод индукции по числу степеней свободы с некоторыми ссылками на центральную предельную теорему. В процессе доказательства не используется понятие характеристической функции.

Б. Ф. Финкельштейн

10663. Точное распределение максимальных значений некоторых функций от эмпирических функций распределения. Чжан Ли-цянь, Фиш (Exact distributions of the maximal values of some functions of empirical distribution functions. Chang L. C., Fisz M.), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 341—346 (англ.)

Пусть $S_{jn_j}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ — эмпирические функции распределения, построенные по последовательности серий n_j взаимно независимых наблюдений $N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i$ и $D^+ = \max_x \left\{ \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{i} n_j S_{jn_j}(x) - S_{i+1, n_{i+1}}(x) \right\}$, $D_l = \max_x \left| \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{i} n_j S_{jn_j}(x) - S_{i+1, n_{i+1}}(x) \right|$. Результат авторов состоит в следующем: величины $\{D_l^+\}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, а также величины $\{D_l\}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, независимы в совокупности.

И. И. Гихман

10664. Об одном свойстве максимального отклонения между функциями теоретического и эмпирического распределений для двумерной выборки объема n. Жефруа (Sur une propriété de l'écart maximum entre les fonctions de répartition théorique et empirique d'un échantillon de n points à deux dimensions. Geffroy Jean), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 19, 2283—2285 (франц.)

Доказывается, что распределение максимума отклонения кумулятивной функции распределения от ее выборочного аналога не является непараметрическим в двумерном случае, даже если F абсолютно непрерывна.

H. Teicher

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 11, 1220.

10665. Графическое вычисление тау как коэффициента беспорядка. Гриффин (Graphic computation of tau as a coefficient of disarray. Griffin Harold D.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, 53, № 282, 441—447 (англ.)

Коэффициент τ Кендала — мера соответствия между рядами, трактуется как мера беспорядка и даются графические методы подсчета его.

Р. Х. Дивеев

10666. Применение группы делимых планов в смешанных симметрических факториальных расположениях. Зилен (The use of group divisible designs for confounded asymmetrical factorial arrangements. Zelen Marvin), Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 1, 22—40 (англ.)

Группа делимых планов характеризуется b блоками с k экспериментальными единицами в каждом блоке так, что каждый из $v = mn$ факторов повторяется в эксперименте r раз. $v = mn$ факторов делится на m групп с n факторами в каждой, где какие-то два фактора в одной и той же группе находятся в первой ассоциации и два фактора в разных группах находятся во второй ассоциации.

Дается общая теория применения группы делимых планов с неполными блоками в симметрических факториальных опытах.

М. К. Камалов

10667. О таблицах корреляции с заданными уровнями и границами. Фреше (Les tableaux de corrélation dont les marges et des bornes sont données. Fréchet Maurice), Ann. Univ. Lyon, 1957, A, № 20, 13—31 (франц.)

Рассмотрим матрицу $T = \{n_{ij}\}$; $i = 1, \ldots, q$; $j = 1, 2$. n_{ij} — натуральные числа. Назовем уровнями матрицы суммы: $N_i = \sum_j n_{ij}$; $N'_j = \sum_i n_{ij}$; $\sum_i N_i = \sum_j N'_j = N$. Автор решает задачу нахождения такой матрицы T, уровни которой заданы заранее и для которой должны выполняться неравенства: $0 \leqslant n_{ij} \leqslant m_{ij}$ для некоторых заданных чисел m_{ij}. Получены необходимые и достаточные условия существования хотя бы одного решения этой задачи и дан рекуррентный метод нахождения этого решения. Обозначим $s_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$. В статье

определяются такие числа s_i', s_i'', что для всех решений указанной задачи $s_i' \leqslant s_i \leqslant s_i''$. Доказано, что эти границы достигаются. Решение задачи будет единственным, если и только если $s_i' = s_i''$ для всех i. Рассмотрен конкретный пример. Р. Р. Мизес

10668. Оценивание параметров дифференциального процесса. Рубин, Таккер (Estimating the parameters of a differential process. Rubin Herman, Tucker Howard G.), Ann. Math. Statistics, 1959, 30, № 3, 641—658 (англ.)

Пусть $X(t)$, $t \in [0, +\infty)$, — дифференциальный процесс, т. е. однородный стохастический процесс с независимыми приращениями. Предполагается, что $P[X(0) = 0] = 1$. Тогда распределение $X(t)$ безгранично делимо и логарифм его характеристической функции имеет вид: $\log f_{X(t)}(u) = i\gamma t u + t\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)$, где γ — вещественная постоянная, G — ограниченная неубывающая функция, $G(-\infty) = 0$. При разных способах наблюдения над выборочными функциями процесса получены состоятельные оценки для γ, для функции скачков G, а также для дисперсии нормальной компоненты процесса. А. П. Хусу

10669. Оценка параметров в системах стохастических дифференциальных уравнений. Филлипс (The estimation of parameters in systems of stochastic differential equations. Phillips A. W.), Biometrika, 1959, 46, № 1-2, 67—76 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$x_i(t) = \sum_{i \neq j}\int_0^\infty w_{ij}(h)\, x_j(t-h)\,dh + \xi_i(t),\quad i,j = 1,2,\ldots,n, \quad (1)$$

где $\xi_i(t)$ — стохастические переменные. Предполагается

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty r_{ik}(h)\,\zeta_k(t-h)\,dh,\quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\int_0^\infty e^{-sh} w_{ij}(h)\,dh = \frac{\beta_{ij}(s)}{\alpha_{ij}(s)}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-sh} r_{ik}(h)\,\zeta_k(t-h)\,dh = R_{ik}(s) = \frac{\eta_{ik}(s)}{\gamma_{ik}(s)},$$

где $\beta_{ij}(s)$, $\alpha_{ij}(s)$, $\eta_{ik}(s)$ и $\gamma_{ik}(s)$ — полиномы конечной степени относительно s. Система (1) преобразуется в следующую, записанную в матричной форме, систему:

$$Q(D)\,x(t) = R(D)\,\zeta(t),\quad Q_{ij}(D) = \begin{cases} -\dfrac{\beta_{ij}(D)}{\alpha_{ij}(D)}, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где D — дифференциальный оператор d/dt, $x(t)$ и $\zeta(t)$ — векторы и $R(D)$ — матрица $\|r_{ij}(D)\|$. В статье даны методы оценки параметров системы по малым выборкам при различных предположениях относительно входящих в систему (1) функций. П. А. Строганов

10670. Оценка корреляции случайной нестационарной функции. Кампе-де-Ферье, Френкель (Estimation de la corrélation d'une fonction aléatoire non stationnaire. Kampé de Fériet Joseph, Frenkiel François N.), C. r. Acad. sci., 1959, 249, № 3, 348—351 (франц.)

Рассмотрим случайную функцию $\xi(t, \omega)$ такую, что $M\{\xi(t, \omega)\}^4 < \infty$, а функция $M\{\xi(t_1)\,\xi(s_1)\,\xi(t_2)\,\xi(s_2)\}$ и ковариация $\Gamma(t, t')$ суммируемы в каждой ограниченной области изменения своих аргументов. Обозначим через $\rho_T(h, \omega_0)$ урезанную эмпирическую функцию корреляции:

$$\rho_T(h, \omega_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\frac{|h|}{2}}^{T-\frac{|h|}{2}} \xi\left(t - \frac{h}{2}, \omega_0\right)\xi\left(t + \frac{h}{2}, \omega_0\right)dt; & |h| \leqslant T, \\ 0; & |h| \geqslant T, \end{cases}$$

а через $R_T(h)$ ее математическое ожидание. „Функция корреляции" для $\xi(t, \omega)$ определяется как предел $R(h) = \lim_{T\to\infty} R_T(h)$. Случайные функции, для которых этот предел существует, названы асимптотически стационарными (например, если $\lim_{a\to\infty}\Gamma\left(a - \frac{h}{2}, a + \frac{h}{2}\right) = A(h)$, то $A(h) = R(h)$). Указано, что $R(h)$ является положительно определенной функцией. Приводится ряд конкретных примеров асимптотически стационарных процессов. В заключение рассмотрен случай, когда $\Gamma(t + \tau_0, s + \tau_0) = \Gamma(t, s)$ для всех t и s и некоторого τ_0. Здесь можно особенно просто оценить $R(h)$, зная эмпирическую функцию корреляции для нескольких реализаций. Разобран числовой пример. Р. Ф. Матвеев

10671. Приближение к распределению выборочного объема для последовательных тестов. 1. Тесты простых гипотез. Бхате (Approximation to the distribution of sample size for sequential tests. I. Tests of simple hypotheses. Bhate D. H.), Biometrika, 1959, 46, № 1-2, 130—138 (англ.)

Даются общие формулы для верхней и нижней границ функции распределения выборочного объема в последовательных правилах проверки простых гипотез. Р. Х. Дивеев

10672. Оценка случайной ошибки при вычислении определителя. Аояма (On the evaluation of the sampling error of a certain determinant. Aoyama Hirojiro), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, 8, № 1, 27—33 (англ.)

Оценивается дисперсия значения определителя, все члены которого имеют или ошибки измерения, или случайные ошибки. Доказывается теорема: Пусть $X = |x_{ij}|$ есть определитель k-го порядка, пусть его элементы x_{ij} есть независимые случайные неотрицательные величины и пусть $Mx_{ij} = a_{ij}$; $Dx_{ij} = \sigma_{ij}^2 = \sigma^2$ для всех i, j, $\max_{ij} a_{ij} = M$, $\min_{ij} a_{ij} = m$, тогда $\max DX = k! \times$

$$\times\left\{\sigma^{2k} + k\sigma^{2(k-1)}M^2 + A_k^{k-2}\sum_{r=2}^{k-1}\frac{\sigma_r^{2(k-r)}}{(k-r)!}(M^{2r} - m^{2r})\right\}.$$

Отмечается, что аналогичным путем возможно получить оценку дисперсии значения определителя, отказавшись от требования неотрицательности его членов. П. Б. Якоби

10673. Поведение разумного человека в условиях риска: критика постулатов и аксиом американской школы. Алле (Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine. Allais M.), Econometrica, 1953, 21, 503—546 (франц.)

10674. Существенно полные классы решающих правил для определения вероятности состояния однородного стохастического процесса. Дивеев Р. Х., Тр. 3-го Всес. матем. съезда 1956, 4, М., АН СССР, 1959, 63—64

10675 К. Статистика крайних. Гумбель (Statistics of extremes. Gumbel Emil. Columbia Univ. Press, London, Oxford Univ. Press, 1958, XXI, ill., 375 pp.) (англ.)

Книга посвящена одному вопросу — изучению максимальных и минимальных членов вариационного ря-

да для последовательности независимых испытаний, а также размаха, т. е. разности между максимальным и минимальным членами вариационного ряда. Изложение рассчитано скорее на практика и иногда перегружено чисто вычислительными деталями в ущерб моментам принципиального характера. В тексте приведено много графиков и таблиц, придающих большую наглядность сообщаемым сведениям. Порой автор ограничивается приведением лишь результатов и отсылает читателя к оригинальным исследованиям. В таком плане, в частности, даны все конкретные применения инженерного, физического и геофизического характера.

Из восьми глав книги первые семь посвящены минимальным и максимальным членам вариационного ряда (не обязательно первому и последнему), а последняя — изучению размаха. Каждая глава снабжена большим числом замечаний, которые могут оказаться полезными при прикладных исследованиях. Значительное место уделяется вычислению различного рода средних и разысканию асимптотических формул. Резюме имеется не только в конце книги, но и многие параграфы снабжены резюме. Общие результаты зачастую иллюстрируются подробным рассмотрением отдельных частных случаев. В конце параграфов, а иногда и в других подходящих местах предлагаются вопросы и задачи на изложенный теоретический материал. Не оспаривая ценности проделанной автором работы, хотелось бы отметить, что в настоящее время для приложений как технических, так и естественно-научных, наряду с рассмотрением крайних членов для вариационного ряда, построенного по последовательности независимых наблюдений, очень существенно изучение подобных задач для результатов связных наблюдений. Именно с таким положением дел приходится встречаться в задачах гидрологии, метеорологии, теории прочности материалов и пр. Если же ограничиваться только последовательностью независимых наблюдений, то следует заметить, что до сих пор нет еще книги, в которой достаточно полно излагалась бы теория вариационного ряда. Монография автора заполняет известный пробел в коллекции монографий по статистике. Она с интересом будет прочитана как статистиками-теоретиками, так и статистиками-практиками. Библ. свыше 600 назв.

По рецензии Б. В. Гнеденко из бюл. «Новые книги за рубежом», 1959, № 9.

10676 К. Распределение квадратичных форм в выборках из нормальной совокупности. Камалов М. К. Ташкент, АН УзбССР, 1958, 289 стр., илл., 14 р. 60 к.

Подробный сборник различного вида распределений для линейных, квадратичных и билинейных статистик при нормальных независимых наблюдениях. Гл. I. «Матрицы квадратичных и билинейных форм. Интегралы, встречающиеся в статистике». Некоторые алгебраические теоремы В. И. Романовского, ряды Лагерра. Гл. II. «Распределение χ^2 и его применение». Распределение некоторых квадратичных форм и их отношений (распределение типа Р. Фишера). Асимптотическое распределение χ^2-статистик. Гл. III «Распределение линейных и квадратичных форм в связи с распределением моментов второго порядка». Совместное распределение вторых моментов двумерной повторной переменной выборки, линейных, квадратичных и билинейных статистик, коэффициентов регрессии. Применение к текущему статистическому контролю. Таблицы. Гл. IV. «Независимости квадратичных и билинейных форм». Применение к текущему статистическому контролю. Условие независимости квадратичных статистик при повторной выборке из нормальной совокупности. Независимость билинейных и квадратичных форм. Применение к обработке наблюдений и дисперсионному анализу. Гл. V. «Общие вопросы теории распределения квадратичных форм». Характеристические функции квадратичных статистик при нормальной повторной выборке. Разложение распределений в ряд, содержащий полиномы Лагерра. Моменты и кумулянты квадратичных форм. Гл. VI. «Предельные распределения». Центральная предельная теорема для векторов. Некоторые виды предельных распределений квадратичных форм. Книга может служить справочником по распределениям квадратичных статистик нормальных независимых наблюдений.

Примечание референта. Автор дает странные названия известным вещам. Так, совершенно тривиальный факт элементарной теории вероятностей на стр. 38 у него называется «Теорема В. И. Романовского».

Ю. В. Линник

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

10677. К теореме Фань Цюя о минимаксе. Хершфелд (On a minimax theorem of K. Fam. Hirschfeld R. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. Indagationes math., 1958, **A61**, № 4, 470—474 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Фань Цюя (РЖМат, 1953, 638). Доказательство проводится методом, близким методу Никайдо (РЖМат, 1954, 4487).

Н. Н. Воробьев

10678. Предпочитаемые оптимальные стратегии. Бак (Preferred optimal strategies. Buck R. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 2, 312—314 (англ.)

Изучаются возможности использования игроком в антагонистической игре ошибок противника.

Пусть $\Gamma = \langle A, B, M \rangle$ — антагонистическая игра, причем A и B — выпуклые компактные множества в конечномерных пространствах, а функция выигрыша M билинейна. (Как известно, при этом игроки имеют непустые множества оптимальных стратегий A_1 и B_1). Стратегии $x', x'' \in A$ называются *эквивалентными*, если $M(x', y) = M(x'', y)$ для всех $y \in B$. Пусть B имеет конечное множество крайних точек (называемых далее чистыми стратегиями). Чистая стратегия π называется *хорошей*, если она входит с ненулевым коэффициентом в одну из оптимальных стратегий, и называется *плохой* в противном случае. Выпуклая оболочка всех плохих стратегий обозначается через $B^{(1)}$ $(= B_1^{(1)})$.

Теорема. Эквивалентны три утверждения: а) $B^{(1)}$ пусто; б) B_1 содержит внутреннюю точку B; в) все стратегии из A_1 эквивалентны.

Устанавливаются простые, но интересные факты о последовательности игр $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$, где $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_{n+1} = \langle T_1(\Gamma_n), B_{\Gamma_n}^{(1)}, M \rangle$.

Н. Н. Воробьев

10679. Рекурсивные игры. Эверетт (Recursive games. Everett H.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 47—78 (англ.)

Рассматривается конечный набор пар (S_1^k, S_2^k) пространств стратегий игроков 1 и 2 $(k = 1, \ldots, n)$. В процессе рекурсивной игры выбор $X^k \in S_1^k$, $Y^k \in S_2^k$ влечет с вероятностью p^k получение 1 от 2 зависящей от X^k и Y^k суммы e^k и прекращения игры, а с вероятностью q^{kj} дальнейший выбор некоторых $x^j \in S_1^j$, $Y^j \in S_2^j$ (Очевидно, $p^k + \sum_j q^{kj} = 1$, $k = 1, \ldots, n$). Таким образом рекурсивная игра включает в себя n „игровых элементов", исходами которых могут быть как выигрыши, так и переходы к другим игровым элементам. Под стратегией 1 в рекурсивной игре понимается последовательность $\chi = \{X_t\}_{t=1,2,\ldots}$,

где $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^n)$, а $X_t^k \subset S_1^k$. Аналогично определяются стратегии 2.

Ситуация (χ, ψ) для каждого начального элемента Γ^j определяет случайное блуждание с поглощением, так что можно говорить о векторном выигрыше

$$\vec{E}x(\chi, \psi) = \left\{ p^k e_1^k + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} p_t^{k,j} e_t^j \right\}_{k=1,\ldots,n}$$

в этой ситуации. (Здесь $p_t^{k,j}$ – вероятность прекращения игры в момент t на игровом элементе Γ^j при условии, что началась игра с игрового элемента Γ^k; e_t^j – получаемый при этом игроком 1 выигрыш). Указание выигрыша завершает задание рекурсивной игры Γ.

В определении (ε)-оптимальной стратегии эта (ε)-оптимальность понимается одновременно по всем компонентам выигрыша.

Вектор $\mathbf{V}$ называется значением Γ, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие стратегии χ^ε и ψ^ε, что

$$\vec{E}x(\chi^\varepsilon, \psi) \geqslant \mathbf{V} - \varepsilon\mathbf{1}, \quad \vec{E}x(\chi, \psi^\varepsilon) \leqslant \mathbf{V} + \varepsilon\mathbf{1}$$

для всех χ, ψ.

Пусть $\mathbf{W} = (W^1, \ldots, W^n)$ – произвольный n-мерный вектор. Рассмотрим игру $\Gamma^k(\mathbf{W})$ $(k = 1, \ldots, n)$ с пространствами стратегий S_1^k, S_2^k, полагая $H^k(X^k, Y^k, \mathbf{W}) = p^k e^k + \sum_j q^{k,j} W^j$. Эти соотношения сопоставляют вектору $\mathbf{W}$ вектор $M(\mathbf{W}) = (\mathrm{val}\,\Gamma^k(\mathbf{W}))$, $k = 1, \ldots, n$. Отображение M называется преобразованием значений. Полагая $\mathbf{U} \geqslant \mathbf{V}$, если $U^i \geqslant V^i$, причем в случае $V^i > 0$ имеет место строгое неравенство, и определяя симметрично отношение $\leqslant$, обозначим через $C_1(\Gamma)$ и $C_2(\Gamma)$ множества n-мерных векторов, для которых $M(\mathbf{W}) \geqslant \mathbf{W}$ и соответственно $M(\mathbf{W}) \leqslant \mathbf{W}$. Вектор $\mathbf{V}$ называется критическим для Γ, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют векторы $\mathbf{W}_1 \subset C_1(\Gamma)$ и $\mathbf{W}_2 \subset C_2(\Gamma)$, лежащие в ε-окрестности V.

Доказывается, что вектор, критический для игры, является ее значением.

Основная теорема. Если в каждом из игровых элементов $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^n$ выигрыши ограничены, а все игры вида $\Gamma^k(\mathbf{W})$ вполне определены, то рекурсивная игра Γ имеет критический вектор. Приведенные понятия и предложения распространяются и на некоторые более общие случаи, среди которых следует отметить игры с непрерывным временем. Н. Н. Воробьев

10680. Влияние психологического отношения на исход игры. Кемень, Томпсон (The effect of psychological attitudes on the outcomes of games. Kemeny John G., Thompson Gerald L.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 273—298 (англ.)

В условиях игры для игрока может оказаться важным не сам выигрыш x, а некоторая функция $f(x)$ от него, называемая функцией полезности. Вид этой функции отражает, по мнению авторов, психологическое отношение игрока к выигрышу (обычно в теории игр рассматривается случай $f(x) = x$). Говорят, что функция полезности g сохраняет стратегии в матричных играх, если, какова бы ни была матрица $\|a_{ij}\|$, множества оптимальных стратегий игроков в игре с матрицей $\|g(a_{ij} + h)\|$ не зависят от h. Доказывается, что для того чтобы функция g сохраняла стратегии в матричных играх, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид $ax + c$ $(a > 0)$ или $a^{bx} + c$ $(ab > 0)$. Аналогичный результат устанавливается для общих бескоалиционных игр.

Рассматриваются некоторые типы функций полезности, характеризующие различные психологические черты игроков в игре (азартность, осторожность, равнодушие к малым или, напротив, к большим выигрышам и т. д.) и их влияние на выбор игроками стратегий. В качестве примеров приводятся лотереи, страхование и игра полковника Блотто. Н. Н. Воробьев

10681. Матричный Ним. Холлади (Matrix Nim. Holladay John C.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 2, 107—109 (англ.)

Рассматривается одно обобщение игры «Ним». Доказана теорема о ситуациях обобщенной игры. Другое обобщение см. Moore E. H., Ann. Math., 1910, 11, № 2, 93—94. Л. И. Горьков

10682. Деловые игры с практической точки зрения — о их будущем развитии в Японии. Окумура (Okumura Seiziro), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1958, 3, № 2, 54—59 (японск.)

10683. Отчет о некоторых экспериментах по организации. Кларк, Аккофф (A report on some organizational experiments. Clark Donald F., Ackoff Russell L.), Operat. Res., 1959, 7, № 3, 279—293 (англ.)

Вопрос о влиянии структуры организации (рабочей бригады, команды и т. п.) на успешность ее работы изучался путем разыгрывания экспериментальной игры. Описаны некоторые эксперименты в рамках этой игры (исследовалось, например, влияние присутствия или отсутствия того или иного члена команды, возможности общения и т. д.). Сообщение носит предварительный характер, математическая теория отсутствует. А. А. Корбут

10684. Метод решени задачи о бродячем торговце. Крус (A method for solving traveling-salesman problems. Croes G. A.), Operat. Res., 1958, 6, № 5, 791—812 (англ.)

Пусть дана $n \times n$ матрица $C = \|c_{ij}\|$ и набор S всех возможных последовательностей s упорядоченных пар (i, j), для которых: 1) все величины $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ встречаются по крайней мере 1 раз в каждой последовательности; 2) если (i_1, j_1) и (i_2, j_2) — последовательные пары в s, то $j_1 = i_2$; 3) если (i_1, j_1) — первый элемент и (i_m, j_m) — последний элемент s, то $j_m = i_1$. Найти последовательность $s_0 \in S$, для которой $M(s_0) = \min_s M(s)$, где $M(s) = \sum_{(i,j) \in s} c_{ij}$.

Задача решается при следующих дополнительных условиях: в каждой последовательности все величины i, j встречаются только один раз, а матрица C симметрична. Решение разбивается на 3 этапа: а) нахождение „пробного“ решения $s \in S$, для которого $M(s)$ уже достаточно мало; б) применение „инверсии“ с целью уменьшения $M(s)$. „Инверсия“ $I(i_1, i_k)$ преобразует пробное решение $1, 2, \ldots, i_0, i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, n$ в другое: $1, \ldots, i_0, i_k, i_{k-1}, \ldots, i_2, i_1, i_{k+1}, \ldots, n$; в) выбор в C элементов, которые могут быть включены в конечное s и попытки найти преобразования, которые уменьшают $M(s)$.

Приводится ряд практических приемов, облегчающих вычисления. Работа проиллюстрирована примером с матрицей 20×0. Критерия оптимальности полученного решения нет. Предложенный путь решения дает ответ быстрее, чем симплекс-метод и может быть реализован на вычислительных машинах. Э. А. Меркулова

10685. Новая разновидность симплекс-метода. Дель-Пунта (Una nuova elaborazione del «metodo del simplesso». Del Punta Veniero), Riv. polit. econ., 1957, 47, № 7-8, 603—642 (итал.)

Под S преобразованием $(S - n)$ $m \times n$-матрицы $Y = (y_{ij})$ автор понимает преобразование $Y^* = YH$, где H — столбец, получаемый транспонированием строки

$$\left(-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \ldots, \frac{1 - y_{rk}}{y_{rk}}, \ldots, -\frac{y_{mk}}{y_{rk}}\right).$$

Выбор y_{rk} производится следующим образом:

В некотором k-м столбце матрицы Y с $y_{1k}<0$ выделяется множество положительных элементов $y_{i_1k}, y_{i_2k}, \ldots, y_{i_sk}$. Из этого множества выбирается элемент y_{rk}, для которого

$$\frac{Y^r}{y_{rk}} = \min_{t=1,2,\ldots,s} (\text{lex}) \frac{Y^{i_t}}{y_{i_tk}},$$

где Y^{i_t} есть i_t-я строчка матрицы Y, и строки сравниваются лексикографически, т. е., $Y^i \geqslant Y^j$, если первая отличная от нуля компонента $Y^i - Y^j$ положительна. Для нахождения максимума $f=c_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n$ при ограничениях $x_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и $AX=B$, где $A=(a_{ik})-m\times n$-матрица, а B, X — столбцы соответственно из m и n элементов, строится $(m+2)\times(n+1)$-матрица

$$P^{(0)}=\begin{pmatrix} c_0 & -c_1 & \ldots & -c_n \\ b_0 & b_{01} & \ldots & b_{0n} \\ B & & A & \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент второй строки матрицы $P^{(0)}$ равен сумме последних m элементов соответствующего столбца, взятой с обратным знаком. Предполагается, что m нижних строк положительны. К $P^{(0)}$ применяется ряд $S-n$, но с таким выбором элементов, как если бы проводились $S-n$ для матрицы, получаемой отбрасыванием первой строки. После конечного числа шагов процесс должен оборваться. Могут представиться две возможности: 1) В полученной матрице $P^{(t)}$ первый элемент второй строки отрицателен. В этом случае система $AX=B$ не имеет неотрицательных решений. 2) В матрице $P^{(t)}$ вся вторая строка состоит из нулей. Тогда проводится ряд обычных $S-n$ матрицы $P^{(t)}$, который также обрывается после конечного числа шагов. Пусть полученная при этом матрица имеет вид

$$Z=\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ z_{10} & z_{11} & \ldots & z_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{m0} & z_{m1} & \ldots & z_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если имеется $z_p<0$, где $p>0$ (но при этом $z_{1p}\geqslant 0,\ldots,z_{mp}\geqslant 0$), то $\max f=\infty$. Если все $z_p>0$ $(p=1,2,\ldots,n)$, то $\max f=z_0$. Значение X, при котором достигается максимум, по простому правилу находится из матрицы Z.

Доказательства подробные. Имеются численные примеры. С. С. Кислицын

10686. «Мультиплекс-метод» в линейном программировании. Фриш (The multiplex method for linear programming. Frisch Ragnar), Sankhyā, Calcutta, Indian J. Statist., 1957, **18**, № 3-4, 329—363 (англ.)

Описанный метод близок к методу логарифмического потенциала (РЖМат, 1958, 1415). При изложении автор ссылается на мимеографированные издания Института экономики в Осло, а также на результаты, полученные эмпирическим путем. Доказательств не содержится. Л. И. Горьков

10687. О линейных системах с целочисленными решениями. Хеллер (On linear systems with integral valued solutions. Heller I.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 3, 1351—1364 (англ.)

Решение системы линейных уравнений $Ax=b$ с k неизвестными $(r(A)<k)$ автор называет базисным, если ненулевые координаты решения соответствуют линейно независимым столбцам A. Обозначим через M множество матриц, для которых все базисные решения системы целочисленны при всяком b таком, что система имеет хоть одно целочисленное решение. Свойством Данцига названо следующее свойство: Если столбец матрицы является линейной комбинацией линейно независимых столбцов, то коэффициентами этой линейной комбинации могут быть лишь —1, 0, 1. Легко проверить, что M совпадает с множеством матриц, обладающих свойством Данцига. Рассматривая столбцы как векторы, автор подытоживает полученные ранее результаты, формулируя теорему: Множество ребер симплекса обладает свойством Данцига.

Доказываются теоремы: 1. Множество T всех ребер симплекса образует максимальное множество Данцига данной размерности в том смысле, что нет множества той же размерности, обладающего свойством Данцига и содержащего T как собственное подмножество (нулевой вектор, обязательно имеющийся в любом максимальном множестве Данцига, удобно отбросить). 2. Множество Данцига размерности n содержит не более $n(n+1)$ элементов (без нуль-вектора). 3. Если множество Данцига размерности n содержит $n(n+1)$ элементов, то оно является множеством ребер n-симплекса.

Приведен пример, показывающий, что при $n\geqslant 4$ существуют максимальные множества Данцига, содержащие менее $n(n+1)$ элементов. С. С. Кислицын

10688. Стохастическое линейное программирование в применении к экономике сельского хозяйства. Тинтнер (Stochastic linear programming with applications to agricultural economics. Tintner G.), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., 1955, **1**, 197—228 (англ.)

В задаче линейного программирования (максимизировать $G=d'z$ при $Dz=c$, $z\geqslant 0$, $z=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$, $c=(c_1,\ldots,c_m)$, $d=(a_1,\ldots,a_n,0,\ldots,0)$, $D=[BI]$, $B=\|b_{ij}\|$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$) значения c_i, a_j, b_{ij} предполагаются случайными величинами с функцией распределения $P(a_1,\ldots,a_n;\ c_1,\ldots,c_m;\ b_{11},\ldots,b_{mn};\ w_1,\ldots,w_t)$. Они образуют параметрическое пространство S. Выбирая по m из $m+n$ компонент векторов z и d, получим $K=c_n^m$ систем уравнений $D^{(k)}z^{(k)}=c$. Условия $L^{(k)}\geqslant 0$ образуют $S_1,\ldots,S_K$ — подпространства S.

Пусть $G^{(k)}=\max_i G^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,K)$ (где $G^{(i)}=(d^{(i)}!\,z^{(k)})$). В области T_k, определенной последним условием, линейная функция G достигает максимума; однако функция $G^{(k)}$ не обязательно будет допустимой в T_k. $U_k=S_k\|T_k$ дает систему непересекающихся подмножеств $U_1,\ldots,U_k$, на которых выполняются условия допустимости $G^{(k)}$.

Строится функция точки $G^*=G^{(k)}$ (если $a^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}$ попадает в U_k). Для G^* можно получить функцию распределения $Q(G^*;w_1,\ldots,w_t)$. Выбор вероятностного распределения Q, которое максимизирует функционал предпочтения $h[Q(G^*;w_1,\ldots,w_t)]$, дает решение максимум-проблемы (Понятие о функционале предпочтения см. Arrow K. J., Econometrica, 1951, **19**, 404—437).

Приводится численный пример из экономики сельского хозяйства. А. А. Каплан

10689. Распределение продукции по нескольким свойствам. Шелл (Distribution of a product by several properties. Schell Emil D.), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, Vol. 2 s. a., 615—642 (англ.)

На примере рассматривается задача линейного программирования следующего типа. Имеется l заводов, выпускающих m видов однотипной продукции (мыла) и n рынков сбыта. Требуется определить наиболее экономные перевозки, если фиксированы: а) производительность каждого завода по каждому виду мыла; б) по-

требности каждого пункта сбыта в каждом из видов мыла; в) объем перевозок от данного завода к данному пункту сбыта. Н. Н. Воробьев

10690. Запасные части и минимальная стоимость. Блэк, Прошан (Spare part kits at minimum cost. Black Guy, Proschan Frank), Proc. 5th Nat. Sympos. Reliabil. and Qual. Control Electron. (1959, Philadelphia, Pa). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, 1959, 281—295 (англ.)

Некоторый комплекс, содержащий k типов деталей, распределенных в m блоках, должен функционировать в течение t_0 часов в условиях, исключающих дополнительное снабжение деталями.

В предположении, что: 1) случайная величина поломок i-й детали за время ее работы t подчиняется закону Пуассона с математическим ожиданием $\mu_i t$. Величины μ_i заданы; 2) имеет место независимость поломки компонент комплекса; 3) i-я компонента входит в m_i блоков, при этом число их и время работы в каждом блоке равны соответственно d_{ij} и t_j ($i=1,2,\ldots,k$; $j=1,2,\ldots,m_i$); 4) отсутствие любой действующей детали выключает работу комплекса; 5) безаварийная работа комплекса в течение t_0 часов должна обеспечиваться с вероятностью $P \geqslant \alpha$; 6) стоимость единичного экземпляра i-й детали составляет C_i долларов, — находится оптимальное распределение запчастей $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, которое при заданной вероятности непрерывной работы комплекса в течение t_0 часов $P \geqslant \alpha$ минимизирует стоимость запчастей C, $C = \sum_{i=1}^{k} C_i n_i$. А. Г. Корман

10691. Задачи расположения заводов. Ябэ (Yabe Makoto), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1958, **3**, № 1, 37—42 (японск.)

10692. Об использовании линейного программирования в производственном планировании. Иоэяма (Yoneyama Kan), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1957, **2**, № 3, 124—128 (японск.)

10693. Удобный метод в работе по перевозке товаров — графический метод. Шусюэ тунбао, Shuxue tongbao, 1958, № 11, 2—6 (кит.)

Графический метод решения транспортной задачи.

Ши Гуй-фань

10694. Табличный метод в работе по перевозке товаров. Шусюэ тунбао, Shuxue tongbao, 1958, № 12, 3—14 (кит.)

Численное решение транспортной задачи.

Ши Гуй-фань

10695. Применение двойственности к модели планирования на долгий срок. Басьер (Application de la dualité à un modèle de programmation à long terme. Bessière F.), Rev. franç. rech. opérat., 1959, **3**, № 12, 115—129 (франц.)

В обычных терминах линейного программирования формулируется задача минимизации вкладов в энергетическую систему. Автор ставит целью показать, что все переменные, участвующие в постановке двойственной задачи, имеют экономический смысл.

Э. А. Меркулова

10696. Задачи назначения и размещение экономических мощностей. Копманс, Бекман (Assignment problems and the location of economic activities. Koopmans Tjalling C., Beckmann Martin), Econometrica, 1957, **25**, № 1, 53—76 (англ.)

Рассматривается задача размещения n неделимых производственных единиц по n участкам и описывается эквивалентная ей задача линейного программирования. Эта задача подвергается экономическому обсуждению, в частности, изучается связанная с ней система цен. Отмечается, что указанное Нейманом сведение этой задачи (с $n!$ выборами) к игре в прятки (РЖМат, 1956, 4717 К, а также РЖМат, 1956, 6023) позволяет резко сократить объем вычислений, и вкратце описывается идея решения этой игры. Далее указанная в заголовке задача рассматривается с учетом затрат на транспортировку. В двух приложениях даны доказательства леммы Минковского-Фаркаса и теоремы Г. Биркгофа (всякая бистохастическая матрица является взвешенным средним $n!$ матриц перестановок). Библ. 20 назв. А. А. Корбут

10697. Задачи на смешение — предшественники линейного программирования. Уо (Alligation, forerunner of linear programming. Waugh Frederick V.), J. Farm Econ., 1958, **40**, № 1, 89—103 (англ.)

Описывается решение задачи о составлении раствора заданной концентрации из имеющихся растворов, отмечая при этом, что подобные задачи и методы их решения были известны еще в начале прошлого века.

Л. И. Горьков

10698. Симплекс-метод для начинающих. Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1958, **3**, № 3, 140—141 (японск.)

Перевод статьи Уагнера (РЖМат, 1959, 1820).

10699. Введение в линейное программирование. Вер (Een inleiding tot lineaire programmering. Veer J. de), Landbouwkund. tijdschr., 1959, **71**, № 17, 522—528 (голл.)

Популярная статья. Дается пример задачи линейного программирования из области сельского хозяйства. Приводится графическая интерпретация.

И. В. Романовский

10700. Некоторые вычислительные опыты в задачах динамического программирования — планирования производства и запасов при квадратической функции стоимости. Мацуда (Matsuda Takehiko), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1956, **1**, № 2, 99—101 (японск.)

10701. Машинные вычисления в линейном программировании. I, II. Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1958, **3**, № 2, 88—92; № 3, 135—139 (японск.)

10702. Симплекс-метод для квадратичного программирования. Вулф (The simplex method for quadratic programming. Wolfe Philip), Econometrica, 1959, **27**, № 3, 382—398 (англ.)

Дана подробная вычислительная схема для решения квадратичной задачи по линейному алгорифму (РЖМат, 1958, 4013), начиная с выбора допустимого базисного вектора. Различаются два случая задачи в зависимости от характера квадратичной формы и параметра λ в квадратичной функции $\lambda px + x'Cx/2$. Исследуются некоторые свойства $F(\lambda) = \min(\lambda px + x'Cx/2)$, где x подчинено условиям допустимости.

А. А. Каплан

10703. Устойчивость механизма темпа расширения в системе со многими странами. Полак, Лю Да-чжун (Stability of the exchange rate mechanism in a multi-country system. Polak J. J., Liu Ta-Chung), Econometrica, 1954, **22**, № 3, 360—389 (англ.)

Исследование условий, при которых улучшаются платежеспособные балансы стран, сведено к исследованию некоторой линейной системы разностных уравнений. Дана экономическая интерпретация полученных условий. Л. И. Горьков

10704. Несколько замечаний относительно исчисления процента постоянной ренты. Пистоя (Qualche osservazione sul calcolo del tasso di una rendita certa. Pistoia Angelo), Schede perfor. e calcolo elettron., 1959, **5**, № 27, 113—115 (итал.)

Рассматривается уравнение относительно i: $i = 1/A + q - 1 - (q^n/A)(1+i)^{-n}$, где $A > 0$ и $q > 0$, $\neq 1$ подчинены неравенствам

$$\begin{cases} 1 + q + \ldots + q^{n-1} - A > 0, \\ (1/2)[1 + (q/2) + \ldots + (q/2)^{n-1}] - A < 0. \end{cases}$$

Указаны частично известные ранее оценки корня уравнения, лежащего в интервале (0,1) и неравного $q-1$, при различных q. Например, если $q>1$, то корень находится в пределах $i_1<i<i_2$, где $i_k=q[1+A(q-k)]^{-1/n}$, $k=1,2$. Для корня из интервала (0,1) уравнения $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(1+i)^{-t_k}=A$, где $A>0$, $\alpha_k>0$, $t_k>0$ $(k=1,2,\ldots,n)$; $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k 2^{-t_k}<A<\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ (t_k рациональны), получено выражение в виде степенного ряда. Рассматриваемые корни имеют определенный экономический смысл.

С. С. Кислицын

10705. Распределение доходов от работы по найму. Лайдалл (The distribution of employment incomes. Lydall H. F.), Econometrica, 1959, 27, № 1, 110—115 (англ.)

Для построения распределения заработной платы работающих на отдельном предприятии автор предлагает руководствоваться следующими гипотезами: а) численно ти групп лиц, получающих одинаковую заработную плату в порядке ее возрастания равны $y_1, y_2, \ldots$; $y_i/y_{i+1}=p$, б) отношение заработных плат лиц групп $i+1$ и i равно p. Далее указывается, что если считать n, p, в свою очередь, распределенными нормально, то можно получить кривую распределения заработной платы в стране, вид которой хорошо соответствует эмпирическим данным.

С. С. Кислицын

10706. Преобразования в экономических теориях. Мак-Манус (Transformation in economic theories. McManus Maurice), Rev. Econ. Studies, 1958, 25(2), № 67, 97—108 (англ.)

Автор исследует, какие свойства рассматриваемых в экономике функций инвариантны при тех или иных преобразованиях.

Л. И. Горьков

10707. Заметка о предпочтении и аксиомах выбора. Удзава (Note on preference and axioms of choice. Uzawa Hirofumi), Ann. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1956, 8, 35—40 (англ.)

Пусть функция выбора $C(X)$ связывает с каждым множеством из класса B некоторое непустое множество. Если P — отношение предпочтения, то соответствующая функция выбора такова: $C(X)=\{x^0;\ x^0\in X$ и $\overline{xPx^0}$ для всех $x\in X\}$. Для любой функции выбора определим $x\tilde{P}y$, означающее, что для некоторого X, $x\in C(X)$, $y\in X-C(X)$, и определим xP^*y, означающее существование $x^1,\ldots,x^r$ таких, что $x\tilde{P}x^1$, $x^i\tilde{P}x^{i+1}$ $(i=1,\ldots,r-1)$, x^rPy. Говорят, что функция выбора рациональна, если при любых x и y из $C(X)$ для некоторого X из B будет xP^*y (так называемая сильная аксиома открытого выбора; см. Houthakker H., Esonomica (N. S.), 1950, 17, 159—174).

Основные результаты работы состоят в том, чтобы показать тесную связь между отношениями предпочтения (полученными из слабого упорядочения) и рациональными функциями выбора. 1) Если P отношение предпочтения и $C(X)$ — соответствующая функция выбора, то C — рациональна и xPy влечет xP^*y (если B состоит только из конечных множеств, то слово „влечет“ может быть заменено на слово „эквивалентно“).) Если C — рациональна, то P^* — отношение предпочтения и C — функция выбора, соответствующая P^*. Получены некоторые аналогичные результаты, в частности, для случая, когда рассматриваемое пространство имеет топологическую структуру, совместимую (в очевидном смысле) с соотношением предпочтения.

K. J. Arrow

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 4, 366 — 367.

10708. Существование функции общественного сбыта. Блау (The existence of social welfare functions. Blau Julian H.), Econometrica, 1957, 25, № 2, 302—313 (англ.)

Построением противоречащего примера опровергается известная теорема Эрроу (Arrow K. J., Social choice and individual values, New York, 1951; Economie Appliquée, 1952, 5, 469—484) о несовместности аксиом, определяющих функцию общественного блага. Тем самым оказывается неверной и теорема Инада (РЖМат, 1957, 5795). В несколько более сильной аксиоматике теорема Эрроу оказывается справедливой.

Н. Н. Воробьев

10709. Ценообразование и методы исследования операций. Карацу (Karatsu Hazime), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1956, 1, № 4, 184—186, 192 (японск.)

10710. Модель уязвимости вооруженных участков с независимыми элементами. Ферстман (A vulnerability model for weapon sites with interdependent elements. Firstman Sidney I.), Operat. Res., 1959, 7, № 2, 217—225 (англ.)

Модель служит для определения вероятности выживания комплекса вооружений в зависимости от многих переменных: круговой ошибки, эффективности и числа вражеского оружия, состава и расположения комплекса вооружений и стойкости его. Строятся планы возможного расположения комплекса для простейших случаев (различающихся числом рассматриваемых элементов) при условии, что элементы разделены расстоянием, меньшим двух радиусов поражения оружия противника. Вероятности поражения каждой зоны схемы считаются заданными в зависимости от плотности вероятности размещения вражеских вооруженных сил относительно прицельной точки. Находятся вероятности перехода из одного состояния в другое (состояния различаются числом действующих элементов). Состояния образуют во времени цепь Маркова.

Э. А. Меркулова

10711. Исследование операций в рекламе. Сороа (El análisis operacional en la propaganda. Zorоa Procopio), Trab. estadist., 1955, 6, № 3, 263—269 (исп.)

Рассматривается борьба в рекламе двух конкурирующих фирм, процветающей и находящейся на грани краха. Эта борьба интерпретируется как антагонистическая игра типа дуэли снайпера с автоматчиком.

Н. Н. Воробьев

10712. Схема управления. Сато (Sato Fumio), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1957, 2, № 4, 176—177 (японск.)

10713. Вероятностный подход к предупредительному ремонту. Сэндзю (A probabilistic approach to preventive maintenance. Senju Shizuo), J. Operat. Res. Soc. Japan, 1957, 1, № 2, 49—58 (англ.)

Срок службы машинных частей считается случайной величиной. Выводятся формулы для определения оптимального времени замены частей оборудования в целях минимизации общих распадов. Пусть a — стоимость машинной части, a_1 — потери при замене сломанной части новой, a_2 — потери при замене неизношенных частей новыми до окончания срока их действия, b — средний убыток от поломки. Рассмотрены случаи:

1. Замена происходит по истечении естественного срока службы. Тогда за период времени T цена $C_1=(a+a_1+b)T/m$, где $m=\int_0^\infty x f(x)\,dx$.

2. Замена происходит по истечении времени x_p, без ожидания естественного износа

$$C_2=\frac{(a+a_1+b)p+(a+a_2)q}{\int_0^{x_p} x f(x)\,dx+x_pq},$$

где $p=\int_0^{x_p} f(x)\,dx$, $q=\int_{x_p}^{\infty} f(x)\,dx$, x_0, минимизирующее C_2 удовлетворяет уравнению $x_0 f(x_0)+\frac{1}{q} f(x_0)\times$ $\times\int_0^{x_0} x f(x)\,dx - p=\frac{a+a_2}{a_1-a_2+b}$. Вычерчены графики x_0/m и C_2/C_1 при изменении $(a_1-a_2+b)/(a+a_2)$, когда $f(x)$ — плотность нормального распределения или гамма-функция.

3. Замена происходит через постоянные интервалы — всех частей одновременно — без учета времени последней замены.

Пусть $P(x_p<X)=\int_{x_p}^{\infty} f_k(x)\,dx=q_k$ ($f_k(x)$ — плотность вероятности того, что $X=X_1+\ldots+X_k$, где X_l — время службы i-й части). Тогда $C_3=[(a+a_1+b)\times$ $\times\{n(x_p)-1\}+(a+a_2)]\frac{T}{x_p}$, где $n(x_p)=\sum_{k=1}^{m} kq_k^0$, $q_k^0=q-q_{k-1}$, $q_1^0=q_1$. Даны графики для практического применения.

4. Необходима общая остановка производства. Существует несколько видов оборудования, которые имеют различные ценностные и временные параметры

$$C=\sum_i [(a_l+a_{l_1}+b_l)\{n_l(x_p)-1\}+(a_l+a_{l_2})]\frac{T}{x_p}.$$

Э. А. Меркулова

10714. Определение оптимального размера склада с помощью линейного программирования. Цукаути (Tukauchi Kiyobumi), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1957, **2**, № 6, 285—286 (японск.)

10715. Математика для управления. Ч. 1. Линейное программирование. Ч. 2. Теория очередей. Ч. 3. Управление запасами (Mathematics for management. Part I. Linear programming. Part II. Queueing theory. Part III. Inventory management), Manag. Operat. Res. Digest, 1956, **1**, № 2, 23—28; № 3, 10—15; № 4, 3—7 (англ.)

Нематематическое изложение (в форме вопросов и ответов) элементов соответствующих отраслей исследования операций.

10716. Возможности исследования операций в промышленности. Бир (The scope for operational research in industry. Beer Stafford), Instn Prod. Engrs, J., 1957, **36**, № 5, 298—320 Discuss., 321—332 (англ.)

Элементарное изложение идей и основных разделов исследования операций. Н. Н. Воробьев

10717. Критика исследования операций. Кимбалл (A critique of operations research. Kimball George E.), J. Wash. Acad. Sci., 1958, **48**, № 2, 33—37 (англ.)

Рассуждение о предмете исследования операций и о связи этой отрасли науки с математикой. Н. Н. Воробьев

10718. Некоторые современные аспекты исследования операций. Бузита (Quelques aspects actuels de la recherche opérationnelle. Bouzitat J.), Onde électr., 1959, **39**, № 391, 802—809 (франц.; рез. англ.)

Обзорная статья знакомит читателя с характером и составными частями исследования операций. Библ. 21 назв. Э. А. Меркулова

10719. Администратор оценивает исследование операций. Норман (A manager appraises operations research. Norman R. A.), J. Industr. Engng, 1957, **8**, № 3, 173—181 (англ.)

Общие соображения о применении исследования операций в проектировании, производстве и сбыте катодно-лучевых трубок. Н. Н. Воробьев

10720. Исследование операций сегодня и завтра (Беседы на семинаре по исследованию операций с группой американских специалистов). Умибэ (Umibe Fujio), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1957, 2, № 2, 69—74 (японск.)

10721. Задача популяризации исследования операций. Оноги (Onogi Jiro), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1957, 2, № 3, 108—109 (японск.)

10722. Отбор годных кандидатов и школа по исследованию операций. Брамбилла (La formazione dei delegati di potere e la Scuola di ricerca operativa. Brambilla Francesco), Boll. Centro ricerca operat., 1958, № 7-8, 1—6 (итал.)

Автор перечисляет ряд требований, которые, по его мнению, нужно предъявлять к поступающим в школу по исследованию операций. Кратко рассматривается также и вопрос о принципах составления программы для этой школы. С. С. Кислицын

10723 К. Линейное программирование. Крелле, Кюнци (Lineare Programmierung. Krelle Wilhelm, Künzi Hans Paul. Zürich, Verl. Industr. Organis., 1958, 122 S., ill., 24.50 Sfr.), Schweiz. Buch, 1959, **59**, № 17, 475 (нем.)

10724 К. Очерки по линейному и нелинейному программированию. Эрроу, Гурвич, Удзава (Studies in linear and non-linear programming. Eds Arrow Kenneth J., Hurwicz Leonid, Uzawa Hirofumi. Stanford, Calif., Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1958, 229 pp., 60 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 490, 8 (англ.)

10725 К. Элементарное математическое программирование. Мецгер (Elementary mathematical programming. Metzger Robert W. New York, John Wiley and Sons, 1958, 255 pp., ill., 5.95 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **174**, № 25, 100 (англ.)

10726 К. Введение в эконометрику. Ланге (Introduction to econometrics. Lange Oskar. Transl from Polish. London-New York- Paris-Los Angeles, Pergamon Press; Warszawa, Państwowe wyd. naukowe, 1959, 384 pp., ill., 35 sh.) (англ.)

10727 К. Исследование операций для управления в промышленности. Хорафас (Operations research for industrial management. Chorafas Dimitris N. New York, Reinhold Publ. Corp.; London, Chapman & Hall, 1958, ix, 303 pp., ill., 70 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 482, 13 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

10728. Дальнейшее исследование риска производителя в последовательном выборочном контроле. Сибуя (Further consideration on the producer's risk in sequential sampling inspection. Sibuya Masaaki), Repts. Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs, 1953, 2, №, 4, 108—112 (англ.)

Рассматривается последовательный выборочный контроль больших партий изделий. Предполагается, что контроль не разрушает изделий и что отвергаемые партии изделий подвергаются сплошному контролю, после которого негодные изделия заменяются заведомо годными. Автор изучает вопрос о минимизации математического ожидания количества наблюдений. Для этого используются известные формулы А. Вальда (Statist. Res. Group, Columbia Univ., «Sequential Analysis of Statistical Data: Applications», 1945) и оптимальное значение риска производителя $\alpha=\alpha^*$ находится при помощи дифференцирования. Приводится пример конкретного вычисления α^* для различных значений риска потребителя и допуск-

ного качества, а также номограмма для определения α^*. Данная статья является продолжением исследования риска производителя, рассмотренного С. Моритути (РЖМат, 1960, 8076). И. Н. Коваленко

10729. Теоретическое решение некоторых задач о зернистых материалах. Гоpалек (Theoretické řešení některých úloh o práškovitých materiálech. Horálek Vratislav), Mat.-fys. časop., 1958, 8, № 3, 174—186 (чешск.; рез. русск., англ.)

Решаются следующие практические задачи из области контроля качества зернистых материалов: а) оценка суммарной площади проекций, суммарной поверхности и суммарного объема зерен одного типа в исследуемом слое образца, б) оценка числа зерен в определенном слое. Все задачи решаются при предположениях, что зерна имеют шарообразную форму, что распределение диаметров зерен логарифмически нормально и что исследуемый образец хорошо перемешан. В связи с решением задачи б) приводится таблица для вычисления доверительного интервала для параметра распределения Пуассона.

M. Josifko

10730. О расчете самонастраивающейся системы с двуступенчатым регулированием параметров. Козлов Ю. М., Изв. АН СССР, Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 4, 112—115

Анализируется работа конкретной самонастраивающейся системы при наличии случайных помех.

В. Ф. Писаренко

10731. Об определении функции корреляции между флюктуациями диэлектрической проницаемости по фазовым измерениям. Басс Ф. Г. Радиотехн. и электроника, 1958, 3, № 7, 970—971

Корреляционная функция R флюктуаций диэлектрической проницаемости предполагается зависящей только от расстояния между точками, в которых берутся коррелируемые значения диэлектрической проницаемости (как это имеет место в случае статистически однородного и изотропного поля диэлектрической проницаемости). При этом корреляционная функция флюктуаций фазы УКВ на параллельных трассах постоянной длины L (с расстоянием ζ между трассами) равна

$$K(\zeta^2) = \frac{\pi^2}{\lambda^2}\int_0^L\int_0^L R\left[(x-x')^2+\zeta^2\right]dxdx',$$

откуда можно получить формулу

$$R(z) = \frac{\lambda^2}{\pi^3 L}\int_\infty^z \frac{dK(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi - z}},$$

позволяющую по измеренным значениям $K(\xi)$ вычислить $R(z)$. А. С. Монин

10732. Представление нелинейных операторов. Заде (On the representation of nonlinear operators. Zadeh L. A.), IRE WESCON Convent. Rec., 1957, 1, № 2, 105—113 (англ.)

Рассматривается вопрос о представлении нелинейных операторов, встречающихся при описании случайных процессов, через ортогональные ряды. Разобраны различные случаи представления в пространстве непрерывных функций. Для некоторых проблем оптимальной фильтрации и передачи шумов через нелинейные системы приводятся разложения, содержащие полиномы Эрмита и Лагерра. Библ. 18 назв. М. Вайнберг

10733. Распространение электромагнитных волн в среде со случайными неоднородностями над идеально проводящей плоскостью. Канер Э. А., Басс Ф. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, 2, № 4, 553—564

Изучается распространение электромагнитных волн в полупространстве, ограниченном идеально проводящей плоскостью $z = 0$, причем корреляционная функция флюктуаций $\delta\varepsilon$ диэлектрической постоянной берется в виде $\overline{\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1)\delta\varepsilon(\mathbf{r}_2)} = \overline{(\delta\varepsilon)^2}W(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|, |z_1-z_2|)$. Предполагается, что действительная и мнимая части каждой из компонент электромагнитного поля E имеют совместное нормальное распределение. Указываются соответствующие распределения для амплитуды и фазы электромагнитных волн. Среднее значение $\mathbf{E}_0$ и флюктуации ξ электрического поля при наличии источника в точке $\mathbf{r}_0$ удовлетворяют уравнениям $(\Delta + k^2)\mathbf{E}_0 + k^2\overline{\xi\delta\varepsilon} = -\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$, $(\Delta + k^2)\xi + k^2\mathbf{E}_0\delta\varepsilon = 0$ при условиях обращения в нуль при $z = 0$ тангенциальных компонент и нормальных производных от нормальных компонент векторов $\mathbf{E}_0$ и ξ. Отсюда для $\mathbf{E}_0$ получается некоторое интегро-дифференциальное уравнение, для которого находится асимптотический вид решения при больших расстояниях от источника. Зная $\mathbf{E}_0$, определяется ξ и вычисляются статистические характеристики этого вектора — средние квадраты модулей тангенциальной и нормальной компонент ξ — при условиях $\lambda \ll l \ll \sqrt{\lambda L}$; $z, z_0 \ll L$ (λ — длина волны, L — расстояние по горизонтали между излучателем и приемником, l — радиус корреляции, z и z_0 — высота приемника и излучателя). Изучается зависимость средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы от частоты и поляризации радиоволн, высот излучателя и приемника. Установлено, что вблизи интерференционных минимумов среднего поля и на краю первого интерференционного лепестка флюктуации резко возрастают. А. С. Монин

10734. О проблемах метрической связи. Шютценбергер (Sur les problèmes de communications métriques. Schutzenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 7, 724—726 (франц.)

Автор определяет метрическую систему связи, функция потери которой $L(\xi - X)$ — определенная квадратичная форма $\xi - X$, обращающаяся в нуль только для $\xi = X$, и рассматривает случай $L(\xi - X) = \|\xi - X\|^2$. Здесь ξ и X — векторы, представляющие соответственно состояние датчика и оценку состояния датчика, после получения сигнала. Оказывается, что значение X, минимизирующее $\|\xi - X\|^2$, есть условное математическое ожидание ξ при гипотезе о полученном сигнале.

R. A. Leibler

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 637.

10735. О законах распределения нулевых и экстремальных точек сигналов русской речи при сильном ограничении их по амплитуде. Ростовцев Ю. Г., Радиотехника, 1958, 13, № 4, 63—67

Автор описывает метод и приводит результаты экспериментального изучения распределения вероятностей нулевых и экстремальных значений речевого сигнала, приходящихся на единицу времени. Экспериментальная плотность распределения вероятностей числа пересечений f нулевого уровня снизу вверх на единицу времени близка к функции пятого типа Пирсона $\varphi(f) = \frac{7^6}{5!}f^{-7}e^{-\frac{7}{f}}$. Отсюда следует, что плотность распределения вероятностей длин T-интервалов между соседними пересечениями $\psi(T) = \frac{7^5}{5!}T^5e^{-7T}$. Экспериментальная плотность распределения вероятностей числа экстремальных значений сигнала на единицу времени близка к функции $\varphi(x) = 0{,}5e^{-0{,}785(x-2)^2}$.

А. А. Темпельман

10736. Выбор между несколькими сигналами в телефонной связи. Бету (Discrimination entre plusieurs signaux en télécommunication. Béthoux Paul), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 4, 412—415 (франц.)

Рассматривается задача о выборе между $n+1$ гипотезами: $H_0, H_1, \ldots, H_n$ о распределении случайного процесса, наблюдаемого на отрезке $[0, T]$, где H_0 заключается в том, что наблюдается процесс $u(t)$, а H_i заключается в том, что наблюдается $u(t) + \rho_i(t)$, где $\rho_1(t), \rho_2(t), \ldots, \rho_n(t)$ интегрируемы с квадратом на

$[0, T]$, а $u(t)$ — гауссов процесс со средним нуль и корреляционной функцией $Mu(t)u(s) = \Gamma(t, s)$. Для решения задачи используется известный в статистике метод, основанный на отношении правдоподобия. Если m_t — мера в пространстве функций, интегрируемых с квадратом на $[0, T]$, соответствующая распределению процесса при гипотезе H_t, то $\frac{dm_t}{dm_0}(x) = e^{\psi_t(x)}$, где

$$\psi_t(x) = \sum_j \frac{\rho_t^j}{s_j}\left(x^j - \frac{\rho_t^j}{2}\right), \qquad x^j = \int_0^T x(t)\,u_j(t)\,dt,$$

$\rho_t^j = \int_0^T \rho_t(t)\,u_j(t)\,dt$, $u_j(t)$ — ортонормированная последовательность собственных функций ядра $\Gamma(t, s)$, s_j — соответствующие собственные значения. Для оптимального выбора гипотезы достаточно знать величины: $B_{\alpha\beta} = \sum_j \frac{\rho_\alpha^j \rho_\beta^j}{s_j}$. Эти величины вычисляются для того случая, когда $u(t)$ — белый шум. Значительно раньше эта же задача для случая двух гипотез решалась в работе Девиса (РЖМат, 1957, 1669). А. В. Скороход

10737. Отказ в системе очереди GI/M/1. Финч (Balking in the queueing system GI/M/1. Finch P. D.), Acta math. Acad. scient. hung., 1959, **10**, № 1-2, 241—247 (англ.; рез. русск.)

На обслуживающий пункт с одним обслуживающим в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ поступают заказчики. Случайные величины $\tau_{n+1} - \tau_n$ независимы, одинаково распределены с функцией распределения (ф. р.) $A(x)$. Распределение времени обслуживания показательное. Пусть $\eta(t)$ — число заказчиков, стоящих в очереди в момент времени t. Предполагается, что заказчик, поступивший в момент времени τ_n, остается ожидать обслуживания тогда и только тогда, когда $\eta(\tau_n - 0) \leqslant \min(N, \gamma_n)$, где N — некоторое целое число, а γ_n — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $P\{\gamma_n \geqslant m\} = b_m$. Это предположение означает, что заказчик остается ждать обслуживания с вероятностью b_m, если перед его приходом в очереди находится m заказчиков ($m = 0, 1, \ldots, N$). Доказано, что существует не зависящее от начального состояния предельное распределение $P_k = \lim_{n\to\infty} P\{\eta(\tau_n - 0) = k\}$. Нахождение P_k сводится к решению некоторой системы разностных уравнений. В случае распределения Эрланга

$$A'(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

для P_k получены явные выражения, содержащие цепные дроби. Доказано также существование $\lim_{t\to\infty} P\{\eta(t) = k\}$ в предположении, что ф. р. $A(x)$ нерешетчата.

М. И. Ядренко

10738. Непосредственное вычисление вероятностей ожидания в очереди. Декан (Calcul direct des probabilités d'attente dans une file. Descamps René), Rev. franç. rech. opérat., 1959, **3**, № 11, 88—100 (франц.)

Поток клиентов, поступающих по закону Пуассона с параметром, образует очередь к обслуживающему устройству. Функция распределения времени обслуживания одного клиента $1 - S(x)$ произвольна. Рассматривается случайное время $X(t)$, прошедшее с момента t до момента окончания обслуживания клиента, стоящего в конце очереди в момент t. Получено уравнение для функции $P\{X(t) \leqslant x\} = F(t, x)$. Стационарное решение $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dF(x)}{dx} - \lambda \int_0^x \frac{dF(u)}{du} S(x - u)\,du - \lambda F(0)\,S(x) = 0. \quad (1)$$

Отсюда для преобразований Лапласа $\overline{F}(p)$, $\overline{S}(p)$ функций $F(x)$ и $S(x)$ получено $p\overline{F}(p) = F(0)/(1 - \lambda\overline{S}(p))$. Вычислен скачок в нуле $F(0) = 1 - \lambda/\mu$, где $1/\mu$ — среднее время обслуживания. Когда $F(x)$ трудно вычисляется по $\overline{F}(p)$, автор предлагает интегрировать (1) численно. Выписаны формулы численного интегрирования. Предложенный метод вычисления в случае нескольких обслуживающих устройств позволяет определить $dF(x)/dx$ с точностью до пропорционального множителя. Множитель предлагается вычислять с помощью опытных данных. В. П. Чистяков

10739. Процесс рождения и смерти с зависимостью от возраста. Уо (An age-dependent birth and death process. Waugh W. A. O-N.), Biometrika, 1955, **42**, № 3-4, 291—306 (англ.)

Особь имеет распределение продолжительности жизни $G(t)$; если она погибает в возрасте t, она заменяется r особями с вероятностью $q_r(t)$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$), причем каждая особь не зависима от других. Подробно разбирается случай $q_0(t) + q_2(t) = 1$, обобщающий случай $q_2 = 1$ (Bellman R., Harris T., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1948, **34**, 601—604). Производящая функция численности популяции удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению, а факториальные моменты — интегральному уравнению типа уравнения восстановления. Вероятность вырождения популяции при некоторых предположениях равна $\min(\rho/\sigma, 1)$, где $\rho = \int_0^\infty q_0(u)\,dG(u)$, $\sigma = \int_0^\infty q_2(u)\,dG(u)$. Пусть $B(t)$ ($D(t)$) — распределение продолжительности жизни особи в предположении, что риск гибели без потомства (с двумя потомками) исключен. Подробно исследуются случаи

$$B'(t) = (k\lambda)^k t^{k-1} e^{-k\lambda t}/(k-1)!$$

и

$$D'(t) = (m\nu)^m t^{m-1} e^{-m\nu t}/(m-1)!,$$

представляющие обобщение модели Кендалла (Kendall D. G., Biometrika, 1948, **35**, 316—330).

Изучается асимптотическое поведение популяции для больших t и в случае $m = 1$ приводятся формулы для 1-го и 2-го моментов.

Большая часть изложения делается в терминах распределения продолжительности жизни особей а) погибающих без потомства и б) погибающих с двумя потомками. T. E. Harris

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 3, 276

10740. Среднее и дисперсия максимума приведенных частных сумм конечного числа независимых нормальных случайных величин. Солари, Анис (The mean and variance of the maximum of the adjusted partial sums of a finite number of independent normal variates. Solari M. E., Anis A. A.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 706—716 (англ.)

Пусть X_t — независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами (0.1), $U_n = \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^r X_i - \frac{r}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right\}$, и $\mu_k(n)$ — моменты k-го порядка величины U_n. Выводятся формулы $\mu_1(n) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sum_{s=1}^{n-1}(n-s)^{-\frac{1}{2}}$, $\mu_2(n) = \frac{1}{6}\left\{\frac{n^2-1}{n} + \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\sum_{s=2}^{n-1}\sum_{t=1}^{s-1}\frac{s(3s-n)}{\sqrt{(n-s)\,t^3\,(s-t)^3}}\right\}$.

Случайные величины U_n находят себе применение при расчете резервуаров со случайным объемом заполнения. И. И. Гихман

10741. Броуновское движение в центробежном поле. Гехатия, Качальский (Brownian motion in the centrifugal field. Gehatia Matatiahu, Katchalski Ephraim), J. Chem. Phys., 1959, **30**, № 5, 1334—1339 (англ.)

Рассматривается движение броуновской частицы в центрифуге, x — компонента скорости частицы представляется в виде $\frac{dx}{dt} = \beta x + V_{Dx}$, где V_{Dx} — скорость диффузионного движения, а $\beta = \omega^2/f$ — постоянная седиментации (ω — угловая скорость вращения центрифуги, f — коэффициент трения для частицы). Уравнение интегрируется относительно x, и в результате использования центральной теоремы для x получается нормальное распределение с дисперсией $2D\alpha t$, где D — коэффициент диффузии, $\alpha = (e^{2\beta t} - 1)/2\beta t$, и математическим ожиданием $x_0 e^{\beta t}$, где x_0 — начальная координата частицы. Это позволяет определить распределение концентрации частиц по направлению x, а затем, считая распределения по x и y независимыми, также и по радиусу центрифуги r. Последнее распределение имеет вид $c(r, t) = (c_0 r_0 dr_0 / D\alpha t) \exp\left[-\left(r_0^2 e^{2\beta t} + r^2\right)/2D\alpha t\right] \times I_0\left[r_0 r e^{\beta t}/D\alpha t\right]$, где c_0 — начальное распределение. Излагается процедура для определения параметров β и D по экспериментальным данным. А. С. Монин

10742. Некоторые вопросы теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями. (Обзор). Денисов Н. Г., Зверев В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, **2**, № 4, 521—542

Дается обзор методов решения феноменологических задач теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями, прежде всего, методов расчета флюктуаций и корреляционных функций амплитуды и фазы волны. Вначале рассматривается приближение геометрической оптики, пригодное при условиях $\lambda \ll l$; $\lambda L_1 \ll l^2$, где λ — длина волны, l — масштаб неоднородностей, L_1 — расстояние от начала рассеивающего слоя до точки наблюдения. Рассматривается плоскослойная среда, в которой среднее значение показателя преломления n зависит только от одной координаты z. При падении на слой плоской волны угловой спектр на глубине z определяется формулами: $W(z, \theta) = \exp[-\theta^2/4f(z)]/4\pi f(z)$; $f(z) = \int_0^z D(\zeta) n^2(\zeta) d\zeta / n^2(z)$; $D(z) = -\int_0^\infty \nabla^2 R(r, z) dr / 2n^2(z)$; $R(r, z) = \overline{\Delta n_1 \cdot \Delta n_2}$, где R — корреляционная функция флюктуаций Δn показателя преломления, D — коэффициент диффузии лучей. Приводятся также формулы для корреляционной функции флюктуаций фазы и для среднего квадрата флюктуаций амплитуды волны. Отмечается, что указанные выше условия применимости геометрической оптики, требующие, чтобы длина волны и размер зоны Френеля были много меньше размера неоднородностей (влияние неоднородностей сводится при этом только к фокусировке лучей, а дифракционные эффекты являются несущественными), при распространении света в тропосфере и радиоволн в ионосфере не выполняются. В целях учета дифракционных эффектов для решения скалярного волнового уравнения в случае плоскослойной среды используется „метод плавных возмущений" Рытова—Обухова, заключающийся в линеаризации уравнения для эйконала (в предположении, что градиент эйконала возмущения много меньше градиента эйконала основной волны). Если основной является плоская волна, нормально падающая на слой, то уравнение для эйконала возмущения. Φ записывается в виде: $\Delta\Phi + zik_0\sqrt{\varepsilon(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + k_0^2 \delta\varepsilon(x, y, z) = 0$, где $\delta\varepsilon$ — флюктуации диэлектрической проницаемости, а оператор Лапласа Δ можно заменить поперечным оператором $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. С помощью решения этого уравнения вычисляются корреляционные функции амплитуды и фазы возмущения. Излагается ряд общих соображений о прохождении волны через среду со случайными неоднородностями, как процесса дифракции на нерегулярном экране. В случае рассеяния плоской волны слабыми однородностями внутри объема V суммарное волновое поле на достаточно большом расстоянии R от рассеивающего объема записывается в виде: $E = \frac{E_0 k_0^2 \sin\chi}{4\pi R}\int_V \delta\varepsilon \cdot e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}} dV$, где E_0, $\mathbf{k}_0$ — амплитуда и волновой вектор падающей волны, χ — угол между вектором $\mathbf{E}_0$ и направлением распространения рассеянной волны. С помощью этой формулы вычисляется ряд статистических характеристик рассеянной волны по характеристикам поля диэлектрической проницаемости. А. С. Монин

10743. Формулы для определения стандартных параметров кривых распределения суммы, разности и произведения независимых статистических величин. Алексеев Г. А., Сб. работ по гидрологии. Гос. гидролог. ин-т, 1959, № 1, 128—133

Приводится вывод формул для определения среднего значения, среднего квадратического отклонения и коэффициента асимметрии алгебраической суммы и произведения двух независимых случайных величин, которые используются при решении некоторых гидрологических и водохозяйственных задач.

К. П. Латышев

10744. Уточнение зависимости расстояний в косоугольной системе координат. Темплтон (Accuracy of bond distances in oblique coordinate systems. Templeton David H.) Acta crystallogr., 1959, **12**, № 10, 771—773 (англ.)

Общепринято считать координаты двух атомов, независимых с точки зрения кристаллографии, статистически независимыми. В статье показано, что кристаллографическая независимость, вообще говоря, не влечет за собой статистическую независимость.

Л. Н. Куцев

10745. Регрессия и корреляция. Кширсагар (Regression and correlation. Kshirsagar A. M.), J. Indian Med. Profess., 1959, **6**, № 5, 2759—2761, 2754 (англ.)

В популярной форме объясняются хорошо известные в математической статистике понятия коэффициента корреляции, линейной и нелинейной регрессии. Во вступлении говорится о применении этих понятий в медицине. О. Г. Журавлев

10746. О распределении *tribolium confusum* в контейнерах. Кокс, Смит (On the distribution of *tribolium confusum* in a container. Cox D. R., Smith W. L.), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 328—335 (англ.)

Для изучения распределения мучного жука *tribolium confusum* в контейнерах с мукой рассматривается следующая модель случайного блуждания: частица движется равномерно внутри плоской области D по прямолинейному пути; при достижении границы области она с вероятностью p возвращается к первоначальному пути или с вероятностью $1 - p$ проходит путь длины τ по границе, а потом выбирает новое направление движения, не зависимое от предыдущего. Пусть τ и угол θ нового направления с нормалью к границе предполагаются случайными величинами с функциями распределения $H(\tau)$

и $G(\theta)$. Изучается случай, когда область D — круг, а $G(\theta) = a + b\,|\sin\theta| + c\sin^2\theta$. Предлагается также некоторая методика для приближенного решения задачи в случае, когда D — квадрат. М. И. Ядренко

10747. Некоторые расширения использования матриц в теории популяций. Вильямсон (Some extensions of the use of matrices in population theory. Williamson M. H.), Bull. Math. Biophys., 1959, **21**, № 1, 13—17 (англ.)

Для характеристики исходной последовательности возрастных классов популяций предлагается использовать матрицы. Путем последовательного умножения этих матриц на некоторые матрицы, характеризующие плодовитость классов и вероятности перехода из одного возрастного класса в другой, получается последовательность матриц, определяющих распределение по возрастным классам в некоторые фиксированные моменты времени. В. Н. Сачков

10748. О некоторой статистике в общественной группе. Аояма (On a certain statistic in a social group. Aoyama Hirojiro), Ann. Inst. Statist. Math., 1957, **9**, № 1, 23—30 (англ.)

Из совокупности людей объема N, разделенной на три группы объемов соответственно N_1, N_2, N_3 ($N_1+N_2+N_3=N$), выбираются d представителей. Пусть x, y, z суть соответственно числа людей в первой, второй и третьей группах, которые выбрали своих представителей из первой группы. Рассматривается статистика $u=x+y+z$, используемая для определения существенности преимущества людей первой группы перед двумя другими. В предположении независимости выборов находятся среднее и дисперсия этой статистики. Указывается возможность аппроксимации распределения статистики распределением Пуассона и биномиальным распределением. Приведены числовые данные, характеризующие качество аппроксимации. В. Н. Сачков

10749. Гемоцитометрические подсчеты и теория размещений. Бартон, Дейвид (Haemocytometer counts and occupancy theory. Barton D. E., David F. N.), Trab. estadist., 1959, **10**, № 1, 13—18 (англ., рез. исп.)

Производится независимая выборка $t_1,\ldots,t_N$ из некоторой генеральной совокупности. Обозначим $n=\sum t_j$. Приводятся выражения $p(t_1,\ldots,t_N)$, $p(n)$, $p(t_1,\ldots,t_N|n)$, $E\left(\prod_j t_j^{(\nu_j)}\,\middle|\,n\right)$, $E\left(1/N-1\sum_j\left(t_j-n/N\right)^2\right)$ для а) пирсоновской генеральной совокупности с параметром λ; б) случая, когда λ является случайной величиной пирсоновского типа III; в) биномиальной генеральной совокупности вида $(p+q)^r$. Указывается, что излагаемые результаты могут найти применение в экологии. Л. Н. Куцев

10750. О вычислении коэффициента браков между родственниками и коэффициента родства. Дёринг, Вальтер (Über die Berechnung von Inzucht und Verwandschaftskoeffizienten. Döring H., Walter E.), Biometr. Z., 1959, **1**, № 3, 150—161 (нем.)

Приводятся формулы для вычисления коэффициента браков между родственниками и коэффициента родства. М. Г. Шур

10751. Описание одномерной цепочки взаимодействующих элементов как марковской последовательности. Маллинс (Analysis of the linear cooperative problem as a Markoff process. Millins W. W.), Phys. Rev., 1959, **114**, № 2, 389—393 (англ.)

Рассматривается цепочка идентичных элементов, могущих находиться в α состояниях и взаимодействующих только с непосредственными соседями. Пусть q_i — вероятность i-го состояния у случайно выбранного элемента, p_{ij} — вероятность того, что за элементом в i-м состоянии следует элемент в j-м состоянии, и $q_{ij}=q_ip_{ij}$ — вероятность того, что два соседних элемента находятся соответственно в i-м и j-м состояниях. Пусть $u_{ij}=u_{ji}$ — энергия взаимодействия между соседними элементами в i-м и j-м состояниях, v_i — энергия элемента в i-м состоянии, $\varepsilon_{ij}=u_{ij}+\frac{1}{2}(v_i+v_j)$; тогда внутренняя энергия равна $U=\sum_{ij}q_{ij}\varepsilon_{ij}$, энтропия $S=-k\sum_{ij}q_{ij}\ln p_{ij}$ и свободная энергия $F=U-ST$. Показывается, что равновесная свободная энергия на один элемент равна $\bar{F}=-kT\ln z$, где z — наибольшее собственное значение матрицы $A_{ij}=\exp(-\varepsilon_{ij}/kT)$. Определение равновесных переходных вероятностей $\bar{p}_{ij}$ требует знания также собственных векторов C_i указанной матрицы. Доказывается, что в равновесии $\bar{q}_{ij}=\bar{q}_{ji}=z^{-1}A_{ij}C_iC_j$. Показывается, что гипотеза $\bar{p}_{ij}=\exp\left(-\frac{u_{ij}+v_j}{kT}\right)\Big/\sum_l \exp\times\left(-\frac{u_{ij}+v_j}{kT}\right)$ в общем случае оказывается неверной.

Указывается обобщение изложенных рассуждений на случай непрерывного множества возможных состояний элементов цепи. А. С. Монин

10752. Стохастический процесс, определяющий пробег быстрых частиц. Рамакришнан, Матьюс (Straggling of the range of fast particles as a stochastic process. Ramakrishnan Alladi, Matthews P. M.), Proceed. Indian Acad. Sci., 1955, **A41**, № 5, 202—209 (англ.)

Микрочастица с большой энергией E, пройдя слой вещества толщиной dt, теряет $\beta(E)\,dt$ энергии на ионизацию атомов среды и, кроме того, с вероятностью $R(E'\mid E)\,dE'dt$ излучает фотон с энергией $E-E'$ (причем ее энергия уменьшается до значения E'). Толщина t слоя вещества, на протяжении которого энергия частицы уменьшается до критического значения E_c (при котором частица „поглощается"), называется пробегом частицы. Поскольку уменьшение энергии при излучении фотонов происходит случайно, пробег есть случайная величина. Пусть $\pi(E\mid E_0,t)$ — плотность вероятности для энергии E частицы, имевшей начальную энергию E_0 и прошедшей слой вещества t. Эта функция удовлетворяет уравнению $\frac{\partial\pi(E\mid E_0t)}{\partial t}=-\pi(E\mid E_0,t)\times$ $\times\int_0^E R(E'\mid E)\,dE'+\int_E^{E_0}\pi(E'\mid E_0,t)\,R(E\mid E')\,dE'$. Плотность вероятности для пробега частицы можно найти по формуле $\frac{\partial}{\partial t}P(E_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{E_c}\pi(E\mid E_0,t)\,dE$. Рассматривается частный случай, в котором $E_c=0$; $\beta(E)=\beta$ при $E>0$ и 0 при $E=0$; $R(E'|E)\,dE'=R(q)\,dq$ ($q=E'|E$), причем $R(q')=\delta(q'-q)$. В этом случае указывается точное решение (в виде ряда) для $\pi(E\mid E_0,t)$ и $P(0,t)$, приводятся таблицы и графики. Производится сравнение изложенной теории со схемой Яноши (Janossy L., Cosmic Rays, Oxford, 1950). А. С. Монин

10753. Соображения по поводу теории передачи информации и ее применению в некоторых областях физики. Блан-Лапьер (Considérations sur la théorie de la transmission de l'information et sur son application à certains domaines de la physique.

Blanc-Lapierre A.), Ann. Inst. Henri Poincaré, 1953, 13, № 4, 245—296 (франц.)

10754. Турбулентные решения некоторых уравнений в частных производных. Басс (Solutions turbulentes de certaines équations aux dérivées partielles. Bass Jean), C. r. Acad. sci., 1959, 249, № 16, 1456—1457 (франц.)

Функция $f(x, t)$ от двух переменных, заданная в неограниченной пространственно-временной области, называется турбулентной, если предел $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x,t)} \times$ $\times f(x+\xi, t+h)\,dh$ существует при любых x, ξ, t, h, является непрерывной функцией своих аргументов и стремится к нулю и при $h\to\infty$ (x и ξ фиксированы) и при $\xi\to\infty$ (x и h фиксированы). Доказывается, что известное уравнение Бюргерса (модулирующее уравнения гидродинамики) $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ имеет турбулентные решения; при доказательстве используется преобразование Копфа — Коула (см., например, Коул Д., РЖМех, 1958, № 6, 6439), сводящее решение уравнения Бюргерса к решению уравнения теплопроводности, и результаты автора по теории псевдослучайных функций. А. М. Яглом

См. также: 9844, 9958, 9959, 9960, 10156К—10168, 10538, 10539.

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

10755. Конечная геометрия и ее богатства. Маршо (La géométrie finie et ses richesses. Marchaud André. Conf. Palais découv. Univ. Paris, 1958, A, № 236, 23 p.) (франц.)

10756. Геометрическое интегрирование систем уравнений в частных производных. Хаймович (Integrarea geometrică a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Haimovici M.), Lucrările consfăt. geom. diferent. 1955. Timișoara Acad. RPR., 1956, 111—117 (рум.)

Автор усматривает две точки зрения в подходе к решению уравнений в частных производных: 1) количественную (Коши, Риман и т. д.), в соответствии с которой находятся условия, определяющие интеграл, после чего вычисляется этот интеграл при заданных числовых значениях; 2) геометрическую или логическую, заключающуюся в отыскании геометрических свойств дифференциальных уравнений (Монж, Ампер, Лагранж). Коротко описывается метод Дарбу интегрирования уравнений в частных производных и несколько более подробно — метод внешних форм Картана.
Н. И. Кованцов

10757. Некоторые свойства интегральных элементов системы Пфаффа второго рода. Хаймович (Quelques propriétés des éléments intégraux d'un système de Pfaff du IIe genre. Haimovici Mendel), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, 1, № 1, 23—32 (франц.)
Перевод с румынского (РЖМат, 1958, 2409).

10758. Современное состояние, методы и проблемы дифференциальной геометрии. Видаль-Абаскаль (Estado actual, metodos y problemas de la geometria diferencial. Vidal Abascal Enrique), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, 17, № 2-3, 161—170; № 4-5, 238—257; № 6, 299—312; 18, № 1-2, 28—70 (исп.)

Продолжение обзора (РЖМат, 1958, 5061). Заканчивая первую часть обзора, посвященную классической дифференциальной геометрии (д. г.), автор весьма кратко останавливается на проблеме минимальных поверхностей, упоминает проблему Плато. Конкретные результаты не приводятся. Библиография содержит 17 назв. учебников и монографий. Вторая часть обзора, посвященная современной д. г., содержит разделы: I. Проективная д. г. II. Теория групп и д. г., пространства Клейна. III. Волокнистые пространства (espacios fibrados), римановы пространства, пространства связности, обобщенные пространства Картана. IV. Интегральные инварианты. V. Интегральная геометрия. VI. Гармонические формы, келерова геометрия. В качестве приложения помещен перевод мемуара Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». 1. Конгруэнции кривых; работы Вильчинского по теории поверхностей; исследования Картана по теории поверхностей. Точных формулировок и результатов нет. Библиография не дана. 2. Концепция пространства; группы Ли и инфинитезимальные операторы; подвижные реперы; пространства Клейна. Библ. 12 назв. 3. Волокнистые пространства — приводятся определение и некоторые теоремы Чжен (Chern), примеры; риманова геометрия — формулируются проблемы эквивалентности метризации, погружения, геодезических; пространства связности (евклидовой, аффинной и проективной); пространства Клейна как волокнистые. Библ. 22 назв. 4. Интегральные инварианты Ли—де Рама и Пуанкаре—Картана. Библ. 11 назв. 5. Формулируются некоторые задачи Сантало. Библ. 32 назв. 6. Внешнее дифференцирование и взаимная операция, гармонические формы (как обобщение гармонических функций); келерова геометрия. Библ. 5 назв. В целом обзор носит беглый характер и не соответствует названию. Г. И. Дринфельд

10759 К. Элементарное введение в тензорное исчисление. Рашевский (Elementare Einführung in die Tensorrechnung. Raschewski P. K. Übers. aus dem Russ. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1959, 79 S., 6.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 34, 2602 (нем.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

10760. Об исключении барицентрических и ротационных координат в оболочечной модели ядра. Хольмберг (On the elimination of the barycentric and rotational coordinates in a nuclear «shell-model». Holmberg Bengt R. Kgl. tekn. högskol. handl., 1959, № 145, 28 pp., ill.) (англ.)

При вычислении состояний индивидуальных частиц в оболочечной модели ядра обычно делаются пренебрежения, так как не исключаются координаты центра тяжести и угловые переменные вращения ядра как целого. В работе показано, что такая элиминация является возможной, причем находятся добавочные переменные, позволяющие дальнейшее отделение нуклонных состояний. О. С. Парасюк

10761. Тензорный анализ машин. Элементарное введение. Часть I. Хинтон (Tensor analysis of machines—an elementary introduction. Part I. Hinton W. R.), Electr. J., 1959, 162, № 15, 1064—1065 (англ.)

Элементарное изложение теории систем линейных уравнений с 2 и 3 неизвестными и матриц 2-го и 3-го порядка. Б. А. Розенфельд

10762. Дополнение гониометрии и проективные соотношения в геометрии эвольвент. Видеки (Complement of goniometry and projective relativenesses in the involute geometry. Vidéky E.), Acta techn. Acad. scient. hung., 1958, **22**, № 3-4, 177—191 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Анализ специальных свойств углов, образующихся при пересечении дуг окружностей при различном их расположении и соотношении радиусов и углов между касательными. Определение дополнительного угла, который отличает угол между дугами от обычного угла между пересекающимися прямыми. Рассматривается кинематика образования эвольвенты, спирали Архимеда и различного типа циклоидальных кривых. Полученные соотношения используются для исследования геометрических параметров плоского эвольвентного зубчатого зацепления внешнего и внутреннего, получаемого при нарезании фрезой (или рейкой) методом обката. Указаны предельные положения начала интерференции и подрезки. Помимо этого рассматриваются условия смазки в зубчатых зацеплениях и образования масляного клина. Дается определение углов масляного клина для различных случаев при внешнем и внутреннем зацеплении. А. М. Тевлин

10763. Решение одной проблемы инструментальной геометрии. Драхош, Хорньик, Хоссу (Egy szerszámgeometriai probléma matematikai megoldása. Drahos István, Hornyik László, Hosszú Miklós), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958, **3**, № 1-2, 83—96 (венг.; рез. русск., англ.)

Если $\bar{r}_c\{a\sin\varphi;\ a\cos\varphi;\ c(\varphi-\varphi_0)/\omega\}$ — радиус-вектор основной винтовой линии, $\bar{T}\bar{N}\bar{B}$ — подвижной трехгранник в текущей точке M на винтовой линии, то любую линию относительно $\bar{T}\bar{N}\bar{B}$ можно определить вектором $\bar{r}_g(\lambda,\varphi)=p(\lambda)\bar{T}(\varphi)+q(\lambda)\bar{N}(\varphi)+s(\lambda)\bar{B}(\varphi)$, где переменный параметр λ дает на образующей спиральной поверхности линии положение текущей точки, как конца $\bar{r}_g$; начало $\bar{r}_g$ находится в точке M. Рассматривается новая система координат XYZ, в которой обычно задается инструмент. Начало новой системы координат находится на оси x на расстоянии d от старого начала, оси YZ повернуты на угол δ относительно yz. Показывается составление уравнения осевого сечения XZ дисковой фрезы для обработки данной спиральной поверхности, исходя из способа определения R-радиуса окружности в каждом сечении $Z=\text{const}$ фрезы — как минимума функции $R^2=X^2+Y^2$. Общие формулы применяются к случаю обрабатываемой линейчатой спиральной поверхности. Как частный случай при $d=0$, $\delta=-\pi/2$, получается пальцевая фреза. Для плоской спиральной поверхности (прямой архимедовой поверхности) $\bar{r}_g=\lambda\bar{N}$ решение задачи нахождения профиля, в виде Z и R-функций от φ, доводится до конца. Определяется в конечном виде уравнение профиля дисковой фрезы для косозубого колеса. В. С. Люкшин

10764. Замечание к статье Драхош, Хорньик и Хоссу «Решение одной проблемы инструментальной геометрии». Липка (Megjegyzesek ifj. Drahos I., Hornyik L., és Horsszú M. «Egy szerszámgeometriai probléma matematikai megoldása» cimü dolgozatához. Lipka István), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958(1959), **3**, № 3-4, 219—236 (венг.; рез. русск., нем.)

Рассматриваемая в статье (реф. 10763) поверхность вращения инструмента для фрезерования спиральных поверхностей может быть определена как огибающая однопараметрического семейства поверхностей вращения. Радиус любого кругового сечения поверхности вращения инструмента равняется экстремуму радиусов окружностей, полученных при соответствующем сечении семейства поверхностей. Согласно исследованиям, цитируемым в заголовке авторов, этот экстремум должен быть минимумом, причем абсолютным минимумом в интервале обработки для того, чтобы получить правильный профиль инструмента. Первая часть настоящей заметки изучает условие существования абсолютного минимума для случая пальцевой фрезы для обработки винтов с плоским ходом. Вторая часть изучает существование абсолютного минимума в случае пальцевой фрезы для косозубого зубчатого колеса и находит связь между шириной зубцов и их допустимой косостью. В. С. Люкшин

10765. Геометрическая интерпретация распределения главных осей инерции материальной системы. Куильгини (Una interpretazione geometrica della distribuzione degli assi principali di inerzia di un sistema materiale. Quilghini Demore), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 3, 399—404 (итал.; рез. англ.)

Рассматривается материальная система S. Пусть M — полная масса системы, P_0 — ее центр масс, P_0x, P_0y, P_0z — главные центральные оси инерции, A_0, B_0, C_0 — соответствующие моменты инерции. Через произвольную точку $P(x, y, z)$ пространства проведем прямую r с направляющими косинусами α, β, γ. Тогда момент инерции системы S относительно прямой r выражается формулой

$$I=I(\alpha,\beta,\gamma)=[A_0+M(y^2+z^2)]\alpha^2+[B_0+M(x^2+z^2)]\beta^2+$$
$$+[C_0+M(x^2+y^2)]\gamma^2-2M(yz\beta\gamma+xz\alpha\gamma+xy\alpha\beta). \quad (1)$$

Направления главных осей инерции в точке P определяются уравнениями

$$[A_0+M(y^2+z^2)-I]\alpha-Mxy\beta-Mxz\gamma=0;$$
$$-Mxy\alpha+[B_0+M(x^2+z^2)-I]\beta-Myz\gamma=0; \quad (2)$$
$$-Mxz\alpha-Myz\beta+[C_0+M(x^2+y^2)-I]\gamma=0;$$

$$\begin{vmatrix} A_0+N(y,z) & -Mxy & -Mxz \\ -Mxy & B_0+N(x,z) & -Myz \\ -Mxz & -Myz & C_0+N(x,y) \end{vmatrix}=0, \quad (3)$$

где $N(u,v)=M(u^2+v^2)-I$.

Проведем через точку P поверхность второго порядка $lx^2+my^2+nz^2=1$. Если прямая r является нормалью этой поверхности, то

$$\alpha=\pm lx/\sqrt{a};\ \beta=\pm my/\sqrt{a};\ \gamma=\pm nz/\sqrt{a}, \quad (4)$$

где $a=l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2$. Подставив выражения (4) в уравнения (2) и (3), мы получим три тождества относительно x, y, z, из которых следует:

$$\frac{A_0}{M}-\frac{1}{-}=\frac{B_0}{M}-\frac{1}{m}=\frac{C_0}{M}-\frac{1}{n}=s;$$

$$\frac{x^2}{(A_0/M)-s}+\frac{y^2}{(B_0/M)-s}+\frac{z^2}{(C_0/M)-s}=1. \quad (5)$$

Уравнение (5) является относительно s уравнением третьей степени и имеет три вещественных корня s_1, s_2, s_3. Если $A_0<B_0<C_0$, то $s_1<(A_0/M)<s_2(B_0/M)<s_3<(C_0/M)$. При $s=s_1$ уравнение (5) представляет эллипсоид, при $s=s_2$ — однополостный гиперболоид, а при $s=s_3$ — двуполостный гиперболоид. Через каждую точку $P(x, y, z)$ проходит эллипсоид семейства $s<(A_0/M)$, однополостный гиперболоид, для которого $(A_0/M)<s<(B_0/M)$, и двуполостный гиперболоид, для которого $(B_0/M)<s<(C_0/M)$. Нормали к этим трем поверхностям в точке P образуют главный триэдр инерции системы S относительно точки P. Ю. Л. Рабинович

10766. Уточнение соотношений между напряжениями и деформациями для стоксовой жидкости. Серрин

(The derivation of stress-deformation relations for a Stokesian fluid. Serrin James), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 4, 459—469 (англ.)

Обобщается на нелинейный случай известная зависимость между тензором скоростей деформации D и тензором напряжений T для вязкой жидкости: $T = (-p + \lambda\theta)I + 2\mu D$, где I — единичный тензор, p — давление, θ — первый инвариант тензора D; λ, μ — величины, зависящие от свойств жидкости. При весьма общих предположениях эта зависимость может быть записана в виде: $T = (-p + \alpha)I + \beta D + \gamma D^2$, где α, β, γ — функции главных инвариантов тензора D и $\alpha = 0$, когда $D = 0$. Устанавливается также, что в случае, когда компоненты тензора напряжений суть полиномы степени N относительно компонент тензора деформаций, эта зависимость имеет вид: $T = (-p + P_0)I + P_1 D + P_2 D^2$, где $P_k (k = 0, 1, 2)$ — некоторые полиномы относительно главных инвариантов тензора D. В. Л. Рвачев

10767. Обобщение теоремы Пифагора и ее интерпретация в теории электрических сетей. Алькаин-Партарройо (Teorema de Pitágoras generalizado y su materialización en una red electrica. Alcain Partarroyo R.), Rev. cálcule automát. y cibernet., 1958, 7, № 19, 40—46 (исп.; рез. франц.)

Определяется изоморфизм между геометрической фигурой с вершинами A, B, C, ... и многополюсной электрической сетью с полюсами a, b, c, ... такой, что каждой вершине соответствует один полюс, сопротивление Z между полюсами p и q пропорционально $\overline{PQ}^2$ — квадрату расстояния между точками, соответствующими полюсам: $Z_{ab} = K \cdot \overline{AB}^2$, $Z_{pq} = K \cdot \overline{PQ}^2$ и т. д. Операция короткого замыкания двух полюсов p, q эквивалентна проектированию изоморфной фигуры на направление PQ. Применение изоморфизма в пространстве двух измерений к трехполюснику oa_1a_2 и к соответствующему прямоугольному треугольнику OA_1A_2 дает: $Z_{oa_1} = K \cdot \overline{OA_1}^2$, $Z_{oa_2} = K \cdot \overline{OA_2}^2$ и $Z_{a_1a_2} = K \cdot \overline{A_1A_2}^2$. При параллельном соединении приемников (сопротивлений) имеет место выражение $Z^{a_1a_2}_{oa_i} = \frac{1}{Z_{oa_1}} + \frac{1}{Z_{oa_2}}$, чему соответствует проектирование вершины O в точку O_1 на гипотенузу A_1A_2, $\frac{1}{\overline{OO_1}^2} = \frac{1}{\overline{OA_1}^2} + \frac{1}{\overline{OA_2}^2}$. Зависимости $Z_{a_1a_2} = Z_{oa_1} + Z_{oa_2}$ соответствует теорема Пифагора $\overline{A_1A_2}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2$. В пространстве трех измерений рассматривается тетраэдр $OA_1A_2A_3$, боковые грани которого прямоугольные треугольники, O — их общая вершина, изоморфный четырехполюснику $oa_1a_2a_3$, в котором три полюса a_1, a_2, a_3 соединены с общим полюсом o. Вводя боковые поверхности тетраэдра S_{12}, S_{23}, S_{13} и S_0 — площадь $A_1A_2A_3$, получается из зависимостей между Z_{oa_i} формула Пифагора: $S_0^2 = S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2$. Для пространства n измерений формулируется теорема Пифагора: „Если в связке из n отрезков (ребер) OA_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ каждое из них перпендикулярно ко всем другим ребрам, то для гиперобъемов, каждый из которых образован $n - 1$ ребрами, исходящими из общей вершины O и отрезками, соединяющими другие концы этих ребер, имеет место формула $\sum_{i=1}^{i=n}$ (объемов $OA_1 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n)^2$) = (объем $OA_1 \ldots A_{i-1}A_iA_{i+1} \ldots A_n)^2$». Для доказательства берется изоморфно составленная $(n + 1)$-полюсная сеть $oa_1a_2 \ldots a_n$, в которой каждый полюс a_i соединен с o и по аналогии даны зависимости для сопротивлений, приводящие к доказываемой теореме. В. С. Люкшин

10768. О геометрически абсолютном оптическом представлении в электронном микроскопе. Ингарден (On the geometrically absolute optical representation in the electron microscope. Ingarden Roman Stanisław. Prace Wrocławsk. towarz. nauk. B., 1957, B, № 45, 60 s.) (англ.)

10769. Приложение дифференциальной геометрии в различных областях математики и техники. Моисил (Aplicaţiile geometriei diferenţiale în diferitele domenii ale matematicii şi tehnicii. Moisil Gr. C.), Lucrările consfăt. geom. diferenţ. 1955. Timişoara (Acad. RPR, 1956, 119—128 (рум.)

10770 К. Введение в матричные и тензорные методы теоретической и прикладной механики. Борг (An introduction to matrix tensor methods in theoretical and applied mechanics. Borg Sidney F. Ann Arbor, Mich., J. W. Edwards, Inc., 1956, iv, 202 pp., 4.75 doll.) (англ.)

Книга в основном предназначена быть учебником для инженеров на старшей и высшей ступени обучения. После краткого обзора основных положений алгебры матриц, векторного анализа и теории функции комплексного переменного вводится понятие тензора, которое используется прежде всего при выводе основных уравнений теории упругости; даны также применения к некоторым классическим задачам указанной теории. Далее следует сжатое изложение элементарных частей теории вязких жидкостей и теории пластичности. Заканчивается книга главами, в которых рассматриваются криволинейные координаты и их приложения.

Математические тонкости преднамеренно игнорируются; существенные ограничения, при наличии которых излагаемые результаты справедливы, часто не упоминаются. Многие читатели встретят в книге ряд незнакомых им терминов, оставленных без определений. Автор поставил перед собой две задачи: познакомить будущих инженеров с матричным и тензорным исчислением как новым рабочим инструментом и дать им единый доступный обзор основ нескольких областей прикладной механики, все это в книге скромного размера; обе эти цели достигнуты, как кажется, удовлетворительно. F. H. Hildebrand

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 6, 474.

10771 К. Введение в векторное и тензорное исчисление с обращением особого внимания на его значение в физике. Шмидт, Кайзер (Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung. Schmidt Harry. 2. durchgeseh. Aufl. Überarbeit. Kaiser Hans. Berlin, VEB Verl., 1955, 116 S.) (нем.)

10772 Д. Поверхности движения со специальными кинематическими сетями. Шрейнер (Bewegflächen mit speziellen kinematischen Netzen. Schreiner Adolf.—Diss., Dokt. Naturwiss., Fak. Allgem. Wiss. Techn. Hochschule München, 1959, 57 S., ill.) (нем.)

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10773. Замечательные с центроаффинной точки зрения треугольники. Миллер (Triunghiuri remarcabile din punctul de vedere centro-afin. Myller A.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Iaşi Mat., 1958, 9, № 1, 1—4 (рум.; рез. русск., франц.)

Известно, что в унимодулярной центроаффинной геометрии расстояние между двумя точками измеряется площадью треугольника, вершинами которого являются данные точки и неподвижный центр O. Пусть O лежит внутри некоторого треугольника ABC. Если он будет равносторонним, то площадь каждого из треугольников AOB, BOC и COA равна одной трети площади треугольника ABC. Перпендикуляр из O к любой стороне треугольника ABC равен одной трети соответствующей высоты, т. е. точка O является также центром тяжести треугольника. Таким образом по-новому освещаются

некоторые свойства треугольников наибольшей площади, вписанных в данный эллипс, которыми занимались Баризиен, Депре и Циценка в рамках геометрии треугольника. Треугольники наибольшей площади, вписанные в эллипс, являются равносторонними с центроаффинной точки зрения. Автор их называет аффинно-равносторонними, площадь каждого из них равна $(3\sqrt{3/4})\,pq$, где p, q — полуоси эллипса. Все треугольники, имеющие центр тяжести в O и вписанные в эллипсы с центром в той же точке O и произведение осей которых одинаково, являются равными равносторонними треугольниками в центроаффинной геометрии. Если центр O лежит вне треугольника ABC, то треугольники AOB, COA и BOC будут равносторонними, когда четырехугольник $OCAB$ будет параллелограммом. Следуя той же интерпретации, треугольник ABC будет называться аффинно-прямоугольным с гипотенузой AB, если сумма квадратов площадей треугольников COA и COB равна квадрату площади треугольника AOB, или же, в декартовых координатах:

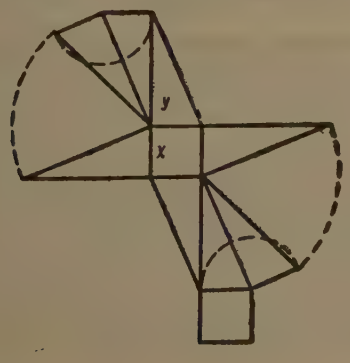
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 = 0. \qquad (1)$$

Заменяя x_3, y_3 текущими координатами x, y, получаем из (1) уравнение геометрического места вершины аффинно-прямоугольного треугольника с постоянной гипотенузой AB: $(y_1^2+y_2^2)\,x^2+(x_1^2+x_2^2)\,y^2-2(x_1y_1+x_2y_2)xy-(x\,y_2-x_2y_1)^2=0$. Это есть уравнение эллипса с центром в O, для которого точки A и B являются концами двух сопряженных диаметров. Если около эллипса с центром в O описан треугольник ABC, стороны CA и CB которого касаются эллипса в концах двух сопряженных диаметров, то треугольник ABC аффинно-прямоугольный в C. Оставляя неподвижной вершину C и перемещая точку касания стороны AB по эллипсу, переменная площадь треугольника достигает минимума для точек пересечения прямой CO с эллипсом. Автор называет эти наименьшей площади аффинно-прямоугольные треугольники равнобедренными, что объясняется следующим фактом: аффинная длина гипотенузы равна произведению аффинной длины катета на $\sqrt{2}$. Устанавливается ряд других предложений о центроаффинных прямоугольных треугольниках. Г. И. Глейзер

10774. Треугольник, вписанная окружность которого проходит через его центр тяжести. Гоньи-Перальта (Triangulo cuyo circulo inscrito pasa por el baricentro. Goñi Peralta Pedro de), Euclides, 1957, 17, № 193—194, 78—79 (исп.)

10775. Об одном десятиграннике. Льюк (A unique decahedron. Luke Dorman). Math. Gaz., 1958, 42, № 342, 286 (англ.)

Десятигранник, показанный на рисунке, был предложен Фризом. Два его основания суть квадраты, а



остальные грани — прямоугольные треугольники. Расстояние между двумя противоположными ребрами, проходящими через центр его тяжести, равно нулю. Ребра x и y могут быть любой длины. Если сторона квадрата $x=1$, то $y=\sqrt{2}$, а длина соприкасающихся ребер равна $\sqrt{3}$. В этом случае вершины оснований соответствуют восьми вершинам куба. А. И. Фетисов

10776. О правильном 257-угольнике. Леминге р (O pravidelném 257-úhelníku. Leminger Otakar), Časop. pěstov. mat., 1959, 84, № 3, 371—373 (чешск.)

Работа посвящена построению правильного 257-угольника. Указан метод, при помощи которого можно выразить $\cos(2\pi/257)$, а тем самым и длину стороны алгебраическим выражением, которое можно построить при помощи циркуля и линейки. M. Šisler

10777. О построении при помощи линейки уникурсальных кривых с одной кратной точкой. Росье (Sur la construction à la règle des courbes unicursales ayant un unique point multiple. Rossier Paul), Arch. sci., 1959, 12, № 1, 115—117 (франц.)

Предлагается метод определения по заданным $2n$ простым точкам $n+1$ коэффициентов a_j и n коэффициентов b_j, входящих в параметрическое уравнение уникурсальной кривой порядка n: $x=\left(\sum b_j t^j\right)/\left(\sum a_j t^j\right)$, $y=tx$. Нахождение указанных коэффициентов (определяемых с точностью до общего множителя) сводится к решению $2n$ линейных уравнений. Отмечается, что рассматриваемый метод построения уникурсальной кривой может оказаться интересным только из-за своей общности. Г. А. Зайцев

10778. Некоторые замечательные графические построения. Лаурenti (Alcune notevoli costruzioni grafiche. Laurenti Fernando), Archimede, 1959, 11, № 2, 94—96 (итал.)

Элементарными приемами решены следующие задачи на построение треугольника: 1) по стороне a, противоположному углу α и сумме l одной из двух других сторон с k-кратным оставшейся стороны (k — данное действительное положительное число); 2) по стороне a, противоположному углу α и разности l одной из двух других сторон и k-кратного оставшейся стороны; 3) по стороне a, одному из прилежащих к ней углов β и сумме l одной из двух других сторон с k-кратным оставшейся стороны; 4) по стороне a, одному из прилежащих к ней углов β и разности l одной из двух других сторон и k-кратного оставшейся стороны. Кроме того, строится трапеция $ABCD$, имеющая основание $AB=a$, прямые углы при двух последовательных вершинах A и D и угол между диагональю AC и боковой стороной AB, равной 30°, причем основания AB, CD и высота AD связаны условием: $CD+mAD=kAB$, где m, k суть данные действительные положительные числа. К задачам такого рода и их частным случаям сводятся многие упражнения, предлагаемые на выпускных экзаменах в лицее. В. С. Малаховский

10779. Элементы графического исчисления. Берни (Elementi di calcolo grafico. IV. Berni Arminio), Riv. mecc., 1959, 10, № 218, 45—49 (итал.)

Начало см. РЖМат, 1 60, 6879, 6880, 6881. Статья содержит два раздела из серии работ автора по основам графического исчисления. В первом разделе даны два простых способа построения по заданному отрезку a отрезка $x=n^k a$, где n — вещественное число и k — целое, при условии, что можно выбрать отрезки v и w такие, что $v/w=n$. Проводят две окружности с центром O и радиусами v, w; с помощью пучка лучей p_l с центром в точке O разбивают плоскость на n которое число равных частей. Обозначая через V_l и W_{l+1} точки пересечения луча p_l с соответствующими окружностями,

проводят отрезки V_iW_i. На луче p_1 откладывают данный отрезок $OA_0 = a$ и через точку A_0 проводят отрезок $A_0A_1 \parallel W_1V_1$ до встречи в точке A_1 с лучом p_2, через точку A_1 — отрезок $A_1A_2 \parallel W_2V_2$ до встречи в точке A_2 с лучом p_3 и т. д. Из подобия соответствующих треугольников легко устанавливается, что $OA_k = nka = x$. Отрезок $OA_{-r} = n^{-r}a$ $(k = -r)$ строится аналогично проведением отрезков в противоположном направлении. Второй способ построения отрезка $x = nka$ состоит в следующем. На сторонах OP и OQ угла POQ откладываются соответственно отрезки $OV = w$, $OW = v$ и $OW' = w$, $OV' = v$ соединяют V с V'; W с W' и на OQ откладывают $OA_0 = a$. Из A_0 проводят отрезок $A_0A_1 \parallel W'W$ $(A_0A_{-1} \parallel VV')$ до встречи в A_1 (A_{-1}) со стороной OP и т. д. Доказывается, что $OA_k = nka = x$. Рассмотрен конкретный пример построения отрезка $x = \left(\sqrt{2}\right)^{-3}a$. Во втором разделе строится отрезок $x = nka$ при любом действительном k с помощью графика показательной функции $y = ue^{x/u}$. Пусть p-асимптота кривой, r — некоторая перпендикулярная к ней прямая и O — их точка пересечения. Откладывают на r отрезки $OA = a$, $ON = na$. Параллели из A и N к прямой p пересекают кривую в точках A' и N', проекции которых на p суть A_0 и N_0. От точки A_0 откладывают на асимптоте p отрезок $A_0R_0 = kA_0N_0$ в том же направлении, что и A_0N_0 при $k > 0$ и в противоположном при $k < 0$. Оказывается, что отрезок R_0R перпендикуляра к асимптоте p в точке R_0 до кривой равен nka. Построение кривой $y = ue^{x/u}$ с единицей измерения u осуществляется с помощью таблицы степеней e. Разобран пример построения $y = 5e^{x/5}$. Отмечено, что многие задачи, рассмотренные автором в предыдущих разделах, сводятся к построению отрезка $x = nka$.

В. С. Малаховский

10780 К. Элементы геометрических преобразований. Часть 1. Ионеску-Бужор (Elemente de transformări geometrice. Part 1. Ionescu-Bujor Constantin. Bucureşti. Ed. tehn., 1958, 303 p., il., 7 lei), Bibliogr. RPR, 1959, 8, № 8, 213 (рум.)

10781 К. Дедуктивная геометрия. Т. 2. Даль-Буоно (Geometria deduttiva. Vol. 2. 4a ed. Dal Buono Ugo. Reggio Calabria, Ed. mat. U. Dal Buono, 1958, 336 p., 2600 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **73**, № 9, 346 (итал.)

Том 1 см. РЖМат, 1959, 5087К.

10782 К. Экспериментальная геометрия. Лицман (Experimentelle Geometrie. Lietzmann W. Stuttgart, Teubner, 1959, 111 S., ill., 12.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 41, 3075 (нем.)

10783 К. Геометрия для старших классов средней школы. Т. I. Барбанти (Geometria per le scuole medie superiori. Vol. I. Barbanti Alberto. Bologna, R. Pátron. (Monograf), 1959, VII, 256 pp., ill., 950 L.), Bibliogr. naz. ital., 1959, **2**, № 1, 16 (итал.)

10784 К. Геометрия. Мирра (Geometria. Ad uso cl. colleg. ist. tecn. Vol. I. Mirra Costante. Milano, L. Trevisini, 1958, 207 p., ill., 750 L.) Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 7, 262 (итал.)

10785 К. Элементы геометрии для старших классов средней школы. Т. I. Лодеццано (Elementi di geometria per le scuole medie superiori. Vol. I. 3a ed. Lodezzano Giovanni. Torino, Casa ed. A. e C., 1958, 214 p., ill., 650 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **73**, № 10, 399 (итал.)

10786 К. Элементы геометрии для старших классов средней школы. Т. I. Салини (Elementi di geometria ad uso delle scuole medie superiori. Vol. I. 3a ed. riv. Salini Ugo. Milano-Messina, G. Principato, 1958, 175 p., ill., 500 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **73**, № 11, 462 (итал.)

10787 К. Краткий курс прямолинейной тригонометрии. Истратов В. И. Моск. энерг. ин-т, М., 1959, 109 стр., илл., 2 р. 60 к.

10788 К. Тригонометрия для классической гимназии. Риччи-Маццоне (Trigonometria per il liceo classico. Ricci Mazzone Filosina. Messina—Firenze, G. D'Anna, 1958, 287 p., ill., 1000 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **73**, № 10, 399 (итал.)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10789. О шварциане одной пространственной кривой. Джинатемпо (Sullo schwarziano di una curva gobba. Ginatempo Nicola), Atti Soc. pelorit. sci. fis., mat. e natur., 1958, **4**, № 3-4, 307—308 (итал.)

Рассмотрен простой случай пространственной кривой, швардиан которой

$$k(s) = \frac{1}{4T^2} + \frac{1}{4\rho^2} + \frac{(T')^2}{4T^2} - i\,\frac{T'}{2\rho T} + \frac{i\rho'}{2\rho^2} - \frac{T''}{2T} \qquad (1)$$

сводится к одному члену (РЖМат, 1960, 2243). Именно, если кривизна $1/\rho$ и кручение $1/T$ кривой отличны от нуля и удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{1}{4\rho^2} + \frac{i\rho'}{2\rho^2} = 0;\quad \frac{1}{4T^2} + \frac{(T')^2}{4T^2} - \frac{T''}{2T} = 0, \qquad (2)$$

то $k(s) = -i(T'/2\rho T)$. Интеграция уравнений (2) при соответствующем выборе произвольных постоянных приводит к натуральным уравнениям $\rho = (i/2)s$, $T = s^2 + (1/4)$, которые определяют кривую относительно метрической группы. Переход к параметрическим уравнениям осуществляется обычным приемом. Используя ранее полученные результаты, автор ограничивается рассмотрением канонического уравнения $v'' + k(s)v = 0$ и определяет функцию V:

$$V = a\left(s^2 + \frac{1}{4}\right) + b\left[\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)\operatorname{arctg} 2s + \frac{s}{2}\right],$$

Здесь a, b — постоянные интеграции. В. С. Малаховский

10790. Проблема Фейербаха. Тахта (A"Feuerbach" problem. Tahta D. G.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 343, 23—25 (англ.)

Рассматриваются частные случаи положения центра O равнобочной гиперболы, проходящей через вершины ΔABC и переменную точку D. Пусть I — центр вписанной в ΔABC окружности, S — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Тогда: 1) если D совпадает с I, то O — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек; 2) если D совпадает с S, то O — середина отрезка HL, где L — точка пересечения окружности девяти точек с прямой, проходящей через A и наклоненной к AI под тем же углом, что и прямая Эйлера SH; 3) если D лежит на описанной около ΔABC окружности, то O есть точка пересечения линий Симпсона точек D и D', где D' — другая точка пересечения равнобочной гиперболы с описанной окружностью.

Н. В. Наумович

10791. Некоторые свойства плоских кривых. Шарма (Some properties of plane curves. Sharma A.), Ann. polon. math., 1959, **6**, № 3, 245—252 (англ.)

Даны весьма широкие обобщения теоремы Архимеда об отношении площади сегмента параболы к площади прямоугольника, описанного около этого сегмента. Результаты автора либо являются обобщениями результатов Голомба (РЖМат, 1955, 5222), либо аналогичны им. Доказаны шесть теорем. Приведем для примера вторую. Пусть $y = f(x)$ будет кривая класса C_n, причем $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$, $\lim_{x\to 0}(f(x)/x^{n+\alpha}) = g \neq 0$, $\lim_{x\to 0}(f^{(n)}(x)/x^{\alpha}) = g_1 \neq 0$ $(\alpha \geqslant 0)$; пусть B и P будут точками этой кривой с абсциссами h и θh соответствен-

но, причем $f(h) = (h^n/n!)\, f^{(n)}(\theta h)$; пусть, наконец, $m(L)$ будет площадь сегмента кривой, ограниченного дугой $\overset{\frown}{OB}$ и хордой $\overline{OB}$ (O — начало координат), а $m(T)$ — площадь треугольника OBP. Тогда $\lim\limits_{h\to 0}(m(L)/m(T)) = \frac{n+\alpha-1}{n+\alpha+1} \frac{\binom{n+\alpha}{n}^{(n+\alpha)/\alpha}}{\binom{n+\alpha}{n}^{(n+\alpha-1)/\alpha} - 1}$. Если, в частности, кривая является параболой, то $n=\alpha=1$, и мы получаем теорему Архимеда. А. М. Комиссарук

10792. Геометрическое место пространственных элементов, находящихся на равном расстоянии от двух скрещивающихся прямых. Вигашши (Két kitérő egyenestől egyenlő távolsagra levő térelemek mértani helye. Vigassy Lajos). Építőipari és közlek műsz. egyet. tud. közl., 1958, **4**, № 5, 133—148 (венг.; рез. русск., нем., франц., англ., исп.)

Рассматривается геометрическое место пространственных элементов (точек, прямых, плоскостей), находящихся на равном расстоянии от двух скрещивающихся прямых. Доказывается, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых, является гиперболическим параболоидом, а множество всех пар скрещивающихся прямых, для которых геометрическим местом точек, равноудаленных от каждой пары скрещивающихся прямых, является этот гиперболический параболоид, образует коноид Плюккера ($z(x^2+y^2)=2pxy$). Коноид Плюккера можно также получить, как совокупность осей гиперболических параболоидов, каждый из которых является геометрическим местом точек, равноудаленных от пары скрещивающихся прямых, причем каждая прямая из пары скрещивающихся прямых является равноудаленной от двух данных скрещивающихся прямых.

А. А. Бовди

10793. Один из способов определения кривизны ортогональных сечений на поверхности. Шандор (Felületi normálmetszetek görbületének vizsgálata a főmetszetek ívhosszai alapján. Sándor István). Építőipari és közlek. műsz. egyet. tud. közl., 1958, **4**, № 6, 163—168 (венг.; рез. русск., нем., франц., англ., исп.)

Автор дает вывод формулы кривизны нормального сечения на поверхности. Он исходит из единичных векторов главных направлений, принимая в качестве криволинейных координат на поверхности длины дуг главных сечений. Формула кривизны произвольного нормального сечения имеет вид: $1/R = r_1' r_2' r_{11}'' \cos^2\psi + r_1' r_2' r_{22}'' \sin^2\psi$, где $r(s_1, s_2)$ — уравнение поверхности, s_1 и s_2 — длины дуг главных сечений, ψ — угол между первым главным и произвольным нормальным сечением. Сопоставляя эту формулу с формулой Эйлера для определения кривизны произвольного нормального сечения, получается $1/R_1 = r_1' r_2' r_{11}''$ и $1/R_2 = r_1' r_2' r_{22}''$.

А. А. Бовди

10794. Некоторые функциональные свойства конических сечений. Николае (Proprietăți funcționale ale conicelor. Nicolae Radu L.). Bul. ştiinț. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1956, **8**, № 4, 695—702 (рум.; рез. русск., франц.)

10795 К. Аналитическая геометрия. Конические сечения и поверхности второго порядка. Бомпьяни (Geometria analitica. Coniche e quadriche. Bompiani Enrico. Roma, Lit. Marves, 1958, 212 p., ill.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **73**, № 11, 462 (итал.)

10796 К. Аналитическая геометрия на основе матричного исчисления. Баур (Analytische Geometrie auf der Grundlage des Matrizenkalküls. Teil I. Matrizen zweiter Ordnung, ebene Geometrie. Baur Arnold. Stuttgart, Klett, 1959, 59 S., ill., 2.20 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 42, 3134 (нем.)

10797 К. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. (Для втузов). Изд. 23-е, доп. Цубербиллер О. Н., М., Физматгиз, 1959, 295 стр. илл., 7 р. 35 к.

10798 К. Аналитическая геометрия. (Geometria analítica. 3°ano. (Matemática para colégio e vestibular). Rio de Janeiro, Ed. Brand, 1959, 131 p. il. — Mimeogr.), Bol. bibliogr. brasil., 1959, **7**, № 7, 369 (порт.)

10799 К. Курс аналитической геометрии на плоскости. Деврессе (Cours de géométrie analytique plane. A l'usage des athénées, des collèges, des écoles normales, des écoles techniques et des candidats à l'université et à l'École militaire. 3e éd. Devresse A. Bruxelles, A. De Boeck, 1959, 422 p., ill., 200 Bfr.), Bibliogr. Belg., 1959, **85**, № 11, 311 (франц.)

10800 К. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, конспект теории, решенные задачи, предлагаемые задачи. Киндл (Geometria analítica plana e no espaço, resumo da teoria, problemas resolvidos problemas propostos. Kindle Joseph H. Trad. do ingl. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1959, 244 p., il., 260,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1959, **7**, № 4, 213 (порт.)

10801 К. Курс лекций по высшей математике. Кн. I. Аналитическая геометрия. Изд. 3-е, доп. и переработ. Андриевский Ф. П., Моск. заочн. полигр. ин-т, М., 1959, 342 стр., илл., 5 руб.

ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

10802. Полярная сопряженность относительно некоторых образов II-го порядка в 4-мерном пространстве. Маневич В. А., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 3, 333—334

Работа содержит доказательство четырех теорем относительно «аксистеров» и «коностеров» и представляет собой развитие исследований А. К. Власова, опубликованных в монографии «Полярные системы высших порядков в формах 1-й ступени», М., 1909. (Гл. IV—Проективная геометрия 4-мерного пространства). По терминологии А. К. Власова под аксистерами и коностерами разумеются элементарные образы второго порядка соответственно в связке и в «пуке» трехмерных пространств четырехмерного пространства.

Н. Ф. Четверухин

10803. Инволюции, ассоциированные с конфигурацией Буркхардта в [4]. Хорадам (Involutions associated with the Burkhardt configuration in [4]. Horadam A. F.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1, 18—33 (англ.)

Определены типы 315 матриц, соответствующих инволюционным операциям, относящимся к конфигурации Буркхардта из 45 точек в [4] (проективное пространство четырех измерений). Рассматриваются также получаемые из этих 315 матриц 630 матриц в пространстве [8], входящие в группу CT (клиффордова группа преобразований подобия). Получен ряд результатов, относящихся к геометрическим образам, инвариантным относительно преобразований, соответствующих этим 630 матрицам. В. К. Туркин

10804. Некоторые вопросы аналитической и дифференциальной геометрии пространства Лобачевского. Березина Л. Я., LatvPSR Zinātņu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1958, № 11, 115—126 (рез. лат.)

Выводятся основные формулы аналитической и дифференциальной геометрии 3-мерного пространства Лобачевского в однородных координатах x_1, x_2, x_3, x_4, нормированных условием $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -1$ (на интерпретацию этих координат как декартовых координат точки гиперсферы мнимого радиуса в 4-мерном

псевдоевклидовом пространстве не указывается) и в координатах $x=x_1/x_4$, $y=x_2/x_4$, $z=x_3/x_4$.

Б. А. Розенфельд

10805. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых в пространстве Лобачевского. Андриевская (Спільний перпендикуляр двох перехресних прямих в просторі Лобачевського. Андрієвська М. Г.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 5, 465—467 (укр.; рез. русск., англ.)

С помощью интерпретации Бельтрами аналитически доказывается, что две собственные скрещивающиеся прямые в пространстве Лобачевского имеют два общих перпендикуляра — собственный и идеальный.

В. Ф. Рогаченко

10806. Об углах в гиперболической плоскости, вписанных в окружность. Смогоржевский (Про кути в гіперболічній площині, вписані в коло. Смогоржевський О. С.). Доповіді АН УРСР, 1959, № 5, 463—464 (укр.; рез. русск., франц.)

Пусть k — окружность в плоскости Лобачевского с центром O. Пусть далее $\angle AOB = 2\alpha < \pi$ и S — середина большей из дуг AB окружности k. Тогда на дуге ASB окружности k существуют такие две точки X и Y, симметричные относительно OS, что угол ACB, вписанный в k, будет меньше, равен или больше угла α, если точка C соответственно: лежит на дуге XSY, совпадает с X или Y, лежит на дуге ASB вне дуги XSY, включая концы A и B.

В. Ф. Рогаченко

10807. О некоторых центропроективных свойствах развертывающихся поверхностей. Скрыдлов В. Н., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), **29**, 73—85

В 3-мерном центропроективном пространстве, т. е. в проективном пространстве с выделенной точкой, соответствующем по принципу двойственности аффинному пространству, строится теория однопараметрических семейств плоскостей, соответствующая по принципу двойственности эквиаффинной дифференциальной геометрии линий. Аппарат теории — дублетные функции скалярного аргумента, соответствующие по принципу двойственности векторным функциям. Б. А. Розенфельд

10808. К теории семейств плоскостей в неевклидовых пространствах. Гейдельман Р. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 30—42

Строится общая теория k-параметрических семейств m-мерных плоскостей в n-мерных неевклидовых пространствах. Находятся фундаментальные геометрические объекты семейств плоскостей и основные инварианты и геометрические образы этих семейств, связанные с дифференциальными окрестностями различных порядков. В случае окрестности первого порядка найденные инвариантные дифференциальные формы — элементарные симметрические многочлены от квадратов стационарных расстояний двух бесконечно близких плоскостей семейства. Специально рассматриваются конгруэнции ($k = n - m$) и псевдоконгруэнции ($k = m + 1$) и их фокальные поверхности.

Б. А. Розенфельд

10809. Исследование объема симплекса в пространствах постоянной кривизны любой размерности. Бём (Untersuchung des Simplexinhaltes in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimension. Böhm Johannes), J. reine und angew. Math., 1959, **202**, № 1-2, 16—51 (нем.)

В $(n-1)$-мерном ($n > 1$) пространстве постоянной кривизны рассматривается симплекс $R^{(n)}$. Ограничивающие его n $(n-2)$-мерных граней в свою очередь являются симплексами размерности ниже на одно измерение; этот процесс понижения размерности продолжается до одномерных граней — ребер исходного симплекса. Для исследования объема симплекса его разбивают на ортосхемы. Под $(n-1)$-мерной ортосхемой $S^{(n)}$, следуя Шлефли (Schläfli L., Werke. I. Basel, 1950) понимают $(n-1)$-мерный симплекс с определенным порядком следования его прямых двугранных углов; углов, отличных от $\pi/2$ у ортосхемы $S^{(n)}$ не более $n-1$, и их заданием ортосхема определяется:

$$S^{(n)} = S^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}). \quad (1)$$

Для разложения симплекса на ортосхемы из какой-либо его вершины опускают перпендикуляр на противоположную грань и из основания этого перпендикуляра опускают перпендикуляры на все грани этой грани; из оснований построенных перпендикуляров в свою очередь опускают перпендикуляр на грани низшей размерности и т. д. Все основания перпендикуляров соединяют с исходной вершиной и вершинами соответствующих двумерных граней. Исходным пунктом для вычисления объема ортосхемы служит формула Шлефли для полного дифференциала этого объема:

$$dS^{(n)} = (1/(n-2)) \sum_{j=1}^{n-1} S_j^{(n-2)} d\alpha_j, \quad (2)$$

где $S_j^{(n-2)}$ — подортосхема, принадлежащая двугранному углу α_j. Формула эта, установленная Шлефли для пространств положительной кривизны, сохраняет свою силу и для отрицательной кривизны. Для $n = 2, 3$ формула (2) была проинтегрирована Шлефли, а для $n = 4$ (в случае как положительной, так и отрицательной кривизны) Коксетером (Coxeter H. S. M., Quart. J. Math., Oxford, 1935, 6). Для больших значений n в случае n нечетного редукционная формула Шлефли приводит к ортосхемам низшей размерности, в случае же n четного требуется введение специальных трансцендентных функций — m-логарифмов, определяемых рекуррентным соотношением:

$$L_m(z) = \int_0^z \frac{L_{m-1}(t)}{t}\, dt, \quad (3)$$

где дилогарифм

$$L_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\, dt. \quad (4)$$

В последней части работы рассматриваются некоторые, связанные с ортосхемами инварианты, с помощью которых удается несколько упростить дифференциальную формулу.

А. Г. Школьник

10810 К. Упражнения по геометрии. Т. 2. Проективная и начертательная геометрии, кривые и поверхности. Вилла (Esercizi di geometria. Vol. 2. Geometria proiettiva, geometria descrittiva, curve e superficie. 2a ed. Villa Mario. Bologna, R. Patron, 1956, x, 272 p., 2600 L.), Bibliogr. ital., 1957 (1959), **91**, № 680bis, 940 (итал.)

10811 К. Геометрия Лобачевского. Проективная модель. Тутаев Л. К., Минск, Белорусск. ун-т, 1959, 126 стр., илл., 4 р. 20 к.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10812. Линейное проектирование с фиксированной и переменной директрисой. Сантус-Рейс (Projetantes lineares e com diretrizes fixas e móveis. Santos Reis Felippe Dos), Rev. mineira engenh., 1959, **21**, № 78, 36—41 (порт.)

Автор подробно анализирует различные приемы начертательной геометрии и устанавливает зависимость некоторых из них от выводов проективной геометрии. Статья новых результатов не содержит и представляет только методический интерес.

М. П. Черняев

10813. Линейная система двух проекций в проективном пространстве R_n. Чупик (Über lineare Zweibildersysteme im projektiven R_n. Tschupik Josef P.), Monatsh. Math., 1959, 63, № 3, 214—227 (нем.)

Изучаются специальные случаи проекционного изображения проективного n-мерного пространства при помощи системы двух пространств низшего числа измерений (общие случаи рассмотрены автором в другой его работе (РЖМат, 1960, 795). Классификация изображений дается в зависимости от числа инциденций осевого пространства с пространством центров. Устанавливается независимость некоторых общих свойств рассматриваемого двухкартинного изображения от размерностей пространства центров, осевого пространства, а также их общей части.. З. И. Прянишникова

10814. Об одном методе начертательной геометрии. Маневич В. А., Матем. сб., 1959, 48, № 1, 105—116

Автор разработал метод отображения точек проективного пространства в пары точек на плоскостном эпюре. Основой этого метода послужили свойства линейного комплекса и нулевой системы. Плоскостной эпюр получается совмещением двух основных плоскостей, причем линия пересечения последних играет особую роль, на ней лежат центры O и O' проективных пучков, с помощью которых устанавливается нулевая система. В полученном отображении одна точка из пары точек всегда лежит на линии пересечения основных плоскостей. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками пространства и парами точек (X_1, X') на эпюре (причем $X' \subset OO'$). Далее автор показывает, что каждая прямая пространства отображается на эпюре в виде двух проективных рядов, одним из которых является ось. Затем рассматриваются вопросы инцидентности точек, прямых и плоскостей и устанавливается связь между предлагаемой системой отображения пространства и методом Монжа. Следующий раздел посвящен вопросу о решении основных метрических задач (измерение отрезков, перпендикулярность прямой к плоскости и др.) на новом эпюре. В конце статьи даны применения метода автора к решению задачи построения на эпюре диаметров и оси нуль-системы. Автор отмечает, что это позволяет выполнить построение главного вектора и главного момента системы сил в произвольной точке пространства на эпюре. Н. Ф. Четверухин

10815 К. Лекции по начертательной геометрии. Кизини, Мазотти-Биджоджеро (Lezioni di geometria descrittiva. 7a ed. Chisini Oscar, Masotti Biggiogero Giuseppina. Milano, C. Tamburini, 1959, VII, 343 p., ill.), Bibliogr. naz. ital., 1959, 2, № 1, 16 (итал.)

10816 К. Начертательная геометрия. (Учебн. пособие для трансп. и строит. вузов). Крылов Н. Н., Лобандиевский П. И., Мэн С. А. М., Физматгиз, 1959, 367 стр., илл., 7 р. 65 к.

10817 К. Перспектива и проекционное черчение. Конспект лекций. Для студ. (II курса) фак. худож. оформления печатной продукции. Траутман Н. Ф., Моск. заочн. полигр. ин-т, М., 1959, 92 стр., илл., 1 р. 60 к.

10818 К. Черчение и введение в начертательную геометрию. Градецкий, Радл (Rýsování a úvod do deskriptivní geometrie. Hradecký František, Rádl Jaroslav. Praha, SPN, 1957, 341 s., il.) (чешск.)

10819 К. Сборник задач по начертательной геометрии. Для студ. вечерних отд. Изд. 2-е, испр. и доп. Занегин А. Ф., Л., ЦБП Ленингр. технол. ин-та, 1959, 23 стр., илл., 2 р. 50 к.

10820 К. Сборник задач по начертательной геометрии. (Мхазвелобити геометриис амоцаната кребули). Гулисашвили Т. А., Тбилиси, «Цодна», 1958, 215 стр., илл., 4 р. 55 к. (груз.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

10821. Алгебраическая геометрия и дифференциальная геометрия. Галбурэ (Geometrie algebrică şi geometrie diferenţială. Galbură G.), Lucrările consfăt. geom. diferenţ. 1955. Timişoara Acad. RPR., 1956, 47—53 (рум.)

10822. Алгебраическая геометрия. Левшец (La geometria algebraica. Lefschetz Solomon), Rev. mat., 1959, № 5, 16—34 (исп.)

Популярное изложение некоторых элементарных понятий и фактов, дающих первоначальное представление о предмете алгебраической геометрии. Г. И. Дринфельд

10823. Возможные преобразования действительной кривой в кривую с действительным уравнением, проходящую через циклические точки. Грин, Прайор (The possible transformations of a real curve into a curve with real equation and passing through the isotropic points. Green H. G., Prior L. E.), Enseign. math., 1959, 5, № 2, 91—106 (англ.)

Две вещественные точки A, B ($y \pm \lambda x = 0$, $z = 0$), гармонически разделяющие вершины X, Y координатного треугольника X, Y, Z, переходят в циклические точки в результате преобразования координат $x:y:z = x_1 : \lambda i y_1 : i z_1$. Нераспадающаяся алгебраическая кривая порядка N с вещественными коэффициентами $(U_0 x^N + U_2 x^{N-2} + \ldots) + (U_1 x^{N-1} + U_3 x^{N-3} + \ldots) = 0$, где U_r — однородные многочлены степени r относительно y, z преобразуется в кривую $(u_0 x_1^N - u_2 x_1^{N-2} + \ldots) + i(u_1 x_1^{N-1} - u_3 x_1^{N-3} + \ldots \ldots) = 0$, где u_r — однородные многочлены степени r относительно y_1, z_1 с вещественными коэффициентами. Следовательно, если исходная алгебраическая кривая допускает преобразование в кривую с вещественными коэффициентами, проходящую через циклические точки, ее уравнение имеет вид при четном N: $U_0 x^{2n} + U_2 x^{2n-2} + \ldots + U_{2n-2} x^2 + U_{2n} = 0$, а при нечетном N: $U_1 x^{2n} + U_3 x^{2n-2} + \ldots + U_{2n-1} x^2 + U_{2n+1} = 0$. Я. П. Бланк

10824. О геометрии некоторых пространств, имеющих конечное число точек. Сегре (Intorno alla geometria di certi spazi aventi un numero finito di punti. Segre Beniamino), Archimede, 1959, 11, № 1, 1—15 (итал.)

Приводится без доказательства ряд результатов об алгебраических кривых в пространствах над конечными полями, формулируется несколько проблем. Л. А. Скорняков

10825. О $(k; n)$-дугах конечной линейной плоскости. Барлотти (Sui $(k; n)$-archi di un piano lineare finito. Barlotti Adriano), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 553—556 (итал.)

10826. О k-дугах в конечных плоскостях характеристики два. Сегре (Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica due. Segre Beniamino), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1957, 2, 289—300 (итал.)

Изучается вопрос о полноте k-дуг в конечной плоскости над полем Галуа $GF(q)$, $q = 2^h$, $h \geqslant 1$ (определения см. РЖМат, 1960, 4556). Показывается, что в этом случае каждая $(q+1)$-дуга — неполная, т. е. содержится в $(q+2)$-дуге, причем пополнение ее до $(q+2)$-дуги определяется однозначно (как ядро, т. е. точка пересечения касательных проведенных через $q+1$ заданных точек кривой второго порядка (РЖМат, 1959, 11491)). При $h = 1, 2, 3$ теорема эта допускает обращение: каждая $(q+2)$-дуга получается присоединением к $q+1$ точке некоторой коники ее ядра, однако при $h = 5$ и $h \geqslant 7$ это уже неверно (строятся примеры $(q+2)$-дуг, не получаемых таким образом). В. В. Морозов

10827. Графическая характеристика некоторых кубических поверхностей пространства $S_{3,q}$. Таллини (Caratterizzazione grafica di certe superficie cubiche di $S_{3,q}$. Tallini Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, **26**, № 4, 484—489 (итал.)

Рассматривается трехмерное линейное пространство $S_{3,q}$ над полем Галуа нечетного порядка q и в нем — множество $F(k)$ точек, обладающее следующими свойствами. $F(k)$ содержит k различных точек. Каждая прямая пространства $S_{3,q}$, содержащая более трех точек множества $F(k)$, целиком лежит в нем. $F(k)$ не содержит плоскостей, квадрик (специализированных или нет) и не сводится к конусу. Всякая прямая, соединяющая две двойные точки множества $F(k)$, содержится в нем. В работе изучаются множества $F(k)$.

Доказана теорема 1. Каждое множество $F(k)$ пространства $S_{3,q}$ ($q>3$, нечетное), содержащее три двойные точки линейного ряда, и такое, что $k \geqslant q^2+2q+1$ образует линейчатую кубику с различными прямолинейными директрисами, и, следовательно, $k=q^2+2q+1$. При доказательстве используются следующие элементарные свойства множеств $F(k)$. 1) Плоскость α пространства $S_{3,q}$, имеющая три прямые r_1, r_2, r_3, общие с $F(k)$, не может иметь никакой другой точки P, общей с таким множеством; 2) Двойные точки множества $F(k)$, которые по предположению существуют в числе, большем двух, или все расположены на одной и той же прямой, или же независимы между собой, и, следовательно, их максимальное число не превосходит четырех. 3) Каждая плоскость, проходящая через прямую, содержащую две двойные точки множества $F(k)$, пересекает $F(k)$, кроме этой прямой, или по h-дуге (РЖМат, 1957, 8231), расширяемой в $(h+2)$-дугу, если к ней присоединены две двойные точки, или по прямой, или по двум прямым, из которых одна проходит через одну двойную точку, другая — через другую, причем последний случай может иметь место только при условии, что прямая, проходящая через две двойные точки, не содержит никаких других. В. С. Малаховский

10828. О поверхностях с нулевыми арифметическим и геометрическим жанрами, имеющих пучок неприводимых биканонических кривых (добавление). Годо (Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles (addition). Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1958, **44**, № 11, 942—944 (франц.)

Упрощение некоторых доказательств работы РЖМат, 1959, 11431. В. В. Морозов

10829. Алгебраические поверхности нулевых родов с неприводимыми дважды каноническими кривыми. Годо (Sur les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles. Godeaux Lucien), Rend. Circolo mat. Palermo, 1958, **7**, № 3, 309—322 (франц.)

Работа посвящена выяснению условий, при которых алгебраическая поверхность может обладать неразветвленной циклической инволюцией, если образом этой инволюции является поверхность с неприводимыми дважды каноническими кривыми, удовлетворяющая соотношениям $p_a=p_g=0$, $P_2>0$. Результаты:

1. Если регулярная алгебраическая поверхность F рода $p_a>2$ обладает неразветвленной циклической инволюцией порядка p, образ F' которой имеет нулевой арифметический род, то $p=p_a+1$, и каноническая система поверхности F содержит $p-1$ изолированных кривых, принадлежащих этой инволюции.

2. В тех же условиях, если $p_a=2s>2$, то образ F' инволюции не содержит канонических кривых, но содержит неприводимые дважды канонические кривые, причем $p'_a=p'_g=0$, $p^{(1)}=P'_2=s$. То же верно для случая $p_a=2s-1$, но тогда $p^{(1)}=P'_2=s-1$.

Доказательства проводятся методами классической итальянской алгебраической геометрии. Ю. И. Манин

10830. Гипералгебраические объекты Коррадо Сегре. Вилла (Gli enti iperalgebrici di Corrado Segre, Villa Mario), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 2, 214—225 (итал.)

Обзор некоторых работ К. Сегре и других геометров; доказательств не содержит. Гипералгебраическим многообразием называется топологическое подмногообразие комплексного проективного пространства, которое алгебраично относительно действительной структуры этого пространства (пример: гиперсфера Пуанкаре $x\bar{x}+y\bar{y}=1$). Остальные определения вводятся аналогично. Формулируются отрывочные результаты. Библ. 25 назв.

Ю. И. Манин

10831. Об иррегулярности двойной гиперплоскости. Галларати (Sulle irregolarità di un S_r doppio Gallarati Dionisio), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 2, 175—181 (итал.; рез. англ.)

Пусть S_r — r-мерная двойная гиперплоскость q_k ($k=2, 3, \ldots, r-1$) — ее иррегулярность размерности k, μ — число компонент гиперповерхности ветвления. Обобщая полученные им ранее результаты для случая $r=3$, автор показывает, что при $q_2>0$ имеют место соотношения $q_2=\mu-1$, $q_k+q_{k+1}=0$ ($k=2, 3, \ldots, r-1$). Метод доказательства состоит в подсчете чисел P_a, P_g и q_k с помощью некоторых постулационных формул. В качестве немедленного следствия получается, что на S_r не существует дифференциалов первого рода размерностей $2, 3 \ldots, r-1$. Ю. И. Манин

10832. Алгебраическая теория ориентации и измерения симплексов. Лесьёр (Théorie algébrique de l'orientation et de la mesure des simplexes. Lesieur L.), J. math. pures et appl., 1958, **37**, № 3, 245—264 (франц.)

Автор обобщает аксиомы порядка Гильберта, служащие для ориентации прямой, придавая им следующую формулировку: предполагается возможность сравнения векторов с общей вершиной путем сопоставления $(AB, AC) \to x \in G$, обозначаемого $AB/AC=x$, где G представляет мультипликативную группу, состоящую из 1 и -1. Это соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

$$AB/AB=1,\ (AB/AC)(AC/AD)=AB/AD,$$
$$(AC/AB)(BA/BC)(CB/CA)=-1. \qquad (1)$$

Теория ориентации векторов состоит в установлении сравнения двух векторов с различными началами со следующими свойствами:

$$AB/AB=1,\ (AB/A'B')(A'B'/AB)=1,$$
$$AB/A'B'=-BA/A'B'=-AB/B'A', \qquad (2)$$
$$AB/A'B'=(AB/A''B'')(A''B''/A'B').$$

Пусть теперь E — произвольное множество, векторы которого представляют упорядоченные пары его элементов. Ориентация множества E сводится к установлению соотношения эквивалентности в множестве векторов, разбивающего множество на два класса, причем AB и BA принадлежат различным классам. Непосредственное обобщение указанной теории в применении к множеству E заключается в замене G произвольной мультипликативной группой, где роль 1 играет единичный элемент группы, а роль -1 — элемент порядка 2 центра группы G, и, исходя из аксиом (1), в доказательстве в этом случае свойств (2). Это обобщение автор называет теорией измерения векторов в группе G. Далее, вводя в множестве E отношение линейной зависимости (подчиненное аксиомам, при которых E становится гео-

метрической решеткой измерения $n-1$), автор распространяет теорию измерения на симплексы множества E, т. е. на ориентированные системы $(A_1, \ldots, A_n)$. Устанавливается вначале соответствие $(A_1, \ldots, A_{n-1} A_n)/(A_1, \ldots, A_{n-1} A'_n) \to x \in G$ (G — произвольная мультипликативная группа), удовлетворяющее аксиомам, обобщающим (1) ($\Omega_k = (A_1, \ldots, A_k)$):

$$(\Omega_{n-1} A_n)/(\Omega_{n-1} A_n) = 1, \quad (\Omega_{n-1} A_n)/(\Omega_{n-1} A'_n) =$$

$$= ((\Omega_{n-1} A_n)/(\Omega_{n-1} A''_n))((\Omega_{n-1} A''_n)/(\Omega_{n-1} A'_n)),$$

$$((\Omega_{n-2} AC)/(\Omega_{n-2} AB))((\Omega_{n-2} BA)/(\Omega_{n-2} BC)) \times$$

$$\times ((\Omega_{n-2} CB)/(\Omega_{n-2} CA)) = -1.$$

Теория измерения симплексов в G состоит в распространении указанного соответствия на произвольные симплексы $(A_1, \ldots, A_n)/(A'_1, \ldots, A'_n) \to x \in G$ (x — кососимметрическая функция A_i и A'_i) и в доказательстве свойств:

$$\Omega_n/\Omega_n = 1, \quad (\Omega_n/\Omega'_n)(\Omega'_n/\Omega_n) = 1,$$

$$\Omega_n/\Omega'_n = (\Omega_n/\Omega''_n)(\Omega''_n/\Omega'_n).$$

Г. С. Бархин

10833. О группе автоморфизмов некоторого класса алгебраических многообразий. Кобаяси (On the automorphism group of a certain class of algebraic manifolds. Kobayashi Shoshichi), Tohoku Math. J., 1959, **11**, № 2, 184—190 (англ.)

Доказана теорема: Пусть M — компактное комплексное многообразие, первый класс Чженя (Chern) $c_1(M)$ которого отрицательно определен; тогда группа G всех голоморфных автоморфизмов многообразия M конечна (Накано доказал ранее, что G дискретна). Ход доказательства: из условия $c_1(M) < 0$ следует, что кратный характеристический класс kK многообразия M определяет изоморфное вложение M в проективное пространство, причем G реализуется как группа проективных преобразований. Автор строит некоторую G-инвариантную ограниченную область пространства $\Gamma(kK)$, из существования которой следует, что G компактна. Доказательство завершается применением результата Накано или утверждения подобного же характера. Следствие из теоремы: Пусть дано комплексное расслоение (E, B, F, p), слой F которого компактен и удовлетворяет условию $c_1(F) < 0$. Тогда: если B — келерово многообразие, то и E также келерово; если B — алгебраическое многообразие, то и E также алгебраическое.

Ю. И. Манин

10834 К. Геометрия алгебраических систем на поверхности и на алгебраическом многообразии. Т. 3. Развитие теории простых и кратных интегралов на поверхности или многообразии и теорий, связанных с этим вопросом. Северн (Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica. Vol. 3. Sviluppo delle teorie degli integrali semplici e multipli sopra una superficie o varietà e delle teorie collegate. Severi Francesco. Roma Ediz. Cremonese, 1959, VIII, 463 p., 4800 L.), Bibliogr. naz. ital., 1959, **2**, № 2, 67 (итал.)

10835 К. Абелевы многообразия. Ланг (Abelian varieties. Lang Serge. (Intersci. Tracts Pure and Appl. Math., № 7). New York — London, Interscience, 1959, XII, 256 pp.) (англ.)

Монография посвящена абстрактной теории абелевых многообразий, основы которой были заложены Вейлем (Weil A., Variétés abéliennes et courbes algébriques, Paris, 1948). Реферируемая книга содержит весь материал книги Вейля, но далеко не исчерпывается последним: она отражает новые результаты (многие из них принадлежат автору) и методологические улучшения, которыми обогатилась теория за прошедшие десять лет. К числу важнейших новшеств принадлежат: теоремы о квадрате и кубе, построение многообразий Пикара и Альбанезе для произвольных многообразий (по А. Вейлю); теоремы о взаимности (Ланг); теория алгебраических систем абелевых многообразий (Чжоу). Следует отметить также значительно большую доступность книги Ланга в сравнении с книгой Вейля. Каждую главу автор предваряет кратким обзором ее содержания и заключает справками исторического характера (в основном относительно последних десяти — пятнадцати лет). В конце книги приведен обширный (97 назв.) список литературы с кратким путеводителем по нему. Никаких сведений о классической теории абелевых функций (абелевых многообразий над комплексным полем констант) в книге не содержится. В качестве предварительных требований автор перечисляет элементарную алгебраическую геометрию в объеме его книги «Введение в алгебраическую геометрию», элементы теории алгебраических групп и теорию пересечений по А. Вейлю. Ниже дается краткое изложение содержания. Гл. I посвящена изложению предварительных результатов об алгебраических группах. В гл. II доказаны основные общие теоремы об абелевых многообразиях: теорема о коммутативности; теоремы о рациональных отображениях в абелево многообразие; теорема Чжоу; теорема о полной приводимости Пуанкаре — Вейля. Кроме того, определяется многообразие Альбанезе и доказывается теорема существования. В гл. III излагается теорема о квадрате и ее важное следствие: образ отображения группового многообразия в свою группу Пикара есть алгебраическое многообразие. Гл. IV завершает построение многообразия Пикара для абелевых многообразий. В ней также вводятся понятия следа, степени и характеристических корней эндоморфизма. Основное содержание гл. V — формулировка гипотезы Римана для ζ-функций абелевых многообразий над конечным полем и некоторые выводы о структуре кольца эндоморфизмов. В гл. VI строится многообразие Пикара произвольного многообразия и доказывается гипотеза Римана для ζ-функций кривых. Кроме того, излагаются теоремы взаимности и теорема соответствий для произвольных многообразий. Гл. VII посвящена l-адическим представлениям кольца эндоморфизмов. В гл. VIII изучаются алгебраические системы абелевых многообразий и доказываются теоремы Чжоу. Приложение: технические результаты из теории пересечений, дивизориальные соответствия, принцип «качелей».

Ю. И. Манин

10836 К. Введение в алгебраическую геометрию. Ланг (Introduction to algebraic geometry. Lang Serge (Intersci. Tracts Pure and Appl. Math., № 5). New York—London, Interscience, 1958, xii, 260 pp.) (англ.)

Книга является введением в абстрактную алгебраическую геометрию в духе А. Вейля. В ней дано довольно полное, подробное и независимое изложение основных элементарных понятий и предложений теории алгебраических многообразий над полем констант произвольной характеристики, а в последней главе — также теории алгебраических кривых (теорема Римана — Роха и понятие якобиева многообразия). Более глубоких технических вопросов — теории пересечений, координат Чжоу автор не касается. Каждая глава завершена кратким списком литературы по затронутым вопросам. От читателя требуется знание элементарной алгебры до теории Галуа, теоремы Гильберта о базисе и первоначальных сведений о нетеровых кольцах. Краткое содержание книги: Гл. 1. Общая теория точек поля: определение точки поля, кольца оценки; основная теорема о продолжении точки поля; связь с понятием целости, элементы теории продолжения точки при алгебраических расширениях. Гл. 2. Алгебраические многообразия: введение геометрического языка; универсальная область; теоре-

ма Гильберта о нулях; многообразия и идеалы; теория исключения (выводится из теоремы о продолжении точки поля). Гл. 3. Абсолютная теория многообразий: наложение условия регулярности на определение многообразия и связанные с этим элементарные вопросы теории полей; понятие общей точки и поля определения; топология Зариского; циклы и рациональные циклы; формулировка теоремы Чжоу о существовании наименьшего поля определения дивизора (доказательство в гл. 6). Гл. 4. Произведения, проекции и соответствия: определения; теорема о размерности для соответствий; понятие абстрактного многообразия по А. Вейлю Гл. 5. Нормальные многообразия: определения; основная теорема Зариского о бирациональных соответствиях; нормализация проективных и абстрактных многообразий; проективная нормальность. Гл. 6. Дивизоры и линейные системы: дивизоры; график функций; существование функций с заданными нулями; линейные системы и связанные с ними рациональные отображения; доказательство теоремы Чжоу из гл. 3. Гл. 7. Дифференциальные формы: абстрактные дифференцирования, их приложения, связь с сепарабельностью; голоморфные дифференциальные формы; дивизор дифференциальной формы. Гл. 8. Теория простых точек: вспомогательные результаты из локальной алгебры; регулярность локального кольца простой точки; теорема о размерности компонент пересечения на нелинейном объемлющем многообразии; общее гиперплоское сечение. Две последние главы по содержанию несколько выпадают из общего стиля книги. Гл. 9 — Алгебраические группы — содержит определение и несколько первоначальных теорем теории алгебраических групп и абелевых многообразий: коммутативность полного группового многообразия; отображение прямого произведения в абелево многообразие и следствия. Гл. 10 — Теорема Римана — Роха — содержит также теорему Гарнака и краткое описание построения якобиева многообразия. Ю. И. Манин

10837 К. Полные *K*-дуги в проективных дезарговых плоскостях ранга 8 и 16. Лунелли, Ше (*K*-archi completi nei piani proiettivi desarguesiani di rango 8 e 16. Lunelli Lorenzo, Sce Michele. Milano, Politecnico, 1958, 11 p.), Bibliogr. naz. ital., 1958, 73, № 10, 399 (итал.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

10838. Частные производные единичных векторов в криволинейных ортогональных координатах. Бадель-Портуондо (Derivadas parciales de los vectores unitarios en coordenadas curvilineas ortogonales. Badell Portuondo Enrique), Rev. Soc. cubana cienc. fis. y mat., 1955, 3, № 4, 103—108 (исп.)

Простой вывод выражений для $\partial \mathbf{q}_i/\partial q_1$, $\partial \mathbf{q}_i/\partial q_2$, $\partial \mathbf{q}_i/\partial q_3$ ($i = 1, 2, 3$), где $\mathbf{q}_1(q_1, q_2, q_3)$ — единичный вектор касательной кривой: $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ ($\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$ определены аналогично); (q_1, q_2, q_3) — система криволинейных ортогональных координат евклидова пространства. Применение этих выражений для получения дивергенции и ротора векторного поля, лапласиана и других известных формул в криволинейных координатах.

К. С. Сцилард

10839. Векторная кривизна. Ч. III. Шиманский (Krzywizna wektorowa. Cz. III. Linie na powierzchni. Szymański Piotr), Zesz. nauk. Politechn. warsz., 1958, № 35, 11—58 (польск.; рез. русск., франц.)

Ч. I и II см. РЖМат, 1959, 9430.

Излагается новый метод для построения теории кривых и поверхностей в пространстве трех измерений. Вводится понятие векторной кривизны для плоской ориентированной кривой (*C*). Для кривых двоякой кривизны вводится первая и вторая векторные кривизны $\overline{K}, \overline{T}$. Приводятся элементы теории поверхностей как применение новых понятий. А. Н. Матеев

10840. Обыкновенные и особые точки действительных плоских кривых. Лауффер (Reguläre und singuläre Punkte reeller, ebener Kurven. Lauffer R.), Math.-phys. Semesterber., 1959, 6, № 3-4, 337—340 (нем.)

Рассматриваются действительные плоские кривые, не имеющие разрывов и угловых точек. Предполагается, что исследуемая точка кривой некратная и в ее окрестности существует разложимое в ряды Тейлора общее параметрическое представление

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i; \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i. \qquad (1)$$

С помощью параллельного переноса приводят a_0 и b_0 к нулю; поворотом осей и зеркальным отражением добиваются, чтобы для первых отличных от нуля членов разложения (1) выполнялись неравенства $j < k$, $a_j > 0$, $b_k > 0$. Тогда предельное положение касательной при $t \to 0$ совпадает с осью Ox, и для достаточно малых положительных значений параметра t кривая лежит в первом квадранте. Для достаточно малых по модулю отрицательных t имеют: $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign}(-1)^j$; $\operatorname{sign} y = \operatorname{sign}(-1)^k$. Отсюда вытекают следующие случаи: 1) $j \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$, кривая в рассматриваемой окрестности лежит в первом и втором квадрантах; точка (0, 0) называется обыкновенной точкой кривой; 2) $j \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$, обе части кривой лежат в первом квадранте; точка называется клювом кривой; 3) $j \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$, кривая лежит в первом и третьем квадрантах; точка (0, 0) называется точкой перегиба кривой; 4) $j \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$, кривая лежит в первом и четвертом квадрантах; точка (0, 0) называется острием кривой. С помощью кинематического образования кривых (качение нормалей по эволюте) изучается характер соответствующей точки на эволюте для каждого из четырех перечисленных случаев. Например, для обыкновенной точки кривой (0, 0) центр кривизны может быть: а) обыкновенной точкой эволюты, б) несобственной точкой эволюты, имеющей в проективном рассмотрении характер острия, в) острием эволюты, как у эллипса в вершинах. Используя аналитическое выражение для $\rho^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3/(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})^2$ и параметрическое представление (1) кривой, автор выделяет четырнадцать различных видов точек кривой.

В. С. Малаховский

10841. Эквидистантные пары плоских кривых с постоянным угловым смещением. Вундерлих (Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung. Wunderlich W.), Monatsh. Math., 1959, 63, № 3, 271—276 (нем.)

Эквидистантной парой кривых называются кривые трехмерного евклидова пространства, имеющие общую систему нормалей. Рассматривается трубчатая поверхность Φ, у которой линией центров является меридиан k_1 некоторой поверхности вращения постоянной положительной кривизны. Доказывается, что касательная плоскость к поверхности Φ, проходящая через ось поверхности вращения, пересекает трубчатую поверхность Φ по двум кривым k_2 и $\bar{k}_2$, конгруэнтным k_1 и образующим с k_1 по эквидистантной паре кривых каждая, причем k_2 и $\bar{k}_2$ пересекают семейство характеристических кругов поверхности Φ под постоянным углом.

Г. Я. Поплавская

10842. Пара пространственных кривых, связанных метрически. Пончини (Coppie di curve sghembe metricamente coniugate. Poncini Franca), Boll. Unione mat. ital., 1959, 14, № 3, 344—351 (итал.)

Рассматривается пара кривых C и C_1, между которыми установлено точечное соответствие: 1) с паралле-

лизмом пары главных направлений, 2) с сохранением углов, образованных триэдром Френе $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ кривой C с триэдром Френе $(\mathbf{t}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{b}_1)$ кривой C_1. Отмечены ранее известные случаи параллелизма одноименных главных направлений: $\mathbf{t}_1 = \pm t$ (соответствие Комбескюра), $\mathbf{b}_1 = \pm \mathbf{b}$, $\mathbf{n}_1 = \pm \mathbf{n}$. Кроме того, исследованы три случая параллелизма разноименных главных направлений $\mathbf{t}_1 = \pm \mathbf{n}$; $\mathbf{n}_1 = \pm \mathbf{b}$; $\mathbf{b}_1 = \pm \mathbf{t}$ и показано, что оставшиеся случаи параллелизма разноименных главных направлений сводятся к этим трем. Для каждого случая получены условия, связывающие кривизну $1/\rho_1$ и кручение $1/\tau_1$ кривой C_1 с кривизной $1/\rho$ и кручением $1/\tau$ кривой C и функцией $f(s) = ds_1/ds$. Установлено, что эти условия являются характеристическими для соответствия рассматриваемого типа. При исследовании соответствия с сохранением углов между ортами триэдров Френе исключаются уже рассмотренные случаи параллелизма главных направлений. Показано, что $\rho/\tau = \text{const}$, $\rho_1/\tau_1 = \text{const}$, т. е. C и C_1 являются цилиндрическими винтовыми линиями. Все углы Эйлера, образованные триэдрами $(\mathbf{t}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{b}_1)$ и $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ являются постоянными.

В. С. Малаховский

10843. О замкнутых фигурах из кривых, связанных асимптотическим преобразованием, и из поверхностей, связанных преобразованием W. Барнер, Деген (Über sich schließende Figuren asymptotisch transformierter Kurven und W-transformierter Flächen. Barner Martin, Degen Wendelin), Math. Z., 1959, **71**, № 4, 361—379 (нем.)

Две кривые, между которыми установлено точечное соответствие и которые являются асимптотическими линиями порожденной ими линейчатой поверхности, называются асимптотическими преобразованиями одна другой. Соприкасающиеся плоскости таких кривых в соответствующих точках пересекаются по прямой, соединяющей эти точки. В тесной связи с такого рода кривыми находятся поверхности, связанные преобразованием W: на фокальных поверхностях системы конгруэнций W асимптотические линии обоих семейств образуют асимптотические преобразования друг друга. Известно, что к заданной кривой всегда можно построить кривую, связанную с данной асимптотическим преобразованием. Может ли фигура, полученная последовательным продолжением такого построения, замкнуться в n-угольник?

В реферируемой работе авторы ищут однопараметрические семейства n-угольников таких, что любые две соседние вершины n-угольника описывают кривые, связанные асимптотическим преобразованием друг с другом. Существование четырехугольников такого рода доказано Терračини. Для общего случая n-угольника в работе указываются примеры двух типов. Один тип составляют системы кривых, каждая из которых является кривой некоторого линейного комплекса; произвол существования такого рода систем кривых равен $n - 1$ функций одного аргумента. В другой тип входят системы кривых, являющихся траекториями проективного сдвига (РЖМат, 1954, 3065); произвол существования таких систем кривых равен четырем функциям одного аргумента. Если подвижным базисом проективного сдвига сделать систему кривых комплекса, то возникает замкнутая система из n поверхностей. Любые две соседние поверхности этой системы являются фокальными поверхностями конгруэнции, соединяющей соответствующие точки этих поверхностей. Все такие конгруэнции являются конгруэнциями W. Кривые комплекса и траектории сдвига служат асимптотическими линиями этих поверхностей. Построенные поверхности являются поверхностями комплекса (РЖМат, 1954, 3065). Особо изучается случай $n = 5$. Здесь как оба указанных типа систем кривых, так и построенные системы поверхностей образуют единственно возможные системы замкнутых фигур из кривых, связанных асимптотическим преобразованием, и из поверхностей, связанных преобразованием W. В конце работы изучаются специальные виды замкнутых пятиугольников и указывается ряд вопросов, которые авторы считают открытыми.

В. В. Гольдберг

10844. Аффинная дифференциальная геометрия плоских кривых. Михэйлеску (Géométrie différentielle affine des courbes planes. Mihăilescu Tiberiu), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 2, 265—288 (франц.; рез. русск.)

Используя метод Картана, автор строит канонический репер плоской кривой (C) в геометрии полной шестичленной аффинной группы. Уравнения движения репера имеют вид:

$$dM = ds\,e_1,\ de_1 = (ce_1 \cdot \varepsilon + e_2)\,ds,\ de_2 = -\varepsilon\,(e_1 + 2ce_2)\,ds, \quad (1)$$

где ds — аффинная длина дуги, c — аффинная кривизна, e_1 — вектор касательной к кривой, e_2 — вектор аффинной нормали. $\varepsilon = 1$, если соприкасающаяся кривая второго порядка, имеющая с кривой C в точке M касание 4-го порядка, является эллипсом, $\varepsilon = -1$, если она есть гипербола. Случай соприкасающейся параболы из рассмотрения исключается. Находится геометрический смысл инвариантов ds, c и инварианта cds, называемого формой аффинной кривизны. Уравнения (1) интегрируются, а решения их исследуются в случае $c = \text{const}$. Отмечаются признаки сходства между аффинными кривыми постоянной кривизны и окружностью. Находится, в частности, некоторый аналог центра окружности (при этом утверждается, что такой „центр" могут иметь только кривые постоянной кривизны; из уравнения (79) этот вывод, вопреки утверждению автора, не вполне очевиден). Если на соприкасающейся параболе кривой C взять какую-нибудь точку, внутренне связанную с самой кривой, то при изменении s эта точка будет описывать некоторую кривую Г. Эта кривая называется разверткой (développante) Картана, если касательная к ней параллельна касательной к C в соответствующей точке. Такие развертки образуют однопараметрическое семейство. Три произвольные развертки образуют аффинный глобальный инвариант (не зависящий от s). Этот инвариант может быть перенесен на три точки кривой C, в которых эти развертки пересекают последнюю. Центр соприкасающейся коники кривой C есть центр аффинной кривизны. Он описывает огибающую (C_1), семейства аффинных нормалей кривой C. Аффинная нормаль этой огибающей, в отличие от метрического случая, параллельна касательной к C только в случае $c = 1/(a - 3\varepsilon s)$ $(a = \text{const})$. В этом случае $ds_1 = \varepsilon\,ds$, $c_1 = \varepsilon\,c$. Если на аффинных нормалях кривой C отложить произвольные отрезки, то концы их описывают кривые P. Эти кривые аффинно параллельны C, если касательные к ним параллельны касательным к C. Аффинные нормали кривых P совпадают с аффинными нормалями кривой C тогда и только тогда, когда C есть центральная кривая 2-го порядка. В этом случае P — концентрические гомотетичные ей кривые.

Н. И. Кованцов

10845. Развертывающиеся поверхности, допускающие бесконечное множество кривых Бертрана в качестве геодезических. Пиларинос (Surfaces développables admettant une infinité de courbes de Bertrand comme lignes géodésiques. Pylarinos M. O.), Bull. sci. math., 1959, **83**, № 2, 45—64 (франц.)

Детальный анализ автора с варьированием отдельных предположений опирается на формулы:

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \nu\{-\sigma(s)\,\mathbf{t}(s) + \varkappa(s)\,\mathbf{b}(s)\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{R}(s)$ — радиус-вектор точки развертывающейся поверхности D, спрямляющей для всех своих непрямых геодезических, $\mathbf{r}(s)$ — радиус-вектор точки одной из спрямляемых геодезических c, s — ее дуга, $\varkappa(s)$, $\sigma(s)$ — кривизна и кручение, $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ — единичные векторы ка-

сательной и бинормали. При $\nu=(s+\beta)/\alpha\varkappa(s)+\sigma(s)$ уравнение (1) превращается в уравнение семейства геодезических линий на развертывающейся D. Действительным и конечным значениям параметров α и β соответствуют геодезические линии, кривизна $\chi'(s)$ и кручение $\sigma'(s)$ каждой из которых удовлетворяют соотношениям:

$$(1+\alpha^2)\varkappa'(s)\,(d(\nu\varkappa)/ds)=\alpha\varkappa+\sigma,\ (1+\alpha^2)\sigma'(s)\,(d(\nu\varkappa)/ds)=\alpha\sigma-\varkappa.$$

Присоединяя требования, чтобы геодезическая c и еще две различных геодезических c' и c'' семейства (1) были кривыми B (Бертрана), автор приходит к необходимому условию того, что развертывающаяся поверхность содержит по меньшей мере три геодезических B: кривизна и кручение каждой из них должны быть дробно-линейными функциями с общим знаменателем от дуги s кривой c или от такого другого параметра, что производная по нему от дуги также является дробно-линейной или линейной функцией. Условие недостаточно. Действительно: коническая поверхность содержит только одну геодезическую B, кривизна и кручение которой функции от дуги либо дробно-линейные, либо линейные. Зато спрямляющая (не конус) кривой c, у которой кривизна и кручение — дробно-линейные функции с общим знаменателем от дуги s, допускает однопараметрическое семейство геодезических B с теми же свойствами кривизны и кручения. Если же у спрямляемой кривой c кривизна и кручение — линейные функции ее дуги, то поверхность D допускает два однопараметрических семейства геодезических B. В одном из семейств кривизна и кручение геодезических B — линейные функции дуги s, в другом кривизна и кручение — дробно-линейные функции с общим знаменателем от такого параметра, что производная по нему от s — линейная функция того же параметра.

В заключение автор устанавливает аналогичные свойства для кривых B, «ассоциированных» геодезическим B на развертывающейся D. К. Н. Тихоцкий

10846. Развертывающиеся поверхности, связанные аффинным способом с пространственной кривой. Черепн-де-Губер (Superficies desarrollables ligadas de manera afin con una curva del espacio. Cherep de Guber Rebeca), Publs Fac. cienc. fisicomat. Univ. nac. La Plata, 1957, 5, № 4, 301—308 (исп.; рез. англ.)

Рассматриваются развертывающиеся поверхности 3-мерного аффинного пространства, прямолинейные образующие которых находятся в соответствии с точками кривой того же пространства и особым образом расположены по отношению к векторам касательной, главной аффинной нормали и аффинной бинормали в соответственной точке кривой, нормированным условием равенства единице внешнего произведения. Изучаются специальные случаи развертывающихся поверхностей указанного вида. Б. А. Розенфельд

10847. Кривые Цицейка в проективной геометрии. Георгиу (Les courbes Tzitzéica dans la géométrie projective. Cheorghiu Gh. Th.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, 1, № 2, 133—150 (франц.)

Поверхностями Цицейка называются поверхности, для которых отношение $K:d^4$ постоянно (K — метрическая кривизна и d — расстояние от начала до касательной плоскости в соответствующей точке). Асимптотические линии поверхности Цицейка являются кривыми Цицейка. В § 1, следуя Санниа (Sannia G., Atti Accad. sci. Torino, 1921, 57), автор устанавливает ряд ковариантных производных. В § 2 изучает элементы унимодулярной аффинной геометрии пространственных кривых и строит аффинные инварианты кривой (аффинную дугу, аффинные кривизну и кручение). В этом же параграфе автор вводит понятие о кривых Цицейка второго рода. В § 3 рассматривается проективная геометрия пространственных кривых. В § 4 выводятся формулы, которые выражают проективные элементы с помощью аффинных элементов. В § 5 исследуются кривые Цицейка первого рода (T). Необходимым и достаточным условием того, чтобы кривая была бы кривой Цицейка (T), является равенство нулю проективного кручения. Для кривых Цицейка (T) совпадают проективная и аффинная спрямляющие плоскости. Для кривых Цицейка первого рода (T) проективные и аффинные дуги пропорциональны. М. П. Черняев

10848. Некоторые замечания о поверхностях Годо и Демулена и об одном классе поверхностей, отмеченном Бомпиани. Маркус (Quelques observations sur les surfaces de Godeaux et Demoulin, et sur une classe de surfaces signalée par Bompiani. Marcus F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1959, 45, № 5, 462—469 (франц.)

Вычислив (в терминах репера Фубини) проективную длину дуги асимптотической линии, рассматриваемой как пространственная кривая, автор замечает, что у поверхностей, характеризуемых совпадением одной пары прямых Демулена, проективные длины дуг одного из семейств асимптотических линий, заключенных между двумя линиями другого семейства, равны. При совпадении обеих пар прямых Демулена оба семейства асимптотических линий обладают указанным свойством. Далее определяются все проективно-минимальные поверхности, обладающие рассматриваемым свойством. Поверхности $\beta(\ln\beta)\gamma_{uu}-\beta^2\gamma=V(v)$, отмеченные Бомпиани в дополнении к известному трактату Фубини — Чеха, могут быть характеризованы как обобщение первого класса, так как в этом случае соответствующие проективные длины дуг пропорциональны. Р. Н. Щербаков

10849. Несколько свойств поверхностей Цицейка. Николеску (Câteva proprietăţi ale suprafeţelor Ţiţeica. Nicolescu Al.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 9, 1065—1071 (рум.; рез. русск., франц.)

Г. Цицейка рассматривал кривые и поверхности (S) (поверхности Цицейка), для которых выражения Td^2, K/d^4 и $T\cos^2\Theta$, $K/\cos^4\Theta$ являются соответственно инвариантами центро-аффинной и аффинно-параболической групп (T—кручение, K — полная кривизна, d — расстояние от начала координат до соприкасающейся или касательной плоскости).

Продолжая исследования Цицейка, автор получает следующие результаты. Поверхности (Σ), асимптотические развертывающиеся линейчатых поверхностей которых (см., например, РЖМат, 1960, 6911) являются цилиндрами, аффинно наложимы на плоскость и принадлежат к классу аффинных сфер. Поверхности (Σ_1), аффинные нормали которых параллельны фиксированному направлению, аффинно наложимы на плоскость, т. е. принадлежат к классу поверхностей (Σ) и характеризуются метрическим инвариантом $K/\cos^4\Theta=\text{const}$. Г. Ф. Лаптев

10850. О теории поверхностей в трехмерном аксиальном пространстве. Папук (Sur la théorie des surfaces d'un espace axial à 3 dimensions. Papuc Dan I.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1958, Sec. 1, 4, № 2, 49—80 (франц.; рез. рум., русск.)

Находятся геометрические объекты, определяющие поверхность в 3-мерном аксиальном пространстве (3-мерном проективном пространстве с выделенной парой скрещивающихся прямых — осей) с точностью до аксиального преобразования (коллинеации, переводящей в себя оси). Определяется аксиальный линейный элемент и доказывается ряд теорем об аксиальной наложимости поверхностей. Б. А. Розенфельд

10851. Проективные теоремы типа Гаусса—Боннэ. Михэйлеску (Théorèmes projectifs du type Gauss

Bonnet. Mihăilescu Tiberiu), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 1, 63—86 (франц.)

Обобщается для случая проективной дифференциальной геометрии формула глобального характера Гаусса-Бонне, известная в метрической дифференциальной геометрии и получаемая из соотношения вида:

$$\int_{(C)} \Omega = \iint_{(\Delta)} D\Omega, \qquad (1)$$

где (Δ) — односвязная область поверхности (S) трехмерного пространства, (C) — граница области (Δ), образованная замкнутой непрерывной кривой без особых точек, Ω — пфаффова форма проективно-инвариантная присоединенная внутренним образом к точкам области (Δ), D — символ внешнего дифференцирования.

Автор отмечает, что Макото Кимпара построил форму Ω, удовлетворяющую уравнению (1), но геометрическая интерпретация, которую он дает для формы Ω, страдает отсутствием строгости. Используя метод подвижного репера, автор ставит перед собой цель построить проективно-инвариантные формы Ω, внутренним образом присоединенные к поверхностям (S) и удовлетворяющие соотношению типа (1).

В первой части методом подвижного репера изложены общие результаты теории поверхностей (РЖМат, 1960, 2259). Вводится семейство асимптотических реперов (R_8), инварианты Бомпиани φ_1 и φ_2 относительно репера (R_8), затем путем специализации семейства реперов (R_8) получается новое семейство реперов (R_3) и вводятся другие два дифференциальных инварианта ψ_1 и ψ_2.

Во второй части определяется порядок q пфаффовой формы инвариантной относительно семейства реперов (R_p) $(p \leqslant 8)$. Используя инварианты φ_1 и φ_2, автор вводит инвариантные формы третьего порядка, формы четвертого порядка, формы пятого порядка, выражающиеся через формы ω_{30}, ω_{31}, ω_{32}, входящие в формулы инфинитезимальных смещений репера (R_8). Случай Кимпара соответствует инвариантной форме пятого порядка.

Автор дает геометрическую интерпретацию инвариантных форм, полученных введением понятия стабильной инвариантной формы, определяет поверхности стабильности для каждой инвариантной формы. Придавая частные значения константам, входящим в эти формы, автор выделяет специальные классы поверхностей, находит геометрическую характеристику их и указывает широту каждого класса, исследуя системы внешних дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют. I. P. Elianu

10852. О плетениях конгруэнтных поверхностей. Шварц (Über Geflechte kongruenter Flächen. Schwarz Ernst), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1958, München, 1958, 81—109 (нем.)

Автор отображает плоскости, точнее куски плоскостей, некоторой ограниченной области $\mathfrak{R}$ трехмерного евклидова пространства в поверхности, принадлежащие аналогичной области $\mathfrak{Z}$. Введем прямоугольные координаты точки (u_1, u_2, u_3) в области $\mathfrak{R}$, (x_1, x_2, x_3) — в области $\mathfrak{Z}$. Соответствие между точками U-пространства и X-пространства при отображении предполагается взаимно однозначным и непрерывным. Параметрические поверхности в области $\mathfrak{Z}$ пространства — X-отображения плоскостей $u_i = \text{const}$ из U-пространства — имеют свойства: в каждой точке происходит пересечение трех параметрических поверхностей различных семейств, поверхности одного семейства не пересекаются. Однопараметрическая система поверхностей получается при отображении всех плоскостей, параллельных некоторой неподвижной плоскости, а двупараметрическая система — при отображении плоскостей, параллельных одной неподвижной прямой. Плетение поверхностей — это отображение в $\mathfrak{Z}$ всех плоскостей $\mathfrak{R}$, при котором все параллельные между собой плоскости $\mathfrak{R}$ переходят в одинаковые поверхности $\mathfrak{Z}$, сдвинутые одна относительно другой в направлении, общем для всех однопараметрических систем, согласно автору в направлении оси x_1. В частности, все параметрические поверхности одного семейства определяются уравнениями: $x_1 + f_i(x_2, x_3) = 0$ $(i=1, 2, 3)$, где f_i задаются. Отсюда зависимость между U-пространством и X-пространством должна иметь вид: $u_i = F_i(x_1 + f_i(x_2, x_3))$ $(i=1, 2, 3)$. Для полного построения плетения поверхностей оказывается достаточно обеспечить переход еще какого-нибудь четвертого пучка параллельных плоскостей в однопараметрическую систему поверхностей. Возьмем плоскость $\sum_{i=1}^{3} u_i \cos\lambda_i = U_4$ и положим $\cos\lambda_i = 1/\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\, u_1 = F_4(x_1 + f_4(x_2, x_3))$. Должно выполняться функциональное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{3} F_i(x_1 + f_i(x_2, x_3)) \equiv F_4(x_1 + f_4(x_2, x_3)). \qquad (1)$$

Функции f_i, F_i подчиняются некоторым ограничениям. Отправляясь от уравнения (1), автор приходит к двум видам плетения поверхностей:

А. Логарифмическое плетение. $\ln u_i = x_1 + f_i(x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $f_4 \equiv \ln\left(\sum_{i=1}^{3} e^{f_i(x_2, x_3)} \cos\lambda_i\right)$.

Б. Линейное плетение. $u_i = x_1 + f_i(x_2, x_3)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, $u_4 = [x_1 + f_4(x_2, x_3)] \sum_{i=1}^{3} \cos\lambda_i$, $f_4 \equiv \sum_{i=1}^{3} f_i(x_2, x_3) \times \cos\lambda_i / \sum_{i=1}^{3} \cos\lambda_i$.

Значительная часть статьи отведена изучению плетений двух типов: плетений, содержащих хотя бы одну двупараметрическую систему поверхностей и плетений, состоящих только из одинаковых поверхностей.

К. Н. Тихоцкий

10853. О кинематике афинно-изменяющихся плоских систем. Пельцер (Über die Kinematik affin-veränderlicher ebener Systeme. Pelzer Werner), Colloct. math., 1959, 11, № 1, 13—47 (нем.)

Аффинно-изменяющейся называется плоская система все фазы которой (в процессе непрерывного изменения между собой аффинны. Рассматриваются две совмещенные плоскости: неподвижная, с прямоугольной равномасштабной системой координат, и подвижная с аффинной системой, базис которой изменяется во времени.

Радиус-вектор точки, принадлежащей обеим плоскостям: $\mathbf{y}(t)$ — в неподвижной системе и $\mathbf{x}$ — с фиксированными компонентами в подвижной, удовлетворяют соотношению $\mathbf{y} = \mathbf{a} + B\mathbf{x}$, где вектор $\mathbf{a}$ и неособая матрица B — функции времени; если B — матрица поворота, имеем обычную кинематику. Точки, где $\mathbf{y}' = 0$, $\mathbf{y}'' = 0$, называются полюсами соответственно скорости и ускорения.

В 35 теоремах приводятся многочисленные свойства полюсов, возникающих в различных случаях движения, кривых и пучков кривых второго порядка, двойных кривых, огибающих и их особых точек. А. А. Гаршнек

10854. О проективно-изгибаемых плоских системах (G). Терраччини (Sui sistemi piani (G) proiettivamente deformabili. Terracini Alessandro), Boll. Unione mat. ital., 1959, 14, № 3, 376—385 (итал.; рез. англ.)

Системой (G) называется совокупность интегральных кривых уравнения $y''' = G(x, y, y')\, y'' + H(x, y, y')\, y''^2$, где x и y — проективные неоднородные (в частности декартовы) координаты точки плоскости. В числе специальных систем (G) изучались: а) системы (G) динамического типа, образованные траекториями силового поля, в) системы, получаемые проектированием из неподвижной точки ∞^3 плоских сечений некоторой поверхности, с) системы кривизны, т. е. получаемые из ∞^2 линий плоскости добавлением кривых, имеющих кри-

визну, находящуюся в постоянном отношении к кривизне линии исходной двухпараметрической системы, имеющей с ней общую точку и направление, d) проективно изгибаемые первого рода с произволом ∞^1. Ранее были найдены системы *ab* (т. е. одновременно типов *a* и *b*), *ac*, *bc*, *ad*. В реферируемой работе находятся системы *bd* и *cd*. Такие системы оказываются тождественны системам *ab* (получаются проектированием плоских сечений конуса или цилиндра). Они характеризуются своими свойствами внутри каждого из классов *a*, *b*, *c*, *d*.

В. В. Рыжков

10855. Об одном представлении окружностей и сфер обыкновенного пространства в евклидовом пространстве четырех измерений. Винченсини (Sur une représentation des cercles et des sphères de l' espace ordinaire sur l' espace euclidien à quatre dimensions. Vincensini Paul), Boll. Unione mat. ital., 1959, 14, № 3, 338—344 (франц.; рез. итал.)

Свойства трактуемого представления автор имеет в виду применить в другой своей работе. Пусть евклидово трехмерное пространство E_3 погружено в евклидово четырехмерное пространство E_4, отнесенное к ортогональному 4-эдру $Ox_1x_2x_3x_4$ так, что E_3 является гиперплоскостью $x_4 = 0$. Берется точка F на оси Ox_4 и на расстоянии $\overline{OF} = p$, и каждой сфере $\sum$ в E_3 с центром ω радиуса R ставится в соответствие точка I в E_4 центр гиперсферы $(F, \sum)$, проходящей через $\sum$ и F. Точка I — отображение сферы $\sum$ в E_4 находится на перпендикуляре из ω к E_3, причем $\overline{\omega I}^2 + R^2 = \overline{IF}^2$. Обратно: всякая точка I в E_4 является отображением некоторой сферы $\sum$ в E_3 действительной или мнимой. Сферы в E_3 нулевого радиуса отображаются в точки гипергиперболоида вращения (P), у которого F служит фокусом и E_3 — направляющей гиперплоскостью. Можно убедиться в том, что угол между двумя сферами с точностью до постоянного множителя равен логарифму двойного отношения точек, отображающих сферы, и точек пересечения с (P) прямой их соединяющей. Отсюда вытекает, что отображения двух ортогональных сфер гармонически сопряжены относительно (P), отображения двух касательных сфер лежат на касательной к (P). Плоскость (π) в E_3, как сфера бесконечно большого радиуса, отображается в центр гиперсферы (F, π), лежащий в бесконечно удаленной гиперплоскости H_∞ на нормали к (F, π). Отображения плоскостей (π), проходящих через данную точку, в E_3, расположены на плоскости, принадлежащей H_∞. Такую корреляцию плоскостей и точек E_3 и точек и плоскостей H_∞ автор называет T. Автор останавливается на свойствах отображений перпендикулярных плоскостей, изотропной плоскости. Возьмем пучок (Φ) сфер в E_3, пересекающихся по некоторой окружности C. (Φ) — пересечение с E_3 пучка (Ψ) гиперсфер в E_4, проходящих через гиперсферу (F, C). Геометрическое место центров гиперсфер пучка (Ψ) — прямая D находится во взаимно однозначном соответствии с окружностью C. Отображение C прямая D пересекает (P) в точках отображения сфер нулевого радиуса пучка (Φ). D касается (P), если (Φ) состоит из касающихся между собой сфер. Отображения ∞^3 окружностей одной сферы суть прямые связки с центром I. Согласно корреляции T прямая d в E_3 своим отображением в E_4 имеет прямую δ пересечения плоскости (F, d) с H_∞. Рассматриваются отображения ортогональных окружностей, окружностей, пересекающихся в двух данных точках, касающихся окружностей, окружностей, преобразующихся изотропно, окружностей на плоскостях, касательных к данной поверхности S в E_3, окружностей, перпендикулярных к S.

К. Н. Тихоцкий

10856. Применение дуальных кватернионов к кинематике. Бляшке (Anwendung dualer Quaternionen auf Kinematik. Blaschke Wilhelm. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar., A1, № 250/3, 13 S.) (нем.)

Рассматривается перенесение Котельникова — Штуди, при котором ориентированные прямые 3-мерного евклидова пространства изображаются точками сферы единичного радиуса в 3-мерном дуальном евклидовом пространстве и связанное с этим перенесением двузначное представление группы движений евклидова пространства (изоморфной группе вращений дуального евклидова пространства) группой дуальных кватернионов единичного модуля. Наряду с известным представлением движений прямых (если прямой с единичным направляющим вектором $\mathbf{r}$ и моментом $\mathbf{r} = \mathbf{x} \times \mathbf{r}$ относительно полюса ставится в соответствие дуальной вектор $\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{r}$ единичного модуля, то движение, представляемое дуальным кватернионом $\underline{Q}$, переводит эту прямую в прямую, соответствующую дуальному вектору $\underline{\mathbf{r}}' = \underline{\widetilde{Q}}\underline{\mathbf{r}}\underline{Q}$, где $\underline{\widetilde{Q}}$ — дуальный кватернион, кватернионно сопряженный с $\underline{Q}$) находятся аналогичные представления движений точек и плоскостей: если точке с радиусом-вектором $\mathbf{x}$ ставится в соответствие дуальный кватернион $\underline{X} = 1 + \varepsilon\mathbf{x}$, а плоскости с единичным нормальным вектором $\mathbf{u}$ и уравнением $u_0 + (\mathbf{ux}) = 0$ ставится в соответствие дуальный кватернион $\underline{U} = \varepsilon u_0 + \mathbf{u}$, то движение, представляемое дуальным кватернионом $\underline{Q}$, переводит эти точку и плоскость в точку и плоскость, соответствующие дуальным кватернионам $\underline{X}' = \underline{\widetilde{Q}}\underline{X}\underline{Q}_\varepsilon$ и $\underline{U}' = \underline{\widetilde{Q}}_\varepsilon \underline{U}\underline{Q}$, где $\underline{Q}_\varepsilon$ — дуальный кватернион, дуально сопряженный с $\underline{Q}$.

Б. А. Розенфельд

10857 K. Дифференциальная геометрия. Крейсиг (Differential geometry. Kreyszig Erwin. Toronto, Toronto Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1959, XV, 352 pp., ill., maps, 48 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 501, 9 (англ.)

10858 K. Дифференциальная геометрия. Т. 3. Теория изгибания поверхностей. Штрубеккер (Differentialgeometrie. Bd. 3. Theorie d. Flächenkrümmung. Strubecker Karl. Berlin, de Gruyter, 1959, 254 S., ill., 5.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 42, 3146 (нем.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

10859. К теории геометрических объектов. VI. Одномерные дифференциально-геометрические объекты с одной компонентой, значения которых принадлежат произвольным множествам, в частности двум отрезкам. Ацел (Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. VI. Eindimensionale differentialgeometrische Objekte mit einer Komponente, deren Werte in beliebigen Mengen, insbesondere in zwei Intervallen liegen. Aczél J.), Acta math. Acad. scient. hung., 1959, 10, № 1-2, 1—12 (нем.; рез. русск.)

Методом, применявшимся автором в предыдущих работах (РЖМат, 1958, 676), доказываются:

Теорема 2. Все одномерные дифференциально-геометрические объекты с одной компонентой точно второго класса с непрерывными уравнениями преобразования компонент, значения которых заполняют один интервал, эквивалентны объекту $\bar{z} = (z/\alpha_1) + (\alpha_2/\alpha_1^2)$ ($z \in (-\infty, \infty)$), который, в свою очередь, эквивалентен объекту $\bar{y} = y^{1/\alpha_1} e^{\alpha_2/\alpha_1^2}$ ($y \in (0, \infty)$), а объекты, значения которых заполняют два интервала, эквивалентны объект

$\bar{y} = |y|^{1/\alpha_1} e^{\alpha_2/\alpha_1^2} \operatorname{sg}(y\alpha_1)\ (y \in (-\infty, 0) + (0, \infty))$.

Теорема 3b. Все одномерные дифференциально-геометрические объекты с одной компонентой точно третьего класса с непрерывными уравнениями преобразования компонент, значения которых заполняют один интервал, эквивалентны объекту $\bar{z} = \frac{z}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$ $(z \in (-\infty, \infty))$, который, в свою очередь, эквивалентен объекту $\bar{y} = |y|^{1/\alpha_1^3} e^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} - \frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_1^4}}$ $(y \in (0, \infty))$, а объекты, значения которых заполняют два интервала, эквивалентны объекту $\bar{y} = |y|^{1/\alpha_1^3} e^{\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_1^4}} \operatorname{sg}(y\alpha_1)\ (y \neq 0)$.

Примечание референта. Эти результаты другим методом были ранее получены референтом (РЖМат, 1956, 8316), что, по-видимому, не известно автору.

Ю. Е. Пензов

10860. Замечание к предыдущей работе о кручении. Нотрот (Note on a previous paper on torsion. Nottrot R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60**, № 2, 159—161; Indagationes math., 1957, **19**, № 2, 159—161 (англ.)

В предыдущей статье (РЖМат, 1957, 8235) понятия кривизны и кручения обобщались на случай кривой в абстрактном метрическом пространстве. В частности, кручение кривой C в данной точке p_0 определялось формулой $\tau = {}^3/_4 \varkappa \rho$, где $\varkappa$ и ρ — метрические кривизны самой кривой C и кривой C' в пространстве касательных в p_0 (к всевозможным сегментам $S(p_0, q), q \in C$). Это определение для случая кривой в римановом пространстве согласуется с классическим. Доказывается, что

$$\tau^2 = \lim_{p_i \to p_0} 18\, D(p_0, p_1, p_2, p_3) : [\sqrt{D(p_0, p_1, p_2)} \times \sqrt{D(p_0, p_1, p_3) D(p_0, p_2, p_3) D(p_1, p_2, p_3)}\,]\ (i = 1, 2, 3),$$

где $D(p_0, p_1, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (p_0p_0)^2 & \ldots & (p_0p_n)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (p_np_0)^2 & \ldots & (p_np_n)^2 \end{vmatrix}$ $((p_ip_j)$ — расстояние между точками p_i и $p_j)$. Отмечается, что такое определение кручения равносильно определению Блюменталя (РЖМат, 1954, 4577). Величина τ сравнивается с

$$t = \lim_{p_i \to p_0} ((p_2p_3)/(p_0p_3)) \sqrt{18 |D(p_0, p_1, p_2, p_3)|} D(p_0, p_1, p_2)|^{-3/2} \times D(p_1, p_2, p_3)^{3/2}$$

— определением кручения по Алексичу (Egervary E., Alexits G., Comment. math. helv., 1941, **13**, Fasc. 4, 257 — 276). На примере окружности на обычной сфере показывается, что, вообще говоря, $t \neq \tau$, так что определение Алексича не согласуется с классическим.

А. С. Солодовников

10861. λ-сопряженность тройки направлений на p-мерных многообразиях в n-мерном проективном пространстве. Трушин Г. И., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 1, 37—39

Условие обычной сопряженности двух направлений d_1, d_2 на поверхности имеет, как известно, вид $B^\alpha_{ij}\, \omega^i(d_1)\, \omega^j(d_2) = 0$. В работе вводится понятие λ-сопряженности трех направлений d_1, d_2, d_3 условием $B^\lambda_{ijk}\, \omega^i(d_1)\, \omega^j(d_2)\, \omega^k(d_3) = 0$, где B^α_{ij}, B^λ_{ijk} — фундаментальный объект третьего порядка поверхности. Направление поля (d_1) при смещении точки M поверхности в направлении d_2 инфинитезимально не выходит из направления $P^{(12)}$, натянутого на касательную плоскость поверхности и на точку $B^\alpha_{ij}\, \omega^i(d_1)\, \omega^j(d_2) M_\alpha$. Направления d_1, d_2, d_3 оказываются λ-сопряженными тогда и только тогда, если $P^{(12)}$ при смещении точки M в направлении d_3 инфинитезимально не выходит из 1-го соприкасающегося пространства. Не на всякой поверхности существуют λ-сопряженные направления. В работе сообщается, что трехмерная поверхность, обладающая неособой сетью из трех семейств линий с λ-сопряженными направлениями при $n \geqslant 18$, существует с произволом 12 функций 3 аргументов и в общем случае не расслаивается по этим семействам.

Ю. Г. Лумисте

10862. О гипервыпуклости в римановых многообразиях. Нейенхёйс (A note on hyperconvexity in Riemannian manifolds. Nijenhuis Albert), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 4, 576—582 (англ.)

Пусть V — выпуклое открытое множество риманова многообразия M, γ — положительное число $\leqslant 1$, y_1, z_1, y_2, z_2 — точки V; пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$ обозначают геодезические сегменты y_1z_1, y_2z_2, параметризованные пропорционально длине дуги, $t \in [0, 1]$, $f_t(0) = y_t$, $f_t(1) = z_t$ $(t = 1, 2)$; V называется γ-гипервыпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ и любых геодезических сегментов y_1z_1, y_2z_2 в V из неравенств $\rho(y_1, y_2) < \varepsilon$, $\rho(z_1, z_2) < \varepsilon$ следует, что расстояние между соответствующими точками $f_1(t)$ и $f_2(t)$ геодезических сегментов y_1z_1, y_2z_2 меньше ε. (Под расстоянием $\rho(x, y)$ между точками x и y понимается наибольшая нижняя граница длин спрямляемых траекторий, соединяющих x и y). Максимумом кривизны $k(A)$ подмножества $A \subset M$ называется наименьшая верхняя граница значений кривизны риманова пространства M для всевозможных двунаправлений во всех точках A. Основной результат статьи:

Теорема II. Если максимум кривизны $k = k(V)$ выпуклого открытого множества V в M неотрицателен: $k \leqslant 0$, то V 1-гипервыпукло. Если $k > 0$ и если диаметр $D = D(V)$ такой, что $kD^2 < \pi^2/4$, то V γ-гипервыпукло, где $\gamma = \cos D\, k^{1/2}$. Отсюда получается теорема I: Каждая точка риманова многообразия имеет ${}^1/_2$-гипервыпуклую окрестность.

Ю. Е. Пензов

10863. Исключительные точки на кривых в римановых пространствах. Витнер (Výjimečné body na křivkách v Riemannových prostorech. Vitner Čestmír), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 4, 433—453 (чешск.; рез. русск., нем.)

Исследуются исключительные точки аналитической кривой $M(t)$ риманова n-мерного пространства, т. е. точки, в которых абсолютные производные $\frac{DM}{dt}, \frac{D^2M}{dt^2}, \ldots, \frac{D^nM}{dt^n}$ линейно зависимы. Если символом $M_0^{(\alpha_1)}$ обозначим кратко первую отличную от нуля абсолютную производную в исключительной точке $M(t_0)$, если аналогично $M_0^{(\alpha_2)}$ обозначает следующую абсолютную производную, не зависящую линейно от $M_0^{(\alpha_1)}$, и если $M_0^{(\alpha_3)}$ обозначает дальнейшую абсолютную производную, не зависящую линейно от пары $M_0^{(\alpha_1)}$, $M_0^{(\alpha_2)}$, и т. д., то можно определить базис $M_0^{(\alpha_1)}, M_0^{(\alpha_2)}, \ldots, M_0^{(\alpha_n)}$ и при помощи него совокупность n нормалей $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и кривизны $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ в точке $M(t_0)$.

Автор обобщает таким образом результаты работы Бляшке (Math. Z., 1920, 2). В дальнейшем приводятся обобщенные формулы Френе для исключительных точек со всеми конечными кривизнами, и определяются два первых ненулевых члена разложений в ряд кривой в окрестности исключительной точки по степеням величины $\sigma = s^{1/\alpha_1}$, где s — дуга. Из дальнейшего заслуживает внимания формула для k-й кривизны $(k = 1, 2, \ldots, n)$ $\varkappa_k = \lim_{s \to s_0} (\omega_k/(s - s_0))$, где ω_k — угол k-го соприкасающегося пространства (с базисом $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}\}$) в точке $M(s_0)$ с нормалью $\mathbf{e}_{k-1}$ в точке $M(s)$.

J. Klapka

10864. Различные заметки по римановой геометрии. Хуан Чжэн-чжун (Miscellaneous notes on riemannian geometry. Hwang Cheng-chung), Tensor, 1959, 9, № 2, 99—103 (англ.)

Передоказаны и уточнены некоторые известные ранее теоремы римановой геометрии. А. С. Феденко

10865. Явная формула инфинитезимальной связности для непрерывного представления $GL(n, R)$. Лу Цицзянь (Explicit formula of the infinitesimal connection for a continuous representation of $GL(n, R)$. Look K. H.), Sci. Rec., 1959, 3, № 7, 295—300 (англ.)

Пусть V_n — n-мерное риманово пространство класса C^∞; P — непрерывное N-мерное представление вещественной линейной группы $GL(n, R)$, т. е. гомоморфизм $GL(n, R)$ в полную линейную комплексную группу $GL(N, C)$, при котором элементы матрицы $P(A)$ являются непрерывными функциями элементов матрицы $A \in GL(n, R)$. Инфинитезимальная связность для представления P задается матрицей $\theta(x)$ N-го порядка, каждый элемент которой является линейной дифференциальной формой в какой-либо допустимой системе координат x^i, а при преобразовании координат $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ удовлетворяется соотношение

$$dR(\partial\tilde{x}/\partial x) = \theta(x)\, R(\partial\tilde{x}/\partial x) - R(\partial\tilde{x}/\partial x)\,\tilde{\theta}(\tilde{x}).$$

В работе находится явное выражение для матрицы $\theta(x)$ сначала для частных случаев, а затем для произвольного непрерывного представления. А. С. Феденко

10866. О гиперповерхностях и некоторых группах изометрии риманова пространства. Нагано (Sur des hypersurfaces et quelques groupes d'isométries d'un espace riemannien. Nagano Tadashi), Tohoku Math. J., 1958, 10, № 3, 242—252 (франц.)

Пусть M — связное риманово пространство класса C^∞ и B — поверхность в M. Будем говорить, что группа изометрии G пространства M ортогональна B, если в каждой точке $p \in B$ касательное пространство T_B поверхности B ортогонально касательному пространству T_G поверхности транзитивности группы G, проходящей через p. Если $T_B \perp T_G$ и прямая сумма $T_B + T_G$ совпадает с касательным пространством к M в точке p, то G будем называть ортогональным дополнением к B. Отметим некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. Если B — полная гиперповерхность риманова пространства M и G — группа изометрии M, ортогональная B, то: 1) M — полное, 2) B — вполне геодезическая, 3) M совпадает с $G(B)$, 4) G одномерна.

Теорема 2. Пусть B' — связное подмногообразие M и G — связная группа изометрии M, являющаяся ортогональным дополнением к B'. Тогда: 1) существует максимальное связное вполне геодезическое подмногообразие B, содержащее B'. Если к тому же а) B вложено в M регулярно и b) множество $G(B')$ совпадает с M, то 2) максимальная подгруппа H группы G, оставляющая инвариантным B, замкнута в G и 3) M обладает структурой расслоенного пространства $(M, G/H, B)$ с базой G/H и слоем B, которое ассоциируется с главным расслоенным пространством $(G, G/H, H)$.

В дальнейших теоремах изучается связь между группой изометрии G, являющейся ортогональным дополнением к некоторой поверхности B, и максимальной связной группой изометрии пространства M.

А. С. Феденко

10867. Проективные свойства минимальных поверхностей с окружностями нормальной кривизны. Свобода (Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivosti. Svoboda Karel), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 3, 287—316 (чешск.; рез. русск., франц.)

Пусть S_n — n-мерное пространство постоянной кривизны и (M) — произвольная (двумерная) поверхность, принадлежащая этому пространству. Далее, пусть $M \in (M)$ — произвольная точка, O_k — k-е соприкасающееся пространство поверхности (M) в точке M и Ω_k — линейное пространство наибольшей размерности, содержащееся в пространстве O_{k+1}, проходящее через точку M и ортогональное к пространству O_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Далее, пусть K — произвольная кривая на поверхности (M), проходящая через точку M, и n_k — единичный вектор в точке M, имеющий направление ориентированной k-й нормали кривой K в точке M; наконец, пусть $a_k (\neq 0)$ — k-я скалярная кривизна кривой K в точке M. Известно, что вектор $a_1 a_2, \ldots, a_k a_n$ лежит в пространстве O_{k+1} и что его ортогональная проекция в пространстве Ω_k, ν_k представляет собой так называемый вектор k-й нормальной кривизны кривой K в точке M. Вершины векторов ν_k, соответствующих отдельным кривым на поверхности (M), проходящим через точку M, образуют рациональную замкнутую кривую, которая называется индикатрисой k-й нормальной кривизны поверхности (M) в точке M. В настоящей работе изучаются такие поверхности (M), индикатрисой нормальной кривизны порядков $k = 1, \ldots, m-1$ $(2 \leqslant m \leqslant [1/2n])$ которых в каждой точке M являются окружности с центром M. Существование и общность этих поверхностей и в частных случаях и их свойства известны по нескольким публикациям (Borůvka O., Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1929, 106, 1 — 28; 1932, 165, 1 — 22; J. math. pures et appl., 1933, 12, 337 — 383). В особенности следует отметить, что минимальные кривые на этих поверхностях образуют сопряженную сеть. Автор показывает, что поверхности (M), обладающие перечисленными метрическими свойствами, можно характеризовать как поверхности в n-мерном проективном пространстве P_n, на которых имеется сопряженная сеть, определенным образом проективно-связанная с фиксированной (абсолютной) квадрикой в пространстве P_n. O. Borůvka

10868. О конформных преобразованиях римановых пространств. Нагано (On conformal transformations of Riemannian spaces. Nagano Tadashi), J. Math. Soc. Japan, 1958, 10, № 1, 79—93 (англ.)

Доказывается ряд теорем о группах конформных преобразований римановых пространств, из которых отметим: если риманово пространство M не является конформно-плоским (т. е. если тензор конформной кривизны не равен тождественно нулю в этом пространстве), то группа конформных преобразований M изоморфна группе изометрических преобразований некоторого пространства M^*; если риманово пространство M размерности $n > 4$ допускает транзитивную подгруппу группы конформных преобразований размерности $> n(n-1)/2+2$, то M — сфера, евклидово, эллиптическое или гиперболическое пространство. Б. А. Розенфельд

10869. Геометрия однородных римановых пространств и внутренняя геометрия симметрических пространств. Сабинин Л. В., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 6, 1238—1241

Исследуются однородные римановы пространства V_n с компактной или полупростой группой движений G и такой же стационарной подгруппой H. Основные результаты сформулированы в теоремах.

Теорема 5. Всякое однородное пространство G/H с простой группой G и полупростой группой H есть пространство вполне геодезических поверхностей некоторого симметрического пространства G/Q с той же группой движений G и внутренним инволютивным автоморфизмом, полученных из одной первоначально выбранной вполне геодезической поверхности F всевозможными преобразованиями группы G. Преобразования группы G, переводящие F в себя, определяют подгруппу H.

Теорема 6. Всякая вполне геодезическая поверхность симметрического пространства $V_n=G/Q$ есть поверхность транзитивности некоторой подгруппы H из G, инвариантной при действии инволютивного автоморфизма, индуцированного любой симметрией $J_p(p\in F)$ пространства V_n.

Замечая, что полупростая группа распадается в прямое произведение простых, а компактная — в прямое произведение абелевой подгруппы и максимальной полупростой компоненты, из этих теорем следует вывод, что задача определения всех однородных римановых пространств с компактными или полупростыми группами G и H эквивалентна задаче нахождения всех вполне геодезических поверхностей симметрического пространства с простой группой движений, порожденных внутренним инволютивным автоморфизмом.

Отметим еще теорему 3. Несимметрическое однородное риманово пространство $V_n=G/H$ с положительно определенной метрикой и максимальной подгруппой группы G в качестве H имеет полупростую группу H.

Г. И. Кручкович

10870. Конформные свойства обобщенных римановых пространств (I). Мурджеску (Propriétés conformes des espaces de Riemann généralisés (I). Murgescu Viorel), Bul. Inst. politechn. Iași, 1958, 4, № 3-4, 77—80 (франц.; рез. русск., рум.)

Рассмотрим два обобщенных римановых пространства G_n и G_n^* с фундаментальными тензорами g_{ij} и g^*_{ij}, находящихся в конформном соответствии:

$$g^*_{ij}=2\sigma g_{ij}. \qquad (1)$$

Обозначим через $g_{(ij)}$ симметрическую часть g_{ij} и через $g_{[ij]}$ — его кососимметрическую часть. Полагая $\det|g_{(ij)}|\neq 0$, введем контравариантный тензор $g^{\underline{ij}}$. Символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода определяются по формулам

$$\Delta_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \qquad (2)$$

$$\Delta^h_{ij}=\Delta_{ijk}\,g^{\underline{kh}}. \qquad (3)$$

Коэффициентами конформной связности пространства G_n называются величины

$$C^h_{ij}=\Delta^h_{ij}-\frac{1}{n}\left(\Delta^{\alpha}_{\underline{i\alpha}}g_{kj}+\Delta^{\alpha}_{\underline{j\alpha}}g_{ik}-\Delta^{\alpha}_{\underline{k\alpha}}g_{ij}\right)g^{\underline{hk}}, \qquad (4)$$

где $\Delta^{\alpha}_{ik}=\Delta_{ijk}\,g^{\underline{j\alpha}}$. Показано, что в соответствующих точках пространств G_n и G_n^* коэффициенты конформной связности будут иметь одинаковые значения. При преобразовании координат коэффициенты конформной связности преобразуются по формулам

$$C^h_{ij}=\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^h}=C'^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^j}+ \\ +\frac{\partial^2 x'^{\gamma}}{\partial x^i\,\partial x^j}(\psi_j g_{ik}+\psi_i g_{kj}-\psi_k g_{ij})\,g^{\underline{hk}}, \qquad (5)$$

где $\psi_i=\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\log\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\right)$.

А. С. Феденко

10871. О вполне геодезических подмногообразиях однородных пространств. Васильев А. М., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 2, 223—226

Подгруппа g группы Ли G называется оснащенной, если: а) она не содержит нетривиального нормального делителя группы G и 2) в алгебре Ли $\hat{G}$ группы G выделено подпространство H, инвариантное относительно соответствующей g подгруппы g^* присоединенной к G группы G^*, причем $H+\hat{g}=\hat{G}$, $H\cap\hat{g}=0$, где $\hat{g}$ — подалгебра, отвечающая подгруппе g. Пусть оснащенная подгруппа g есть прямое произведение двух изоморфных подгрупп g_1 и g_2. Фиксируем некоторый изоморфизм групп g_1 и g_2, и пусть g_0 — подгруппа, элементы которой — всевозможные попарные произведения соответствующих элементов групп g_1 и g_2. Можно указать множество оснащений группы g_0, зависящее от одного параметра θ. Всякое оснащение подгруппы g_0 определяет в однородном пространстве G/g_0 инвариантную аффинную связность без кручения. Подалгебра $\hat{g}'$ алгебры $\hat{G}$, разлагающаяся в прямую сумму подпространств $\hat{g}'\cap H$ и $\hat{g}'\cap\hat{g}_0$, определяет в пространстве G/g_0 транзитивное вполне геодезическое многообразие. В этом случае говорят, что группа g' нормальна к g_0 в оснащении H. Подгруппой типа ρ называется подгруппа полной ортогональной группы $O(n)$, изоморфная прямому произведению групп $O(n_i)$ и представленная как множество преобразований евклидова векторного пространства $P(n)$, оставляющих на месте систему вполне ортогональных друг другу подпространств $P(n_i)$, а также все векторы подпространства $P(n_0)$ $(n_0=n-\sum n_i)$. Пусть группа G есть прямое произведение групп $O(N_\xi)$. Представим ее как подгруппу типа ρ группы $O(N)$, $N=\sum N_\xi$. Пусть $g\subset G$ также является подгруппой типа ρ группы $O(N)$. Подгруппу g_0 группы g определим, задавая изоморфизмы между некоторыми парами прямых множителей группы g. В работе изучаются условия нормальности подгруппы g', имеющей то же строение, что и g_0, к группе g_0 в оснащении, для которого все $\theta\neq 0, 1$, где θ — параметры оснащения, соответствующие парам указанных выше подгрупп. Случай, когда некоторые из параметров θ равны 0 (или 1), обладает рядом особенностей и будет рассмотрен автором в другой работе.

А. С. Феденко

10872. Частично проективные пространства. Мокану (Espaces partiellement projectifs. Mocanu P.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, **1**, № 1, 67—98 (франц.)

Перевод на французский язык опубликованной ранее на румынском языке статьи автора (РЖМат, 1958, 5135).

Г. И. Кручкович

10873. О структуре групп движений однородных римановых пространств с осевой симметрией. Сабинин Л. В., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 6, 127—138

Субсимметрическим римановым пространством автор называет такое риманово пространство, в котором существуют m-мерные вполне геодезические поверхности «зеркала», проходящие через каждую точку, относительно которых пространство допускает изометрическое зеркальное отражение (по ортогональным геодезическим). Порядком субсимметрического пространства называется наименьшая возможная размерность «зеркал» в данном пространстве. Субсимметрическое пространство нулевого порядка совпадает, таким образом, с известным симметрическим пространством Э. Картана. В данной статье дается классификация неприводимых субсимметрических пространств с положительно определенной метрикой, обладающих в каждой точке осью симметрии, т. е. пространств первого порядка. Базис алгебры Ли группы G выбирается так, чтобы операторы сдвигов порождали плоскость E, инвариантную под действием присоединенных преобразований стационарной подгруппы H. Как известно, картанова метрика на плоскости E — знакоопределенная. Поэтому, используя ее канонический вид и тождества Якоби, автор получает перечисление структур всех возможных типов групп движений G и стационарных подгрупп H пространства $V_n=G/H$ с осевой симметрией. Получено 11 типов таких пространств. Из них I тип определяет пространства V_3 с группой движений G_4, II, III, V, X типы —

пространства V_5 с группой G_6, IV, XI типы — нечетномерные пространства V_{2s+1}, группа движений которых определенным образом составлена из двух групп движений пространств V_s постоянной кривизны и одной особой одномерной группы G_1. Г. И. Кручкович

10874. Об одном классе пространств с тензорной связностью, допускающих группу движений максимального порядка. Коссу (Su una classe di varietà a connessione tensoriale che ammettono un gruppo d'ordine massimo di movimenti. Cossu Aldo), Rend. mat. e applic., 1959, 18, № 1-2, 157—168 (итал.)

Тензорная связность в пространстве X_n определяется параметром $L^{ik}_{rst} = \delta^k_s M^i_{tr} + \delta^i_r N^k_{ts}$, где M^i_{tr} и N^i_{tr} — параметрами двух векторных связностей. Пространство $X_n (n \geqslant 4)$ допускает полную группу движений максимального порядка n^2 только тогда, когда выполняются соотношения $M^i_{(tr)} - N^i_{(tr)} = \delta^i_{(t}\rho_{r)}$; $M^i_{[tr]} - N^i_{[tr]} = \delta^i_{[t}\sigma_{r]}$, где ρ_r и σ_r — два ковариантных вектора. Пусть

$$P^i_{tr} = \frac{1}{2}\left(M^i_{tr} + N^i_{tr}\right); \quad R^{\cdot\cdot i}_{tr} = \frac{1}{2}\left(M^i_{tr} - N^i_{tr}\right);$$

$$T^{\cdot\cdot i}_{tr} = R^{\cdot\cdot i}_{tr} - \frac{\delta^i_r}{n} R^{\cdot\cdot p}_{tp}.$$

Рассмотрим бесконечно малое точечное преобразование

$$y^i = x^i + v^i(x)\,\delta t, \qquad (1)$$

определяемое полем контравариантных векторов $v^i(x)$, и обозначим символом Λ_v дифференцирование в смысле Ли по отношению к полю $v^i(x)$. Преобразование (1) является движением тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\Lambda_v P^i_{tr} = 0; \quad \Lambda_v T^{\cdot\cdot i}_{tr} = 0. \qquad (2)$$

Положив

$$\nabla^P_t v^i = \partial_t v^i + P^i_{tr} v^r, \quad v^i_t = \nabla^P_t v^i + 2S^{\cdot\cdot i}_{pi} v^p, \qquad (3)$$

где $S^{\cdot\cdot i}_{tr} = P^i_{[tr]}$, и введя тензор кривизны

$$P^{\cdot\cdot\cdot i}_{ptu} = 2\partial_{[t}P^i_{p]u} + 2P^i_{[t|q|}P^q_{p]u}, \qquad (4)$$

мы находим: $\nabla^P_t v^i = v^i_t + 2S^{\cdot\cdot i}_{tp} v^p$; $\nabla^P_u v^i_t = P^{\cdot\cdot\cdot i}_{ptu} v^p$;

$$\Lambda_v T^{\cdot\cdot i}_{tr} = v^p \nabla^P_p T^{\cdot\cdot i}_{tr} + (\delta^p_t T^{\cdot\cdot i}_{qr} + \delta^p_r T^{\cdot\cdot i}_{tq} - \delta^i_q T^{\cdot\cdot p}_{tr}) v^q_p = 0. \qquad (5)$$

Условия интегрируемости системы (5) образуют системы

$$\Lambda_v S^{\cdot\cdot i}_{tr} = 0; \quad \Lambda_v P^{\cdot\cdot\cdot i}_{ptu} = 0; \quad \Lambda_v \nabla^P_h T^{\cdot\cdot i}_{tr} = 0. \qquad (F_0)$$

В свою очередь, условия интегрируемости системы (F_0) дают систему

$$\Lambda_v \nabla^P_{h_1} S^{\cdot\cdot i}_{tr} = 0; \quad \Lambda_v \nabla^P_{h_1} P^{\cdot\cdot\cdot i}_{ptu} = 0; \quad \Lambda_v \nabla^P_{h_1 h} T^{\cdot\cdot i}_{tr} = 0. \qquad (F_1)$$

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность систем (F_0), (F_1), (F_2), ... Для того чтобы существовала группа движений, необходимо и достаточно, чтобы при некотором N система уравнений (F_0), (F_1).... ....(F_N), рассматриваемая как система линейных уравнений относительно $n + n^2$ величин v^i и v^i_t, была совместной, а любое решение этой системы удовлетворяло условиям интегрируемости (F_{N+1}). Если ранг матрицы коэффициентов системы уравнений (F_0), (F_1)....(F_N) равен $n^2 + n - r$, то группа движений пространства зависит от r параметров. Доказывается, что при $r > n^2$ тензор $T^{\cdot\cdot i}_{tr}$ обращается в нуль. В этом случае тензорная связность вырождается в векторную. Отсюда следует, что пространство с тензорной связностью может иметь группу движений порядка не выше n^2. Если группа движений имеет наивысший порядок n^2, то при $n \geqslant 4$ тензор $T^{\cdot\cdot i}_{tr}$ должен иметь вид

$$T^{\cdot\cdot i}_{tr} = \varphi_t \delta^i_r - n\varphi_r \delta^i_t, \qquad (6)$$

где φ_t — ковариантный вектор. При $n = 3$ и $n = 2$ условие (6) может не выполняться. В качестве примера приводится пространство X_3, для которого

$$P^i_{tr} \equiv 0, \quad T^{\cdot\cdot 1}_{23} = a, \quad T^{\cdot\cdot 1}_{32} = -a, \qquad (7)$$

где $a \neq 0$, а все остальные компоненты тензора $T^{\cdot\cdot i}_{tr}$ равны нулю. Из системы (F_0) мы находим $v^1_1 = v^2_2 + v^3_3$, $v^2_1 = v^3_1 = 0$. Интегрируя систему (5), мы получим

$$v^1 = (c^2_2 + c^3_3)\,x^1 + c^1_2 x^2 + c^1_3 x^3 + c^1;$$
$$v^2 = c^2_2 x^2 + c^2_3 x^3 + c^2; \quad v^3 = c^3_2 x^2 + c^3_3 x^3 + c^3. \qquad (8)$$

Уравнения (8) определяют бесконечно малое преобразование, зависящее от девяти параметров, которому принадлежит группа движений с девятью бесконечно малыми операторами $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$, $x^2\partial_1 f$, $x^3\partial_2 f$, $x^2\partial_3 f$, $x^1\partial_1 f + x^2\partial_2 f$, $x^1\partial_1 f + x^3\partial_3 f$. Условия (6), очевидно, не соблюдаются. Ю. Л. Рабинович

10875. Теория групп преобразований в обобщенных пространствах и ее применения к финслеровым и картановым пространствам. Тасиро (A theory of transformation groups on generalized spaces and its applications to Finsler and Cartan spaces. Tashiro Yoshihiro), J. Math. Soc. Japan, 1959, 11, № 1, 42—71 (англ.)

Проблема определения финслеровых и картановых пространств, допускающих группу движений заданного порядка, рассматривается с точки зрения теории линейной связности в тензорном пучке $Z = \{X, Y, \alpha(L_n), \tau\}$, где X — n-мерное дифференцируемое многообразие, Y — N-мерное линейное пространство (слой), а α — линейное представление $L_n \to L_N$. Связность понимается в смысле Эресмана и излагается в соответствии с РЖМат, 1958, 8246. Соотношение эквивалентности $y' \sim y$, определяемое формулой $y' = ky\,(k \neq 0)$ в $Y^0 = Y - 0$, превращает Y^0 в $(N-1)$-мерное проективное пространство, а тензорный пучок Z^0 (пучок Z без поля нулевого тензора) в пучок $\overline{Z} = \{X, P, \overline{L}, \sigma\}$, называемый собственным тензорным пучком. Связность, индуцируемая в $\overline{Z}$, называется также собственной.

После изложения основных фактов теории производных Ли в Z автор переходит к изучению аффинных преобразований. Пусть $B = \{X, L_n, \overline{L}_n, \pi\}$ — пучок n-реперов над X, $\widetilde{B} = \tau^{-1}B = \{Z, L_n, \overline{L}_n, \widetilde{\pi}\}$, а $\widetilde{B}^0$ — часть пучка $\widetilde{B}$ над Z^0. Пусть H обозначает связность, индуцируемую в $\widetilde{B}^0$ некоторой собственной связностью, заданной в $\overline{Z}$. Преобразование φ в X называется аффинным, если индуцированное преобразование $\widetilde{\varphi}$ в $\widetilde{B}^0$ сохраняет связность H. Доказывается, что группа всех аффинных преобразований в X с собственной линейной связностью является группой Ли. Эта группа в случае тангенциального пучка $T^0(X)$ (или котангенциального пучка $T^*(X)$), слоем которого является векторное пространство Y^n без нулевого элемента (двойственное векторное пространство Y^{*n}), имеет максимальный порядок $n^2 + n$ тогда и только тогда, если X — локально аффинное. Преобразование φ в X с финслеровой метрикой $ds = \sqrt{2F(x, dx)}$ называется движением, если индуцируемое преобразование φ_* в $T^0(X)$ оставляет инвариантным фундаментальную функцию $F: F(\varphi_*(z)) = F(z)$ для любого $z = (x^i, y^i)$. Ван Сянь Чжун (Wang H. C., J. London Math. Soc., 1947, 22, 5 — 9) доказал, что n-мерное финслерово пространство при $n \neq 4$, допускающее группу движений порядка $r > n(n-1)/2 + 1$, является римановым пространством постоянной кривизны. Автор, используя результаты Яно (РЖМат, 1953, 1379), определяет финслеровы пространства, до-

пускающие группу движений порядка $n(n-1)/2+1$. Преобразование φ в картановом пространстве X с ареальной метрикой $dV=\mathfrak{L}(x^i, u_j)\,dv$ называется движением, если индуцируемое преобразование φ^* в $T^*(X)$ оставляет инвариантным фундаментальную скалярную плотность $\mathfrak{F}=\frac{1}{2}\mathfrak{L}^2$. Доказывается, что если регулярное картаново пространство допускает группу движений максимального порядка $n(n+2)/2$ при $n>2$ (или, вообще, порядка $r>n(n-1)/2+1$ при $n\neq 4$), то оно является римановым пространством постоянной кривизны. Определяются картановы пространства с группой движений порядка $n(n-1)/2+1$.

Ю. Г. Лумисте

10876. Об изотропии обобщенных пространств. Вейсман (In legatură cu anizotropia spaţiilor generalizate. Weiszmann Andrei), Studii şi cercetări mat. şi fiz. Acad. RPR Fil. Cluj, 1956, **7**, № 1-4, 99—112 (рум.; рез. русск., франц.)

10877. К дифференциальной геометрии вполне изотропных R_2 и R_3 комплексного евклидова R_4 и R_6. Пинль (Zur Differential geometrie im totalisotropen R_2 und R_3 eines komplexen euklidischen R_4 und R_6. Pinl M.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 3, 256—264 (нем.)

Строится дифференциальная геометрия линий во вполне изотропных 2-мерных комплексных плоскостях 4-мерного комплексного евклидова пространства и дифференциальная геометрия линий и 2-мерных плоскостей во вполне изотропных 3-мерных комплексных плоскостях 6-мерного комплексного евклидова пространства. Находятся интегральный инвариант «квазидлина дуги», дифференциальный ковариант «квазикривизна» и показывается, что экстремум квазидлины на изотропной плоскости осуществляется у линий, у которых квазикривизна равна нулю; для линий в изотропном пространстве находятся квазидлина дуги и две квазикривизны и показывается, что экстремум квазидлины осуществляется у линий, у которых обе квазикривизны равны нулю; для поверхностей в изотропном пространстве определяется «квазиплощадь поверхности» и находятся «квазиминимальные поверхности», у которых осуществляется экстремум квазиплощади.

Б. А. Розенфельд

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

10878. Дополнение к статье «Окончательная геометрико-сферическая теория относительности, понимаемая как геометрия расслоенных пучков». Такасу (Eine Ergänzung zu: Die endgültige, kugelgeometrische Relativitätstheorie, welche als eine Faserbündelgeometrie aufgefasst ist. T. Takasu), Yokohama Math. J., 1958, **6**, № 2, 177 (нем.)

Улучшенное доказательство теоремы об изменении вектора момента вдоль геодезической линии в пространстве-времени из работы автора РЖМат, 1958, 9235.

Б. А. Розенфельд

10879. Взаимные статические метрики и скалярные поля в общей теории относительности. Букдал (Reciprocal static metrics and scalar fields in the general theory of relativity. Buchdahl H. A.), Phys. Rev., 1959, **115**, № 5, 1325—1328 (англ.)

Ранее автором введены понятия взаимных метрик и взаимных решений уравнений Эйнштейна свободного поля (РЖМат, 1956, 3310; 1957, 8221). В реферируемой работе аналогичные решения получены для гравитационного поля, создаваемого скалярными источниками. Исследованы уравнения движения пробной частицы и специальный случай сферически-симметричного поля.

10880. Стационарное вращение космических газовых масс в общей теории относительности. Чернов Ю. П., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 4, 762—765

В работе задается поле плотностей, что позволяет найти поля скоростей и давлений в явном виде. Решение разлагается в ряды по отрицательным степеням скорости света; первое приближение — ньютоновское

Ф. И. Франкль

10881. Геометрическая интерпретация в спинорном пространстве законов сохранения. Жевуский (Geometrical interpretation of conservation laws in the spinor space. Rzewuski J.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, **7**, № 9, 571—576 (англ., рез. русск.)

Принимается, что элементарные частицы можно классифицировать по неприводимым представлениям некоторой группы g, которая вводится следующим образом. Пусть c — унимодулярная группа преобразований спинорного пространства, c' — другая такая же группа, соответствующая изотопическому спину, $Z_{\alpha;\dot\beta}=Z^*_{\alpha;\dot\beta}$ и $Z_{\alpha;\dot\beta}=Z^*_{\alpha;\dot\beta}$ (где $\alpha,\beta=1,2$ и $*$ — знак комплексного сопряжения) — величины, первый индекс которых преобразуется группой c, а второй — группой c'. Группа g определяется как прямое произведение групп c, c' и коммутирующих с ними однопараметрических групп α и α', вводимых на основании условия, что α преобразует $Z_{\alpha;\dot\beta}$ и $Z_{\alpha;\dot\beta}$ в $e^{i\varphi}Z_{\alpha;\dot\beta}$ и $e^{i\varphi}Z_{\alpha;\dot\beta}$, а α' в $e^{i\chi}Z_{\alpha;\dot\beta}$ и $e^{-i\chi}Z_{\alpha;\dot\beta}$. Неприводимые представления группы g, наряду со спинорными индексами, характеризуются еще такими целочисленными индексами n, m, что $F^{(n;m)}$ при преобразовании g переходит в $e^{i(n\varphi+m\chi)}F^{(n;m)}$. Исходя из требования, чтобы соответствие между величинами, преобразующимися по неприводимым представлениям группы g, и элементарными частицами давало возможность получить основные законы сохранения, принимается, что индекс n равняется нуклонному заряду N, m — гиперзаряду Y. Странность частицы равна $S=Y-N$, и если индекс T_3 характеризует проекцию изотопического спина на третью ось изотопического пространства, то электрический заряд $Q=T_3+{}^1/_2Y$. С учетом известных для ряда частиц значений N, Q и S строится таблица, позволяющая устанавливать соответствие между отдельными элементарными частицами и величинами, преобразующимися по неприводимым представлениям группы g. Формулируются некоторые эмпирические правила, позволяющие выделить из различных представлений те, которые, как можно предполагать, соответствуют наблюдаемым частицам.

Г. А. Зайцев

10882. Геометрический смысл уравнений Эйнштейна—Максвелла. Розен (Geometrical significance of the Einstein — Maxwell equations. Rosen Gerald), Phys. Rev., 1959, **114**, № 4, 1179—1181 (англ.)

В 1925 г. Райничем предложены уравнения, характеризующие электромагнитное и гравитационное поля (Rainich G. Y., Trans. Amer. Math. Soc., 1925, **27**, 106). В реферируемой работе дается геометрическая интерпретация этих уравнений с помощью четверки сопутствующих единичных векторов (фирбайнов). Первой паре фирбайнов приписывается отрицательный знак, второй — положительный, в соответствии с чем они размещаются на отрицательном и положительном листах сопутствующей поверхности. Из условий интегрируемости и двулистности поверхностей в каждой точке получаются некоторые физические следствия, в частности решение Нордстрема, определяющее гравитационное поле точечной заряженной частицы.

Я. И. Пугачев

10883. Годограф движения материальной точки в релятивистской механике. Зэгэнеску (Hodograful mişcării punctului material în mecanica relativistă. Zăgănescu M.), Lucrările ştiinţ. Inst. ped. Timi-

soara. Mat.-fiz., 1958 (1959), 195—200 (рум.; рез. франц., русск.)

Рассматривается мировая линия Минковского, соответствующая плоскому движению материальной точки под действием ньютоновской силы с компонентами F_1 и F_2. В соответствующей гиперболической плоскости скоростей производится замена переменных: $v^2p = 2v_1(1 - \sqrt{1-v^2})$, $v^2q = 2v_2(1-\sqrt{1-v^2})$, $v^2 = v_1^2 + v_2^2$. Тогда в плоскости комплексного переменного $\eta = p + iq$ определение годографа сводится к интеграции уравнения Риккати: $m_0(d\eta_1/d\tau) = -(\bar{\lambda}/4)\eta^2 + \lambda$, где $\lambda = F_1 + iF_2$, $d\tau = \sqrt{dx_4^2 - dx_2^2 - dx_1^2}$ и m_0 — масса покоя. Если $F_1 = \text{const}$, то годограф есть эквидистанта. Р. Н. Щербаков

10884. К проблеме «астрономического» движения в общей теории относительности. Гейслер (Zum «astronomischen» Bewegungsproblem in der allgemeinen Relativitätstheorie. Geissler D.), Z. Naturforsch., 1959, **14a**, № 8, 689—696 (нем.)

Вычисляются в первом приближении по гравитационной константе уравнения движения общей теории относительности для случая слабых полей и произвольных скоростей участвующих тел с учетом их собственных полей и затем интегрируются для одного специального случая. Резюме автора

10885. Евклидова квантовая электродинамика. Швингер (Euclidean quantum electrodynamics. Schwinger Julian), Phys. Rev., 1959, **115**, № 3, 721—731 (англ.)

Изложена квантовая электродинамика в евклидовой метрике. Представлен обзор подхода к квантованию на основании квантового принципа действия, непосредственно придающего особое значение динамическим переменным, которые связаны с физическими степенями свободы. Определены функции Грина калибровочного преобразования первого рода, которые характеризуются дифференциальными уравнениями и граничными условиями. Они имеют прямой физический смысл, однако включают выделенное времени подобное направление. Для устранения зависимости, внесенной функциями Грина, обладающими лоренцовой калибровкой, которые не имеют непосредственной физической интерпретации, выполнено калибровочное преобразование. Эти функции теперь определяются, главным образом, дифференциальными уравнениями и граничными условиями; они образуют базис для аналитического расширения, которое представляет изменение пространственно-временной метрики в евклидову. В связи с этим преобразованием метрики обсуждаются некоторые свойства антикоммутирующих матриц. Настоящие евклидовы функции Грина определяются в соответствии с функциями калибровочного преобразования Лоренца, и устанавливаются соответствующие дифференциальные уравнения. Обсуждаются инвариантные свойства евклидовых функций Грина. Отдельным евклидовым функциям Грина дано операторное построение и затем они комбинируются в производящий функционал Грина, который в каноническом представлении интерпретируется как волновая функция состояния, характеризующегося евклидовым оператором действия. Показаны преимущества использования дифференциальных операторов и некоторые другие преимущества описания в канонических переменных. Резюме автора

10886. Об электромагнитных уравнениях электрогравитационного поля в неголономной единой теории поля. Теодореску (Asupra ecuațiilor electromagnetice ale cîmpului electrogravitațional în teoria unitară neolonomă. Teodorescu Ion D.), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. științ. natur., 1957, № 15, 25—41 (рум.; рез. русск., франц.)

10887. К исследованию геометрических задач общей теории относительности. Обзор. Вескан, Вейсман, Готлиб (Contribuții la studiul problemelor géometrice ale teoriei relativității generalizate. Privire sintetică. Vescan T. T., Weiszmann A., Gottlieb I.), Lucrările consfăt. geom. diferent. 1955. Timișoara Acad. RPR., 1956, 341—355 (рум.; рез. русск., франц.)

10888 К. Тяготение и вселенная. Основы теоретической космологии. Джордан (Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie. 2. Aufl. Jordan Pascual. Braunschweig, Friedr. Vieweg and Sohn, 1955, XI 277 S., 16.80 DM) (нем.)

10889 К. Специальная теория относительности. Синг (Relativity: the special theory. Synge J. L. Amsterdam, North—Holland Publ. Co.; New York, Interscience, 1956, XV, 450 pp., 10.50 doll.) (англ.)

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

10890. Дуальность между исчислением в координатах и в инвариантных формах. Михэйляну (Dualitate între calculul cu coordonate și cu congruențe. Mihăileanu N.), Comun. Acad. RPR, 1958, **8**, № 2, 141—145 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть в пространстве n измерений R^n система координат будет $x^1, \ldots, x^n$ и система n линейно независимых форм Пфаффа будет $ds^a = \lambda_i^a dx^i$. Если μ_a^i — приведенные миноры определителя $|\lambda_i^a|$, $A^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p}$ — компоненты тензора относительно координат x^i и если $a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p}$ — компоненты того же тензора относительно форм ds^a, то автор показывает, что всякое соотношение, связывающее величины (x, s), (λ, μ), (A, a), порождает новое соотношение, которое можно назвать дуальным к первому, если перемещать буквы одной и той же скобки. В качестве приложения автор указывает простые доказательства некоторых тождеств абсолютного дифференциального исчисления. C. Teleman

10891. О соотношении между аналитическими и алгебраическими пучками. Серр, Сугаку, 1956, **7**, № 4, 253—255 (японск.)

Лекция, прочитанная в университете города Киото 23 августа 1955 года. Алгебраическое многообразие $\bar{V}$ определенное над полем комплексных чисел и не имеющее особых точек, является следовательно комплексно-аналитическим многообразием и поэтому к нему применимы теория гармонических интегралов Ходжа и теория Хирцебруха. Таким образом, на $\bar{V}$ имеются теория аналитических пучков и теория алгебраических пучков. В этой лекции автор показывает, что обе теории дают по существу одни и те же результаты. Liu Chang We

10892. О дифференциальной геометрии касательных пучков римановых многообразий. Сасаки (On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Sasaki Shigeo), Tohoku Math. J., 1958, **10**, № 3, 338—354 (англ.)

Касательный пучок $T(M^n)$ риманова пространства M^n есть множество всех касательных векторов M^n, рассматриваемое с естественной топологией; его базисное пространство — M^n, слои — линейные векторные пространства E^n, группа — группа $GL(n)$. Преобразование координат в M^n

$x'^a = x'^a(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $(i, j, k, a = 1, 2, \ldots, n)$ (

между координатными окрестностями $U(x^i)$ и $U'(x'$ определяет преобразование координат между соответствующими им координатными окрестностями $U \times E^n(x^i,$ и $U' \times E^n(x'^a, v'^a)$ касательного пучка $T(M^n)$

$$\begin{cases} x'^a = x'^a(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ v'^a = \dfrac{\partial x'^a}{\partial x^i} v^i, \end{cases}$$

которое называется расширением (1). Если ξ^i суть компоненты контравариантного векторного поля в M^n относительно координатной окрестности $U(x^i)$, то $\overline{\xi}^A$ $(A = 1, 2, \dots, 2n)$, определяемые равенствами $\overline{\xi}^i = \xi^i$, $\overline{\xi}^{n+i} = \dfrac{\partial^{\cdot} i}{\partial x^i} v^i$, являются компонентами контравариантного векторного поля в $T(M^n)$ относительно координатной окрестности $U \times E^n(x^i, v^i)$, которое называется расширением поля ξ^i. Аналогично, для каждого ковариантного вектора и тензоров 2-й валентности в M^n определяются их расширения в $T(M^n)$. В касательном пучке $T(M^n)$ определяется риманова метрика $d\sigma^2 = g_{jk}(x)\,dx^i dx^k + g_{jk}(x)\,Dv^i Dv^k$, где $g_{jk}(x)$ — компоненты метрического тензора в M^n, Dv^i — ковариантный дифференциал v^i. Если $x^i = x^i(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ есть кривая C в M^n, то кривая $\overline{C}$ в $T(M^n)$: $x^i = x^i(t)$, $v^i = v^i(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dfrac{dv^i}{dt} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} v^j \dfrac{dx^k}{dt} = 0$, называется лифтом кривой C.

Решение $\overline{P}(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = v^i \\ \dfrac{dv^i}{dt} = -\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} v^j v^k \end{cases}$$

при начальном условии $\overline{P}(0) = \overline{P}_0$ для каждого значения t определяет в $T(M^n)$ гомеоморфизм $T_t : \overline{P}_0 \to \overline{P}(t)$. Совокупность всех гомеоморфизмов T_t $(-\infty < t < \infty)$ образует абелеву группу и называется геодезическим потоком в $T(M^n)$; кривые $\overline{P}(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ называются траекториями геодезического потока. Чтобы охарактеризовать дальнейшее содержание статьи, приведем некоторые из доказанных теорем.

Теорема 5. Геодезический поток несжимаем, т. е. несжимаемо векторное поле $\left(v^i, -\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} v^j v^k \right)$, определяющее геодезический поток. (Последнее означает, что дивергенция этого поля тождественно равна нулю);

Теорема 10. Для того чтобы расширение $\overline{f}$ преобразования f было изометрией $U \times E^n$ на $U' \times E^n$ в $T(M^n)$, необходимо и достаточно, чтобы f было изометрией U на U' в M^n;

Теорема 13. Каждый лифт геодезической в римановом пространстве M^n является геодезической в касательном пучке $T(M^n)$;

Теорема 18. Каждый слой касательного пучка $T(M^n)$ риманова пространства M^n является вполне геодезическим подпространством $T(M^n)$. В следующей статье предполагается рассмотреть свойства тензора кривизны $T(M^n)$.

Ю. Е. Пензов

10893. Об инфинитезимальных преобразованиях дифференцируемого многообразия, рассматриваемых как операторы в гильбертовом пространстве. Лелон-Ферран (Sur les transformations infinitésimales d'une variété différentiable, considérées comme des opérateurs hilbertiens. Lelong-Ferrand Jacqueline), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 19, 1585—1588 (франц.)

Пусть V — гладкое многообразие с регулярным краем ∂V, ξ — векторное поле на V, удовлетворяющее условию Липшица, C — пространство функций на V с компактным носителем в $V \setminus \partial V$, удовлетворяющих условию Липшица. С полем ξ связан дифференциальный оператор X_ξ в пространстве C. Допустим, что на V задан элемент объема $d\tau$, и обозначим через H гильбертово пространство функций с суммируемым по $d\tau$ квадратом на V. Обозначим через X_ξ^c замыкание оператора X_ξ в H. Положим $\tilde{X}_\xi f = -X_\xi f + f\delta\xi$, где $\delta\xi$ — дивергенция поля ξ относительно $d\tau$, и обозначим через X_ξ^w оператор, сопряженный замыканию оператора $\tilde{X}_\xi$. Для того чтобы поле ξ с ограниченной дивергенцией определяло непрерывную однопараметрическую группу гомеоморфизмов многообразия V, необходимо и достаточно, чтобы $X_\xi^c = X_\xi^w$. В случае, когда V — риманово многообразие, даются условия того, чтобы поле ξ определяло группу изометрий или группу конформных преобразований. Доказательства отсутствуют.

А. Л. Онищик

10894. Кратно расслоенные многообразия и некоторые характеристические свойства многообразий Сегре. Мураккини (Le varietà più volte striate, ed alcune caratterizzazioni delle varietà di Segre. Muracchini Luigi), Rend. mat. e applic., 1958, 17, № 1-2, 15—34 (итал.)

Рассматриваются дифференцируемые многообразия V_k класса C^m, $m \geqslant 1$, погруженные в проективное пространство. Пусть многообразие V_k содержит конечное число непрерывных систем $\sum(p_l)$ $(l = 1, \dots, s)$ проективных пространств S_{p_l}, причем $p_1 + \dots + p_s = k$, а через общую точку многообразия V_k проходит лишь один элемент каждой системы $\sum(p_l)$, и эта совокупность элементов независима. Тогда V_k называется многообразием, s кратно расслоенным системами $\sum(p_l)$. В работе показано, что при выполнении некоторых условий дважды расслоенное системами $\sum(p)$, $\sum(q)$ многообразие $V_{p,q}$ алгебраично и является проекцией многообразия Сегре $S_p \times S_q$ (результат Тераччини); содержатся и другие утверждения подобного типа для случая кратных расслоений. Кроме того, доказаны различные результаты, ограничивающие сверху наименьшую размерность пространства, содержащего V_k. Наиболее общей является теорема: Если многообразие V_{p+q+1} класса C^1 содержит две системы $\sum(p)$ и $\sum(q)$ и выполнены сформулированные выше условия (кроме условия $p + q = k$), то наименьшая размерность объемлющего пространства не превосходит $2pq + 4q + p + 3$.

Ю. И. Манин

10895. О метризуемости пространства аффинной связности. Голомб (Über die Metrisierbarkeit der affinzusammenhängenden Räume. Goląb S. von), Tensor, 1959, 9, № 1, 1—7 (нем.)

Система $\partial_\mu g_{\lambda\nu} - g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} - g_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\nu\mu} = 0$ относительно неизвестных $g_{\lambda\nu}$, выписанная для данной аффинной связности $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$, допускает, вообще говоря, различные решения $g_{\lambda\nu}$. Максимальный из рангов p матриц $\| g_{\lambda\mu} \|$ автор называет рангом связности $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ и обозначает q. Пространство метризуемо (т. е. допускает введение римановой метрики), если и только если $q = n$. Автор утверждает, что известные условия метризуемости пространства аффинной связности, данные Эйзенхартом и Вебленом (Eisenhart L. P., Veblen O., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1922, 8, 19—23) являются достаточными, лишь если система $g_{\rho\nu}R^\rho_{\omega\mu\lambda} + g_{\lambda\rho}R^\rho_{\omega\mu\nu} = 0$ допускает решение $g_{\lambda\mu}$ с $p = n$. Аналогично, условия

метризуемости проективно-евклидова пространства, приведенные Эйзенхартом (Eisenhart L. P., Non-Riemannian geometry, New York, 1927), не являются достаточными, что можно подтвердить примером. В заключение доказано, что при $n=2$ ранг связности зависит лишь от величин $\mathfrak{G}=\det(R_{\lambda\mu})$, $\mathfrak{g}=v_{12}(v_{\omega\mu}=R^{\nu}_{\omega\mu\nu})$ и от ранга r матрицы

$$\begin{Vmatrix} R^1_{121} & R^2_{121} & 0 \\ R^1_{122} & R^1_{121}+R^2_{122} & R^2_{121} \\ 0 & R^1_{122} & R^2_{122} \end{Vmatrix},$$

причем при $r=3$ $q=0$, при $r=2$ и $\mathfrak{G}=0$ $q=1$, при $r=2$ и $\mathfrak{G}\neq 0$ $q=2$, при $r=0$ $q=2$, а случай $r=1$ невозможен. Ю. И. Левин

10896. Регулярные приведенные связности. Аранъоль (Connexions réduites régulières. Aragnol André), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 19, 1550—1552 (франц.)

Рассматриваются два дифференцируемых главных расслоенных пространства, имеющих одну и ту же базу и одну и ту же структурную группу. Доказывается, что эти пространства изоморфны, если в них существует по связности такой, что соответствующие приведенные связности совпадают, и выполнены некоторые условия регулярности. Исследуется задача о существовании главного расслоенного пространства с заданной регулярной приведенной связностью. Автор использует определения и обозначения, введенные в его диссертации (реф. 10898). Д. В. Беклемишев

10897. Естественные операции над дифференциальными формами. Палейс (Natural operations on differential forms. Palais Richard S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 92, № 1, 125—141 (англ.)

Пусть M будет дифференцируемым (класса C^∞) многообразием; обозначим через V и W некоторые пространства тензорных полей на M. Пусть G — группа всех дифференцируемых гомеоморфизмов φ пространства M, $\delta\varphi$ — дифференциал элемента $\varphi\in G$, так что $\delta\varphi$ осуществляет отображение касательных пространств M_m и $M_{\varphi(m)}$ для $m\in M$. В любом из пространств V^r_s тензоров (r, s) индуцируется автоморфизм R_φ. Получающиеся таким образом представления $R:\varphi\to R_\varphi$ группы G в каждом V^r_s определяют и представление R группы G в $\oplus^\infty_{r,s=0}V^r_s=J(M)$. M-тензорным пространством называется любое подпространство пространства $J(M)$, инвариантное при этом представлении; ограничение представления R каждым из M-тензорных пространств снова обозначается через R. В группе G вводится T^∞ топология, определяемая надлежащим заданием системы окрестностей; эта топология используется для введения непрерывных дуг в G. Пусть G_c — подгруппа G, образованная теми φ, для которых существует компактное $K\subset M$, вне которого φ осуществляет тождественное отображение. Связную компоненту единицы в G_c обозначим через G_0; G_0 является нормальным делителем группы G. Для сравнения двух представлений R^V и R^W группы G на M-тензорных пространствах V и W имеет существенное значение пространство линейных отображений T пространства V в W таких, что $TR^V_\varphi=TR^W_\varphi$. Оно обозначается через $g(V, W)$; для ограничения представления R подгруппой G_0, обозначаемого R^0, соответственно вводится пространство операторов $g^0(V, W)$, причем $g(V, W)\supset g^0(V, W)$. Ставится задача определения $g^0(V, W)$ и $g(V, W)$ для различных V и W; в данной работе она решается для пространств форм. Именно, пусть $\Phi^p\supset V^0_p$ — пространство форм степени p, d^p — оператор внешнего дифференцирования d^p: $\Phi^p\to\Phi^{p+1}$, ограниченный пространством Φ^p, Z^p — пространство замкнутых форм степени p. Индексом c отмечаются соответственные пространства с компактным носителем. Тогда получаются следующие результаты: $g^0(\Phi^p, \Phi^q)=g(\Phi^p, \Phi^q)=0$, если $0\leqslant p\leqslant n$, $0<q<n$, $q\neq p$, $p+1$. $g^0(\Phi^p, \Phi^p)=g(\Phi^p, \Phi^p)$ и состоит из постоянных кратных тождественного отображения. $g^0(\Phi^p, \Phi^{p+1})=g(\Phi^p, \Phi^{p+1})$ и состоит из постоянных кратных d^p. Если M компактно, то, кроме того, $g^0(\Phi^p, \Phi^0)=g(\Phi^p, \Phi^0)=0$, если $0<p<n$. $g^0(\Phi^0, \Phi^0)=g(\Phi^0, \Phi^0)$ и состоит из постоянных кратных тождественного отображения. $g^0(\Phi^n, \Phi^0)$ состоит из постоянных кратных $\int_M$, где $\int_M$ — интегрирование n-формы по фундаментальному циклу, в случае ориентируемости M и $g^0(\Phi^n, \Phi^0)=0$ в случае неориентируемости M. $g(\Phi^n, \Phi^0)=0$, если M неориентируемо или ориентируемо, но допускает диффеоморфизм, изменяющий ориентацию (reversible manifold) и $g(\Phi^n, \Phi^0)$ состоит из постоянных кратных $\int_M$ в противном случае. $g^0(Z^p, \Phi^q)=g(Z^p, \Phi^q)=0$, если $q>0$ и $p\neq q$ (справедливо и для некомпактных M); $g^0(Z^q, \Phi^q)=g(Z^q, \Phi^q)$ и состоит из постоянных кратных отображения включения, если $q>0$ (справедливо и для некомпактных M). $g_0(Z^p, \Phi^0)\cong H_p(M)$ (p-мерное вещественное пространство гомологий M). $g(Z^p, \Phi^0)\cong N_p(M)$ (подпространство элементов $H_p(M)$, сохраняющихся при всех автоморфизмах $H_p(M)$ индуцированных диффеоморфизмами M). В работе содержится постановка тех же вопросов в общей форме, для любой пары векторных полей над одним и тем же полем связанных каким-либо каноническим образом с некоторой математической структурой S (в данном случае, рассмотренном выше — многообразием M). В. В. Рыжков

10898. О дифференциальной геометрии расслоенных пространств. Аранъоль (Sur la géométrie différentielle des espaces fibrés. Aragnol André), Ann. scient. École norm. supér., 1958, 75, № 4, 257—407 (франц.)

10899. О некоторых аналитических главных расслоенных пространствах, допускающих аналитические связности. Мураками (Sur certains espaces fibrés principaux holomorphes admettant des connexions holomorphes. Murakami Shingo), Osaka Math. J., 1959, 11, № 1, 43—62 (франц.)

Изучаются аналитические главные расслоенные пространства, базой которых является комплексный тор T, а группой — связная комплексная абелева группа Ли A.

В первой части работы выводится условие существования на таком пространстве P аналитической связности и устанавливается, что соответствующая форма кривизны Ω зависит только от P. Пусть далее G — наибольшая вязная группа автоморфизмов для P. Необходимым и достаточным условием наличия связности является требование, чтобы эта группа действовала на P транзитивно. В этом случае следующие условия эквивалентны (теорема 4): 1) P имеет интегрируемую аналитическую связность (т. е. $\Omega=0$); 2) G является абелевой группой; 3) G действует на P просто транзитивно. Известно (например, РЖМат, 1956, 6491), что совокупность классов главных расслоенных пространств с группой A и базой T может быть идентифицирована с группой когомологий $H^1(T, A)$ пространства T с коэффициентами в пучке ростков голоморфных функций на T со значениями в A.

Во второй части реферируемой работы изучаются множества $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^0$, состоящие из классов пространств P, допускающих аналитическую связность (для $\mathfrak{P}^0$, соответственно, интегрируемую). Показывается, что $\mathfrak{P}$ и

$\mathfrak{P}^0$ являются подгруппами $H^1(T, A)$. Выясняется структура группы $\mathfrak{P}$ (теорема 10): а) группа $\mathfrak{P}$ является прямой суммой подгруппы $\mathfrak{P}^0$ и подгруппы, изоморфной группе форм кривизны $\mathfrak{P}^*$; б) группа $\mathfrak{P}^*$ есть свободная абелева группа, ранг которой не превышает $n(n-1)r$ (где n и r — размерности T и A соответственно); в) группа $\mathfrak{P}^0$ изоморфна фактор-группе прямого произведения $2n$ экземпляров группы A по комплексной связной группе Ли размерности n. И. З. Розенкноп

10900. Несколько замечаний о внутреннем произведении в пространстве-произведении унитарных пространств. Сюй Чжэнь-жун (Some remarks on inner product in product space of unitary spaces. Hsu Chen-jung), Proc. Japan Acad., 1959, 35, № 5, 203—208 (англ.)

Пусть V будет унитарным пространством над полем действительных или комплексных чисел, (x,y) — внутренним произведением его элементов x и y. Обычным образом определяется внутреннее произведение элементов пространства $V^r = V \otimes \ldots \otimes V$, чем индуцируется также внутреннее произведение в подпространствах $A(V^r)$ и $S(V^r)$ кососимметрических и симметрических элементов V^r, а также в изоморфных им пространствах $\Lambda^r(V)$ и $P^r(V)$. Здесь $\Lambda^r(V)$ — пространство внешних r-форм, а $P^r(V)$ определяется как V^r/M^r, где M^r — ядро симметрического линейного отображения $V^r \to V^r$. Через u обозначается изоморфизм V на дуальное пространство V^* (изоморфизм сопряженности), определяемый условием $\langle x, uy\rangle = (x,y)$ для $x \in V$, где $\langle x, y^*\rangle$ — отображение пар элементов из V и V^* в числовую область. Пусть u^r и $\Lambda^r u$ — соответственно степень и внешняя степень u, так что $u^r(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) = u(x_1) \otimes \ldots \otimes u(x_r)$ и $\Lambda^r u(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r) = u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_r)$. Тогда показывается, что u^r — изоморфизм сопряженности между V^r и $V_r = V^* \otimes \ldots \otimes V^*$, а $\Lambda^r u$ — такой же изоморфизм между $\Lambda^r(V)$ и $\Lambda^r(V^*)$ (или изоморфным ему пространством $(\Lambda^r(V))^*$. Показывается, что эти утверждения приобретают очевидный характер в классической символике тензорной алгебры. Аналогичное утверждение получается для случая пространства $P^r(V)$. Наконец, для пространства Грассмана $\Lambda(V) = \Lambda^0(V) + \ldots + \Lambda^n(V)$, при введении в нем скалярного произведения $(x,y) = \sum_{p=0}^{n} (x_p, y_p)$ (при котором $\Lambda(V)$ становится унитарным пространством), изоморфизм сопряженности $\bar{u}$ дается каноническим продолжением u: $\bar{u} = \sum_{p=0}^{n} (\Lambda^p u) y_p$.

В. В. Рыжков

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

10901. Общие координатные геометрии. II. Сасаяма (General coordinate geometries. II. Sasayama Hiroyoshi), J. Spat. Math. Sasayama Res. Room, 1959, 2, № 1, 65—76 (англ.)

Ч. I. см. РЖМат, 1960, 8152.

Вторая часть (§ 4) курса лекций по аналитической геометрии в гильбертовом пространстве (РЖМат, 1960, 815). И. С. Иохвидов

10902. Класс звездных тел. Мелзак (A class of star-shaped bodies. Melzak Z. A.), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 3, 175—180 (англ.)

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве E_3 ограниченное замкнутое тело K, имеющее внутренние точки и звездное относительно некоторой точки. Пусть $H(K)$ — множество всех точек, относительно которых K звездно, $I(K)$ — множество внутренних точек тела K, $B(K)$ — граница K. Очевидно, $H(K)$ — выпукло. Фиксируем в которую точку $O \in E_3$. К классу H отнесем все такие звездные тела K, что множество $I[H(K)]$ не пусто и точка $O \in I[H(K)]$. Пусть S — единичная сфера с центром в точке O и точка $s \in S$. Автор показывает, что для того чтобы функция $f(s)$, заданная на S, определяла тело $K \in H$, необходимо и достаточно, чтобы $f(s)$ удовлетворяла условию Липшица. Пусть $f_{k_1}(s)$ и $f_{k_2}(s)$ на S задают K_1 и $K_2 \in H$. Автор следующим образом вводит в H метрику ρ: пусть $g(s) = f_{k_1}(s) - f_{k_2}(s)$; тогда

$$\rho(K_1, K_2) = \max_{s,t \in S} \left[|g(s)| + \frac{|g(s) - g(t)|}{|st|} \right],$$

где $|st|$ — расстояние между точками s и t. Пространство H полно относительно ρ. Автор отмечает, что H имеет с классом выпуклых тел общие свойства: принцип выбора Бляшке, существование объема и конечной площади поверхности, возможность приближения многогранниками. Пространство H сепарабельно. Если $K \in H$, то для почти всех точек $p \in B(K)$ существует касательная плоскость. Множество $H(K)$ есть общая часть всех полупространств, ограниченных этими касательными плоскостями и содержащих точку O. Поэтому $H(K)$ можно рассматривать как множество, двойственное к выпуклой оболочке тела K. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть дано некоторое выпуклое тело $C \in H$ и такое число $\lambda > 0$, что $C = \lambda S$, где λS — сфера с центром O и радиусом λ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует тело $K \in H$ такое, что а) $H(K) = C$; б) $C = I(K)$; в) $\lambda S = K = (\lambda + \varepsilon)S$. Наконец, автор дает следующую характеристику ядра $H(K)$ тела $K \in H$. Множество $Y = B(K)$ называется „существенным“, если оно 1) замкнуто;) пересечение тех полупространств, ограниченных касательными плоскостями к $B(K)$ в точках множества Y, которые содержат точку O, равно $H(K)$; 3) у Y нет собственных подмножеств, обладающих свойствами 1) и). Автором доказана

Теорема 2. Пусть $K \in H$, $H(K) = I(K)$ и поверхность $B(K)$ дважды непрерывно дифференцируема. Если множество $Y = B(K)$ „существенно“, то $Y \in B_p$, где B_p множество параболических точек. В частности, если B_p состоит из конечного числа дуг, не обязательно отделенных, то $H(K)$ ограничено конечным числом развертывающихся поверхностей. А. Л. Вернер

10903. Теория планигонов. Делоне Б. Н., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 3, 365—386

Находятся все топологические метрические разбиения плоскости на фундаментальные области для федоровских групп, полное представление о которых дается в таблицах, помещенных в статье. Доказывается теорема: топологически различных правильных сеток (точным образом определяемых в статье), для которых выполняется лемма интегрального исчисления, существует 11, и только 11. (Сетки Laves'a). Все они указываются в таблице II.

Группа F отображений правильной сетки на себя называется основной, если, какие бы ее две клетки ни взять, существует одно и только одно движение этой группы, переводящее одну клетку в другую. Отображения группы F, переводящие клетку правильной сетки в смежные к ней клетки, задаются символом смежности. Обозначаются стороны клетки в определенном порядке буквами, например, a, b, c, d, e, f. При отображениях в смежные клетки эти стороны оказываются покрытыми этими же самыми сторонами, но только может быть в другом порядке, например, b, a, f, d, e, c. Символ $(\overline{ab}, \overline{ba}, cf, dd, fc)$ называется символом смежности основной группы F. При этом может быть, что клетка, касающаяся стороной a стороны b данной клетки, имеет обратную, чем у данной клетки, ориентацию

букв. Это обозначается чертой над элементом символа. Априори символов смежности возможно $k!\,2^k$, где k — число сторон клетки. Отмечая ненужные символы смежности, автор доказывает теорему: основных групп для сеток Laves'a существует только 46. Сетка Laves'a с данной основной группой при ее метрическом осуществлении является разбиением на фундаментальные области для некоторой федоровской группы. Оказалось, что каждый из 46 сортов имеет такое осуществление. В таблице IV указаны все эти осуществления и метрические условия, необходимые для них и достаточные. Все эти 46 сортов осуществляются и как разбиения Дирихле. В таблице V указаны все разбиения Дирихле и метрические условия, необходимые и достаточные для них. Н. Н. Сандакова

10904. Размещение точек в одной области. Эрдёш, Фейеш-Тот (Pontok elhelyezése egy tartományban. Erdős Pál, Fejes Tóth László), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, **6**, № 2, 185—190 (венг.)

10905. Соотношения между группами $\mathfrak{E}_7$ и $\mathfrak{E}_8$ и октавной плоскостью, V, VI, VII. Фрёйденталь (Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. V, VI, VII. Freudenthal Hans), Proc. Konink. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 3, 165—201 (нем.)

Продолжение более ранних работ автора (РЖМат-1956, 1933, 4260, 4261, 6060). В дополнение к полученным там результатам устанавливаются еще нижеследующие. Любое перспективно преобразование октавной проективной плоскости является одним из преобразований $\Pi^{x}_{A,B}$. Каждой матрице $U\in\mathfrak{U}$ соответствует взаимнооднозначно полярное преобразование Λ октавной плоскости, являющееся эрмитовым; последнее означает, что любые две точки A, A_1 октавной плоскости и точки пересечения $A\times A_1$ с ΛA и с ΛA_1 лежат на одной действительной прямой. Всякому $\theta\in\mathfrak{N}$ отвечает перспективное преобразование октавной плоскости. Если в основу исследований вместо множества октав положить поле действительных чисел, то построенная (в частях III и IV) геометрия сведется к пятимерной симплектической геометрии (соединимыми будут сопряженные точки). Поэтому автор дает геометрии частей III и IV такое название: пятимерная симплектическая октавная геометрия и обозначает ее через Sy(5, ok). В конце V, в VI и VII частях дается аксиоматическое построение геометрии Sy(5, ok). Точками в ней именуются элементы некоторого множества $\mathfrak{N}$; две точки могут быть связанными (по терминологии в III и IV — соединимыми). Множество, состоящее из всех попарно связанных точек, называется плоскостью; пересечение двух плоскостей, содержащее более чем одну точку, есть прямая. В основу кладутся три аксиомы:

Аксиома A_{ok}. Каждая плоскость вместе с ее точками и прямыми образует октавную плоскость.

Аксиома B. Если точка θ не принадлежит плоскости P, то множество точек плоскости P, связанных с θ, есть прямая.

Третья аксиома C носит конфигурационный характер.

При установлении следствий из аксиом, особенно сложным является доказательство (на основе аксиом A_{ok} и B) утверждения: через любую прямую проходят не менее чем три плоскости. Если множество октав заменить полем действительных чисел, то, как показывает автор на примере, указанное предложение уже не будет справедливым.

В заключительном п. 21 устанавливается изоморфизм обеих геометрий Sy(5, ok), из которых первая построена алгебраически (в III, IV), а вторая — аксиоматически (в V—VII).

Указаны также (в п. 13.3) ошибки и неточности, допущенные в частях I—IV. Г. Б. Гуревич

10906. О псевдогруппах Ли конечного типа. Эресман (Sur les pseudogroupes de Lie de type fini. Ehresmann Charles), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 3, 360—362 (франц.)

Псевдогруппой конечного типа называется псевдогруппа, действующая на многообразии V_n и задаваемая вполне интегрируемой системой определяющих уравнений. Доказывается, что в этом случае множество решений системы определяющих уравнений, задающих взаимно однозначные отображения V_n на себя, образует группу Ли. А. М. Васильев

10907. Объем многогранников. Картан (Volume des polyèdres. Cartan Henri), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, 38, № 194, 1—12 (франц.)

В пространстве R^n с точками $(x_1,\ldots,x_n)$ ячейкой называется произведение полуинтервалов $a_i\leqslant x<b_i$ при $i=1,\ldots,n$. Обозначим через E_k (k — натуральное число) множество всех ячеек, у которых для всякого i a_i, b_i суть два последовательных целых кратных числа 2^{-k}. Ячейки E_k образуют „разбиение" ранга k. Примем аксиомы: 1) Объем каждой ячейки E_0 равен 1. 2) Если ячейка состоит из нескольких ячеек, то ее объем равен сумме составляющих ячеек. 3) Трансляция ячейки не изменяет ее объем. Отсюда объем ячейки из E_k равен 2^{-nk}. Соединение конечного числа ячеек из E_k называется элементарным телом.

Для любого множества A из R^n рассмотрим тело $S_k(A)$, каждая ячейка которого содержит точки A и тело $S'_k(A)$, каждая ячейка которого принадлежит A: $S'_k(A)\subset A\subset S_k(A)$. Через $V_k(A)$ и $V'_k(A)$ обозначим объемы $S_k(A)$ и $S'_k(A)$. Тогда $V'_k(A)\leqslant V_k(A)$. Пределы V_k и V'_k при $k\to\infty$ удовлетворяют неравенству $V'(A)\leqslant V(A)$. При $V'=V$ множество A кубируемо. Если A и B кубируемы, то кубируемы также $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$. Кроме того, при $A\cap B=0$, $V(A\cup B)=V(A)+V(B)$. Объем кубируемого множества инвариантен при трансляции. Гомотетия с коэффициентом t преобразует кубируемое множество A в кубируемое множество A', причем $V(A')=t^nV(A)$. Всякое ограниченное выпуклое множество из A кубируемо, например, шар или выпуклый многогранник. Если $(x_1,\ldots,x_{n-1},z)\in A$, $W(Az)$ — внешний, $W'(Az)$ — внутренний объем (Az) и если $W'(Az)\leqslant f(z)\leqslant W(Az)$, то $f(z)$ интегрируема по Риманну и $\int f(z)dz=V(A)$. Объем кубируемого множества инвариантен для всякого движения.

Линейное преобразование T преобразует кубируемое множество в кубируемое, причем новый объем равен прежнему, умноженному на определитель преобразования. Если $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — векторы с общим началом O, то n-симплекс, имеющий вершинами $o, a_1,\ldots,a_n$, имеет объем $1/n!\,|\det(a_1,\ldots,a_n)|$. Каждый многогранник есть объединение непересекающихся n-симплексов, а его объем есть сумма объемов этих симплексов. Отсюда получаем, что каждому многограннику A можно отнести число $v(A)\geqslant 0$, обладающее свойствами:

1) Если $B\cap C=0$ и $A=B\cup C$, то $v(A)=v(B)+v(C)$. 2) $v(A)$ инвариантно при трансляции. 3) Если A единичная ячейка, то $v(A)=1$. А. И. Фетисов

10908. Изоморфизм между движениями комплексных евклидовых пространств и коллинеациями комплексных проективных пространств при помощи метода систем основных матриц. Галев (Изоморфизъм между движенията на комплексните евклидови пространства и колинеациите на комплексните проективни пространства по метода на системите основни матрици. Галев Любен), Годишник Инж.-строит. ин-т. Фак. строит., архитект. и гидротехн., 1957, **9**, № 1, 29—63 (болг.; рез. англ.)

Устанавливается изоморфизм между группой вращений комплексного евклидова пространства $2\kappa+1$ измерений и группой коллинеаций комплексного проективного пространства $2^{\kappa}-1$ измерений, являющийся геометрической интерпретацией известной теории спинорных представлений группы комплексных ортогональных матриц $(2\kappa+1)$-го порядка при помощи комплексных матриц 2^{κ}-го порядка (Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии, М., 1955, стр. 469, РЖМат, 1956, 8247К).

Б. А. Розенфельд

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

10909. Геометрия выпуклых поверхностей и их связь с дифференциальной геометрией. Гергей (Geometria suprafeţelor convexe şi legătura lor cu geometria diferenţială. Gergely E.), Lucrările consfăt. geom. diferenţ., 1955, Timişoara Acad. RPR, 1956, 69—87 (рум.)

10910. Одна формула для периметра овалов. Масс (Eine Formel für den Umfang des Ovals. Maaß D.), Österr. Ingr—Arch., 1959, **13**, № 3, 187—188 (нем.)

Периметр S овала, заданного в полярных координатах уравнением $r=b/(1-e\cos^2\varphi)$, где $e=(a-b)/a$ (a и b — большая и малая полуоси овала), выражается интегралом

$$S=4b\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1+(4e^2-2e)\cos^2\varphi-3e^2\cos^4\varphi}}{(1-e\cos^2\varphi)^2}\,d\varphi. \quad (1)$$

Автор сводит интеграл (1) к следующему эллиптическому интегралу 2-го рода:

$$S=4\sqrt{a^2-ab+b^2}\cdot E\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{a-b}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\right). \quad (2)$$

Для $e=0$ имеем окружность и $S=2\pi a$. А. Л. Вернер

10911. О доказательстве некоторых теорем Делоне. Жолдош (Delaunay néhány tételének bizonyítása. Zsoldos Lehel), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1959, **9**, № 2, 181—186 (венг.)

Доказательство некоторых утверждений Б. Н. Делоне, высказанных, но недоказанных последним в его работе (Delaunay B., Z. Kristallogr., 1933, **84**, 109—149). А. А. Бовди

10912. О максимальной толщине плоского сечения некоторых выпуклых тел. Данцер (Über die maximale Dicke der ebenen Schnitte eines konvexen Körpers. Danzer Ludwig), Arch. Math., 1957, **8**, № 4, 314—316 (нем.)

10913. О характеристике кривой постоянной ширины. Хеппеш (Állandószélességű síkgörbék egy jellemzése. Heppes Aladár), Mat. lapok, 1959, **10**, № 1-2, 133—135 (венг.; рез. русск., англ.)

Замкнутая, выпуклая кривая на плоскости называется кривой постоянной ширины, если расстояние между двумя точками кривой, в которых касательные параллельны, будет постоянным. Доказывается теорема: Замкнутая, выпуклая, плоская кривая тогда и только тогда будет кривой постоянной ширины, если каждая ее хорда будет максимальной хордой одной из двух дуг, определенных ее концами. А. А. Бовди

10914. О характеристиках евклидовой сферы. Голдберг (On characterizations of the Euclidean sphere. Goldberg S. I.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 4, 384—390; Indagationes math., 1959, **21**, № 4, 384—390 (англ.)

Используя метод, примененный О. К. Житомирским для доказательства конгруэнтности изометричных овалоидов (Докл. АН СССР, 1939, **25**, 347—349), автор дает новое доказательство следующей теоремы: Замкнутая ориентируемая аналитическая поверхность рода нуль постоянной средней кривизны есть сфера (для класса C^2 этот результат получен Хартманом и Винтнером, РЖМат, 1955, 6067). Обобщая этот результат, автор рассматривает аналитическую поверхность, у которой средняя кривизна $H(u,v)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} EH_v-FH_u&\equiv 0 \bmod I(\lambda,\mu,\nu),\\ FH_v-GH_u&\equiv 0 \bmod I(\lambda,\mu,\nu), \end{aligned} \quad (1)$$

где $I(\lambda,\mu,\nu)$ — идеал, порожденный аналитическими функциями $\lambda=L-hE$, $\mu=M-hF$, $\nu=N-hG$ ($h=\text{const}$) в кольце всех аналитических фукций, а E, F, G, L, M, N — коэффициенты первой и второй основных форм. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если средняя кривизна $H(u,v)$ аналитической поверхности S является решением системы (1), аналитической в окрестности точки $p_0=(0,0)$, в которой $H=h$, $H_u=H_v=0$, то S есть сфера. Переходя к изометрическим координатам, а затем к комплексным параметрам $w,\bar w$ ($w=u+iv$), автор сводит (1) к уравнению

$$\varphi_{\bar w}=A(w,\bar w)\varphi+B(w,\bar w)\bar\varphi, \quad (2)$$

где $\varphi(w,\bar w)=((L-N)/2)-iM$, а потому теорема 1 может быть высказана в следующей форме:

Теорема 2. Замкнутая аналитическая поверхность рода нуль, удовлетворяющая в окрестности точки $(0,0)$ условию (2), есть сфера. Теорема 2 справедлива также, если φ есть решение нелинейного уравнения

$$\varphi_{\bar w}=A(w,\bar w)\varphi+B(w,\bar w)\bar\varphi+C(w,\bar w)\varphi^2+D(w,\bar w)\varphi\bar\varphi \quad (3)$$

в окрестности точки $w=0$, для которого $\varphi(0,0)=0$.

Для аналитических замкнутых поверхностей, удовлетворяющих условию (3) справедливы теоремы А. Д. Александрова о том, что простая замкнутая специальная W-поверхность есть сфера. Автор указывает, что, используя результаты Хартмана и Винтнера, Чжэнь Шэн-шеня и Ниренберга, доказанные им теоремы можно распространить на поверхности класса C^2.

А. Л. Вернер

10915. Овалы с одной системой сопряженных диаметров. Ленц (Die Ellipsen mit einer Schar konjugierter Durchmesserpaare. Lenz Hanfried), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 134—139 (нем.)

P-кривые — это овалы с ∞^1 сопряженными диаметрами (РЖМат, 1957, 8940) радоновы (R-кривые — это P-кривые с центром; пусть символы $|C|_k$ и U_k означают соответственно площадь и длину кривой C при метрике Минковского с индикатрисой K, (C) — обыкновенную площадь. Автор описывает построение некоторых R-кривых, характеризует принадлежащий к ним эллипс и доказывает следующее: Пусть C есть R-кривая с описанным вокруг нее максимальным четырехугольником, площадь которого равна 2; тогда $2(C)=U_C$. Справедливо неравенство $6\leqq U_C\leqq 2\pi$ ($U_C=6$ для правильного шестиугольника и $=2\pi$ для эллипса). P-кривая C имеет постоянную ширину в случае центральной симметризации C, рассматриваемой как индикатриса. Для класса P-кривых C с одной и той же индикатрисой C' имеем $U_{C'}:|C|_{C'}=\text{const}\leqslant\pi$ ($=\pi$ для кривых аффинно-эквивалентных с кривыми постоянной ширины в обычном смысле); среди упомянутого класса кривых Минковского, ширина которых равна 1, имеем C максимальную площадь.

Пусть C — овал, C_1 — наибольший вписанный четырехугольник, C_2 — наименьший описанный параллелограмм. Тогда справедливы соотношения (в скобках указаны кривые, для которых имеет место равенство): $\frac{1}{2}\pi|C_1|\geqq|-C|$ (эллипсы), $|C_2|\leqq 2|C|$ (треуголь-

ники), $|C_2| \leqslant 2|C_1|$ (P-кривые), $|C| \leqq {}^1/_4 |C_1| U_C$ (R-кривые) и для R-кривых $|C_2| \leqq {}^4/_3 |C|$ (аффинно-правильные треугольники). A. Švec

10916. Обобщение теории поляр для овалов и овалоидов. Гергей (Generalizarea teoriei polare asupra ovalelor şi ovaloidelor. Gergely Eugen), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1957, 8, № 1-2, 143—160 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор распространяет на овалы и овалоиды понятие полярности относительно кривой второго порядка или квадрики. Для овальной кривой криволинейная поляра точки определяется, как геометрическое место точек, полярно сопряженных точке относительно овала. Так же определяется кривая, полярно сопряженная данной точке как геометрическое место точек пересечения касательных к овалу, построенных в точках пересечения овала с секущими, проходящими через данную точку. Для овалоида определяется полярная поверхность точки, как геометрическое место точек, полярно сопряженных данной относительно овалоида. Автор находит некоторые свойства криволинейных поляр или кривых полярно сопряженных относительно овала и соответственно полярных поверхностей относительно овалоида. I. P. Elianu

10917. Новая экстремальная задача для выпуклых тел вращения. Бири (Neue Extremalprobleme über konvexe Rotationskörper. Bieri H.), Experientia, 1959, 15, № 5, 203—204 (нем.; рез. англ.)

Доказывается, что среди всех выпуклых тел вращения с данным радиусом экватора и данной высотой, превышающей некоторое определенное число, усеченные конусы, при постоянном объеме, имеют наибольшую поверхность и наибольший интеграл от средней кривизны. Устанавливается условие, при котором усеченный конус обладает двумя этими экстремальными свойствами одновременно. Для достаточно малых высот вопрос об экстремальных свойствах усеченного конуса остается открытым. В. П. Белоусова

10918. Об одном экстремальном свойстве пяти- и шестиугольной звезды. Имре (Az öt és hatágú csillag egy szélsőértéktulajdonsága. Imre Margit), Mat. lapok, 1958, 9, № 3-4, 289—293 (венг.; рез. русск., англ.)

Замкнутая кривая с неотрицательной кривизной, полная кривизна которой 4π, или пара выпуклых кривых называется двойным овалом. Если двойной овал содержит n двойных точек, то образуется n луночек. Часть плоскости, ограниченная внутренними дугами луночек, называется ядром двойного овала. Под площадью двойного овала понимается сумма площадей всех луночек и двойная площадь ядра. Автор дает частное решение следующей проблемы Фейеша-Тота (Fejes-Tóth): Среди двойных овалов с данной площадью, содержащих n ($n \geqslant 5$) двойных точек, аффинной правильной n угольной звездой является тот, у которого отношение площади двойного овала к площади луночки с минимальной площадью — максимальное. Доказывается, что для двойного овала с пятью и шестью двойными точками, площадь которого равна T, имеют место соотношения: $T/\tau \geqslant 5 + 2\sqrt{2} \approx 9{,}47\ldots$, $T/\tau \geqslant 18$ соответственно, где τ — площадь луночки с минимальной площадью. Равенство имеет место лишь в случае аффинно-правильной пяти- и шестиугольной звезды. А. А. Бовди

10919 К. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Кон-Фоссен С. Э. М., Физматгиз, 1959, 303 стр., илл., 10 р. 35 к.

См. также: 9865, 9866, 9914, 10036, 10100, 10103 К, 10142.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

10920. О распространении погрешности при применении экстраполяционного метода Адамса. Зондек, Шелдон (On the error propagation in Adams' extrapolation method. Zondek B., Sheldon J. W.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, 13, № 65, 52—55 (англ.)

При численном интегрировании уравнения $y' = f(x, y)$ методом Адамса без пересчета $y_{j+1} = y_j + h(\beta_0 + \beta_1\nabla + \cdots + \beta_n\nabla^n) f_j$ рассматривают $\partial f/\partial y$ как локально постоянную величину. Тогда характеристическое уравнение, соответствующее разностному уравнению распространяющейся погрешности, имеет вид $\lambda - 1 = k[\beta_0 + \beta_1(1 - \lambda^{-1}) + \cdots + \beta_n(1 - \lambda^{-1})^n]$, где $k = h \times \partial f/\partial y$. При малых k один из корней этого уравнения равен приближенно $\exp k$, остальные близки к нулю. Доказывается, что остальные корни по модулю меньше единицы при $k > 0$, $k(2\beta_2 + \ldots + 2^{n-1}\beta_n) < 1$ и что все корни по модулю меньше единицы при $k < 0$,

$$|k|(1 + 2\beta_1 + \ldots + 2^n\beta_n) < 2. \qquad (1)$$

Оценка (1) точна, так как в случае равенства появляется корень $\lambda = -1$, и распространяющаяся погрешность перестает быть затухающей. Эти оценки могут использоваться при выяснении вопроса о том, до каких пределов можно уменьшать количество вычислений за счет увеличения шага h. М. Л. Бродский

10921. Границы погрешностей для одношагового процесса численного интегрирования Рунге-Кутта. Карр III (Error bounds for the Runge-Kutta single-step integration process. Carr John W., III), J. Assoc Comput. Machinery, 1958, 5, № 1, 39—44 (англ.)

Если уравнение $y' = f(x, y)$ решается методом Рунге-Кутта, причем $-M_2 < \partial f/\partial y \leqslant -M_1 < 0$ при $(x, y) \in D$ и ошибка на одном шаге не превышает (по абсолютной величине) E, то при $h < \min(M_1/M_2^2,\ 4M_1^3/M_2^4)$ накопленная погрешность, т. е. разность между приближенным и точным решением во всех узлах не превосходит $\varepsilon = E/hM_1$. (Для справедливости этой оценки требуется также, чтобы численное решение целиком содержалось в некоторой области $D^* \supset D$). Дается также оценка для случая $|\partial f/\partial y| < M$. Оценки могут быть применены к нахождению оптимального шага (напомним, что $E = \rho + Ch^5$, где ρ — оценка погрешности округления, Ch^5 — оценка погрешности метода). Можно также ставить задачу о нахождении шага h и (т. е. количества запасных знаков), обеспечивающих заданную точность ε. М. Л. Бродский

10922. Краевая задача и теорема о дифференциальных неравенствах со совпадающими узлами С. А. Чаплыгина для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Арамэ (Problema bilocală şi teorema lui S. A. Ciaplîghin, pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi. Aramă Oleg), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1958, 9, № 1-4, 7—38 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются условия разрешимости краевой задачи для уравнения

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (1)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad (2)$$

где x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ — произвольные точки интервала (a, b), а y_1 и y_2 — произвольные действительные числа. Функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Автор устанавливает, что необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1) — (2) является применимость теоремы Чаплыгина к однородному уравнению

$$L(y) = 0 \quad (3)$$

с начальным условием $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ при любом x_0 из интервала (a, b). Это свойство оператора $L(y)$ автор называет свойством $T_2(a, b)$. Доказывается, что для того, чтобы оператор $L(y)$ обладал свойством $T_2[a, b]$, необходимо и достаточно существование хотя бы одного частного интеграла уравнения Риккати $\sigma' + \sigma^2 + p(x)\sigma + q(x) = 0$, непрерывного в (a, b).

Кроме того, автор дает оценку для ширины полосы $(a, a+h)$ разрешимости задачи (1), (2) для произвольного оператора $L(y)$. Теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах рассматривается автором и для одного уравнения n-го порядка с начальными условиями $u(x_0) = u'(x_0) = \ldots = u^{(n-1)}(x_0) = 0$ при произвольном x_0 из (a, b). Дается необходимое и достаточное условие применимости этой теоремы. Это условие аналогично условию Н. А. Кащеева (РЖМат, 1957, 6631).

Б. Н. Бабкин

10923. Устойчивость численного решения дифференциальных уравнений. Милн, Рейнолдс (Stability of a numerical solution of differential equations. Milne W. E., Reynolds R. R.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 196—203 (англ.)

При применении известного метода Милна с пересчетом по формуле Симпсона (РЖМат, 1956, 1340К, стр. 7) к уравнению $y' = f(x, y)$ характеристическое уравнение, соответствующее разностному уравнению, которому удовлетворяет погрешность, возникшая на некотором шаге и распространяющаяся дальше, имеет два корня, из которых один при малых $s = h(\partial f/\partial y)$ близок к $\exp s$, а второй к $-1 + s/3$. Второй корень характеристического уравнения порождает знакочередующуюся компоненту распространяющейся погрешности, притом растущую в устойчивом случае ($s < 0$). Для устранения этого недостатка метода в работе предлагается следующее его видоизменение: после подсчета значений в k узлах пересчитать y_k по формуле: $\bar{y}_k = {}^1/_2 y_k + {}^1/_2 [y_{k-3} + {}^{3h}/_8 (y'_k + 3y_{k-1} + 3y_{k-2} + y'_{k-3})]$, затем продолжить счет по обычному методу Милна — Симпсона и заменить таким же образом значение y_{2k} и т. д. При $s < 0$, $k < q(s)$ (приведены формула и таблица значений $q(s)$) погрешность затухает при своем распространении. Этот результат проверен экспериментально на уравнении $y' = -y$, причем результаты просчета оказались в хорошем соответствии с теорией.

М. Л. Бродский

10924. Оценка погрешности собственных значений, получаемых методом Ритца — Галёркина. Бертрам (Fehlerabschätzung für das Ritz — Galerkinsche Verfahren bei Eigenwertproblemen. Bertram G.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 5-6, 191—201 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается задача на собственные значения для следующего уравнения, заданного на отрезке $[a, b]$,

$$M[y] = \lambda q(x) y \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$U_\mu(y) = 0, \ \mu = 1, 2, \ldots, 2m, \quad (2)$$

где $M[y] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu [f_\nu(x) y^\nu(x)]^{(\nu)}$, а $f_\nu(x)$ — действительные ν раз непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции, $f_m \neq 0$ и $U_\mu(y) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} \{\alpha_{\nu\mu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\nu\mu} y^{(\nu)}(b)\}$ — линейная форма с действительными, не обращающимися одновременно в нуль коэффициентами $\alpha_{\nu\mu}$, $\beta_{\nu\mu}$, ранг матрицы из которых равен $2m$; кроме того, предполагается, что $q(x) > 0$ и $\int_a^b uM[u]\,dx > 0$ для функций u, удовлетворяющих краевым условиям (2). Для приближенного нахождения собственного значения λ_ν ν-я собственная функция y_ν задачи (1), (2) приближается выражением $y_{\nu,r} = \sum_{k=1}^{r} a_k \varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ — собственные функции задачи $M[y] = \lambda y$, $U_\mu(y) = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, 2m$ соответствующие собственным значениям ω_k. Используя метод Галеркина, находятся $\lambda_{\nu,r}$ — приближенные значения для λ_ν, причем $\lambda_{\nu,r} \geqslant \lambda_\nu$. Дается следующая оценка для разности $\lambda_{\nu,r} - \lambda_\nu$: $\lambda_{\nu,r} - \lambda_\nu \leqslant \lambda_{\nu,r} \frac{t}{1+t}$, где $t = \lambda_{\nu,r}\, q_{\max} \left\{ \int_a^b K(x, x)\,dx - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\omega_k} \right\}$, а $K(x, y)$ — функция Грина задачи $M[y] = 0$, $U_\mu(y) = 0$.

Дается другая оценка: $\lambda_{\nu,r} - \lambda_\nu \leqslant \lambda_{\nu,r}^2\, q_{\max} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k}$ и если ω_k асимптотически растут как k^{2m}, то $\lambda_{\nu,r} - \lambda_\nu \leqslant c_{\nu,r}/(2m-1)\, r^{2m-1}$.

В. И. Лебедев

10925. Оценка погрешности метода Ритца — Галеркина в задачах о собственных значениях. Бертрам (Fehlerabschätzung für das Ritz — Galerkinsche Verfahren bei Eigenwertproblemen. Bertram G.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 5-6, 236—246 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Уточняются нижние границы собственных значений, полученных методом Ритца — Галеркина в первой части работы (реф. 10924) для обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к задаче $-f_2(t)z - f_1(t)z = \lambda g_0(t) z$ для $z(t)$; $z(a) = z(b) = 0$; $f_2 > 0$; $g_0 > 0$ для $a \leqslant t \leqslant b$ выводятся новые формулы оценок собственных значений, позволяющие при малой вычислительной работе установить границы собственных значений, достаточно эффективные для практических расчетов. Из формулы оценки погрешности, полученной в первой части работы (реф. 10924),

$$\lambda_{\nu,r} - \lambda_r = -\lambda_{\nu,r} \frac{\lambda_{\nu,r} \sum_{\rho=r+1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2\pi^2} I_\rho^2}{1 + \lambda_{\nu,r} \sum_{\rho=r+1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2\pi^2} I_\rho^2},$$

где $I_\rho \approx \int_0^1 q(x) \sqrt{2} \sin \rho\pi x y_\nu(x, \alpha)\,dx$ путем сложных преобразований с использованием ряда фактов из теории собственных значений получаются улучшенные оценки для различных случаев задания $q(x)$: 1) $q(x) > 0$ и непрерывна на $0 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $q(x) > 0$ и имеет непрерывную производную на $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $q(x) > 0$ и имеет непрерывные производные до 2-го порядка на $0 \leqslant x \leqslant 1$. Сравнение с решением задачи $-y'' = \lambda(1 + \cos\pi x) y$; $y(0) = y(1) = 0$ показывает, что при различных значениях r, наряду с улучшением одних оценок, может иметь место ухудшение других, причем как основной результат утверждается, что r-е собственное число для $\rho = r$

дает наихудшее приближение. Выводятся уточненные формулы оценок для класса задач 4-го порядка: $y^{IV} = \lambda q(x) y$; $q(x) > 0$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$. В качестве числового примера приводится решение задачи $y^{IV} = \lambda(-x) y$; $y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$. Указывается, что аналогичные формулы для оценок погрешностей собственных значений получаются и для более широкого класса задач, а также для дифференциальных уравнений в частных производных. И. Ф. Шелихова

10926. Линеаризованная оценка погрешности численного интегрирования системы дифференциальных уравнений основной задачи внешней баллистики. Котова Л. Н., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 3, 418—421

Используя с разрешения С. М. Лозинского одну его неопубликованную оценку погрешности численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, автор получает „линеаризованную" оценку погрешности численного решения уравнений основной задачи внешней баллистики $du/dt = -cG(v) H(y) u$; $dw/dt = -cG(v) H(y) w - g$; $dx/dt = u$; $dy/dt = w$.

10927. Об оценке погрешности некоторых методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Шехтер (Asupra delimitării erorilor în unele procedee de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale. Schechter E.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1958, 9, № 1-4, 343—350 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются оценки погрешности метода численного интегрирования дифференциальных уравнений посредством формул вида

$$\tilde{y}_{m+1} = \Phi[x_m, \tilde{y}_m, h_m; f] + \delta_m \qquad (1)$$

($m = 0, 1, \ldots, n-1$); $h_m = x_{m+1} - x_m$; $\tilde{y}_0 = y_0$. Приведенные оценки основаны на следующей теореме: Если при $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$ $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$ выполняются неравенства $Y_{j_1}(x) \leqslant f_j(x) \leqslant Y_{j_2}(x)$, $Y_{j_1}(x) \leqslant \tilde{y}_{jm}(x) \leqslant Y_{j_2}(x)$, где $f_y'(x, y)$ непрерывна, а $A(x)$ интегрируема, то имеет место оценка

$$|\rho_n| \leqslant \sum_{m=1}^{n} |\Delta_m| \exp \int_{x_m}^{x_n} A(x)\, dx, \qquad (2)$$

где $\tilde{y}_m(x)$ — решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при условии $\tilde{y}_m(x_m) = \tilde{y}_m$, а ρ_m — полная погрешность в точке x_m.

Предполагается, что уравнения могут быть разрешены относительно производных, причем их правые части представляют собой непрерывные функции и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Частными случаями оценки (2) являются при некоторых дополнительных предположениях следующие оценки: $\mu = \sup A(x)$, $A(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x \leqslant b$, $|\rho_n| \leqslant \sum_{m=1}^{n} e^{\mu m (b-a)} (B + C) |h|^5$, $\mu \geqslant \sup_{[a,b]} A(x)$; $|\rho_n| < (b-a)(B+C) h^4 e^{\mu(b-a)}$, $A(x) < 0$ или $A(x) < -\alpha$ ($\alpha > 0$); $|\rho_n| < \sum_{m=1}^{n} \exp \int_{x_m}^{x_n} A(x)\, dx\, (B+C) |h|^5 < \left((b-a)/e^{\alpha h}\right)(B+C) |h|^4$.

Указанная теорема и ее следствия распространяются на системы дифференциальных уравнений. Описанный метод (1) аналогичен методам Рунге-Кутта и Власова — Чарного. И. Ф. Шелихова

10928. Матричный расчет балок с переменными моментами инерции. Бэй (Matrix solution of beams with variable moments of inertia. Pei Ming L.), J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1959, 85, № 8, 1—14 (англ.)

Изгибающий момент $M = M(x)$ и прогиб балки y под действием переменной силы $q = q(x)$ описываются следующими дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$d^2M/dx^2 = q; \quad d^2y/dx^2 = M/EI. \qquad (1)$$

Здесь: E — модуль упругости материала, I — момент инерции сечения. Используя метод конечных разностей, легко свести решение уравнений (1) к решению систем алгебраических уравнений. Подробно рассматриваются вопросы сведения уравнений (1) к системам линейных алгебраических уравнений и решения последних с помощью матричных методов. Ю. Ю. Барабошкин

10929. Усиление оценки погрешности, полученной Крыловым для решения краевых задач методом Ритца—Галеркина. Бертрам (Verschärfung einer Fehlerabschätzung zum Ritz — Galerkinschen Verfahren von Krylloff für Randwertaufgaben. Bertram G.), Numer. Math., 1959, 1, № 3, 135—141 (нем.)

Излагаются вопросы, относящиеся к оценке максимальной погрешности, получающейся при приближенном решении методом Ритца — Галеркина краевой задачи: $f_2(x) y'' + f_1(x) y' + f_0(x) y = f(x)$; $y(a) = A$; $y(b) = B$, где функции f_0, f_1, f_2 и f непрерывны и имеют непрерывные производные; $f_2 > 0$; $f_0 < 0$. Приводятся для ряда случаев весьма эффективные оценки погрешности, получаемой в n-м приближении, предложенные Крыловым: $|f_n| = |y - y_n| < (n, Q) \|r\|$, где $C(n, Q) = \frac{Q + \pi^2}{\sqrt{2}(n+1)^2\pi^4} \sqrt{Q + (n+1)^2\pi^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$;

$$\left(\|r\|^2 = \int r^2 dx\right)$$

и

$$(f_n) \leqslant D(n, Q) \left\| \frac{r}{q} \right\|, \qquad (1)$$

где

$$D(n, Q) = \left\{1 + \frac{Q(n+1)^2 \left[\sqrt{\pi^4 n^3} + \sqrt{3?}\right]}{\sqrt{96\pi n^3 (n+1)}\left[\pi^2 (n+1)^2 - Q\right]}\right\} \times \sqrt{\frac{Q}{(n+1)^3\pi^3}} = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

$q(x)$ и $r(x)$ в $[0, 1]$ непрерывны и действительны: $0 \leqslant q(x) \leqslant Q$. На числовом примере показано, что оценка (1) неприменима в случае, когда $q(x)$ слишком быстро стремится к 0, т. е. $\int (r^2/q)\, dx$ не существует. Выводятся путем модификации и уточнения оценки Крылова более общая формула, приложимая для фактической оценки погрешности решения и в случаях, аналогичных указанному выше; эта оценка асимптотически стремится к 0 как $1/\left(n\sqrt{n}\right)$ при $n \to \infty$ и имеет в своем составе не постоянные величины, а функции от x, которые могут быть легко определены по данным задачи: $|f_n| = E(n, Q; x) \|r\|$, где

$$E(n, Q; x) = \left\{\left(\frac{x(1-x)}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{x^2(1-x)^2}{3} - 2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin^2 \nu\pi x}{\nu^4 \pi^4}}\right) \frac{Q}{(n+1)^2\pi^2 - Q} + \sqrt{\frac{2}{(n+1)^3\pi^3}}\right\}\left(\frac{Q}{\pi^2} + 1\right);$$

$((n+1)^2\pi^2 > Q)$. При выводе этой формулы существенно используются свойства отрицательной определенности функции Грина (с ее билинейным разложением). Для конкретной задачи проведено сравнение действительной погрешности с вычисленной на основании полученной формулы. Библ. 4 назв. И. Ф. Шелихова

10930. Решение дифференциальных уравнений в частных производных на автоматических вычислительных машинах. Хоскин (The solution of partial differential equations by automatic calculating machines. Hoskin N. E.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 147—152. Discuss., 152—153 (англ.)

Краткий обзор некоторых основных численных методов (в первую очередь, метода сеток), применяющихся для интегрирования дифференциальных уравнений. Рассматриваются отдельно случаи параболических, гиперболических и эллиптических уравнений. Более подробно рассмотрены эллиптические уравнения. В частности, автор остановился на итерационных методах решения систем эллиптических сеточных уравнений: методе Ричардсона, методе Либмана и методе последовательной верхней релаксации. В. К. Саульев

10931. Оценка ошибки при решении параболических дифференциальных уравнений. Никкель (Fehlerabschätzungen bei parabolischen Differentialgleichungen. Nickel Karl), Math. Z., 1959, **71**, № 3, 268—282 (нем.)

В $(n+1)$-мерной области $G(x, y_1, \ldots, y_n)$, ограниченной плоскостями $x = x_0$ и $x = x_1$ и поверхностью Γ_ν, удовлетворяющей некоторым условиям, рассматривается уравнение

$$z'_x - f(x, y_1, \ldots, y_n, z, z'_{y_1}, \ldots, z'_{y_n}, z''_{y_1y_1}, z''_{y_1y_2}, \ldots, z''_{y_ny_n}) = 0 \quad (1)$$

в последующем обозначаемое $z'_x - f(x, \mathbf{y}, z, z'_y, z''_{yy}) = 0$. На границе требуется выполнение условий:

$$z|_{x=x_0} - \zeta(\mathbf{y}) = 0 \quad (2)$$

и

$$(\partial z/\partial \nu) - h(x, \mathbf{y}, z)\,|_{\Gamma_\nu} = 0, \quad (3)$$

где ν — направление, определяемое вектором, лежащим в плоскости $x = \text{const}$, и нормальным к сечению границы Γ_ν этой плоскостью. Частным случаем условия (3) будет условие

$$(\partial z/\partial \nu) - h_1(x, \mathbf{y})\, z - h_2(x, \mathbf{y})\,|_{\Gamma_\nu} = 0, \quad h_1(x, \mathbf{y}) > 0. \quad (4)$$

Предполагаем, что $f(x, y_1, \ldots, y_n, r, s_1, \ldots, s_n, t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{nn})$ монотонно растет по t_{ij}, т. е. $f(x, \mathbf{y}, r, s, t_1) \geqslant f(x, \mathbf{y}, r, s, t)$, если матрица $t_1 - t \geqslant 0$. Решение z уравнения (1) при условиях (2) и (4) оценивались, как правило, с помощью приближенного решения v некоторой „близкой" задачи следующим образом. Пусть $|v'_x - g(x, \mathbf{y}, v, v'_y, v''_{yy})| \leqslant \delta(x)$ в G, $|v'_\nu - k_1(x, \mathbf{y})\, v - k_2(x, \mathbf{y})| \leqslant \theta(x, \mathbf{y})$ на Γ_ν, $|v - \zeta(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon(x)$ на Γ^*, где Γ^* — часть границы, в простейших случаях лежащая на плоскости $x = x_0$,

$$|f(x, \mathbf{y}, s, v'_y, v''_{yy}) - g(x, \mathbf{y}, t, v'_y, v''_{yy})| \leqslant \omega(x, s-t) \quad (5)$$

для $s \geqslant t$. Тогда $|z - v| \leqslant \sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — наибольшее решение обыкновенного дифференциального уравнения $\sigma'_x = \omega(x, \sigma) + \delta(x)$, $\sigma(x_0) = \varepsilon(x_0)$, удовлетворяющее дополнительному условию $h_1(x, y)\,\sigma(x) \geqslant \theta(x, y) + |v(x, y)[k_1(x, y) - h_1(x, y)] + k_2(x, y) - h_2(x, y)$ на Γ_ν.

Автор отмечает, что в (5) можно отбросить значки абсолютной величины, если требовать, чтобы выполнялось условие $\sigma(x) \geqslant \varepsilon(x)$. Это существенно улучшает оценки, позволяя взять в (5) отрицательные ω. Приведен пример оценки решения нелинейного уравнения. Л. А. Оганесян

10932. Приближенные решения параболических уравнений. Лиз (Approximate solutions of parabolic equations. Lees Milton), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 2, 167—183 (англ.)

Нелинейное параболическое уравнение

$$(\partial/\partial x)(p(x, t)(\partial u/\partial x)) = F(x, t, u, (\partial u/\partial x), (\partial u/\partial t)) \quad (1)$$

с простейшими граничными условиями решается численно при помощи модифицированного неявного сеточного уравнения

$$[p(x + (h/2), t)\, \varphi_x(x, t)]_{\overline{x}} = F(x, t, \varphi(x, t-l), \varphi_{\widetilde{x}}(x, t-l), \varphi_{\overline{t}}(x, t)) \quad (2)$$

и при помощи уравнения Кранка — Николсона

$$\left[p\left(x + \frac{h}{2}, t - \frac{l}{2}\right)\varphi_x(x, t)\right]_{\overline{x}} + \left[p\left(x + \frac{h}{2}, t - \frac{l}{2}\right)\varphi_x(x, t-l)\right]_{\overline{x}} = 2F\left(x, t - \frac{l}{2}, \frac{\varphi(x, t) + \varphi(x, t-l)}{2}, \frac{\varphi_{\widetilde{x}}(x, t) + \varphi_{\widetilde{x}}(x, t-l)}{2}, \varphi_{\overline{t}}(x, t)\right). \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения

$$\varphi_x(x, t) = (1/h)[\varphi(x + h, t) - \varphi(x, t)],$$
$$\varphi_{\overline{t}}(x, t) = (1/l)[\varphi(x, t) - \varphi(x, t-l)],$$
$$\varphi_{\widetilde{x}}(x, t) = (1/2h)[\varphi(x + h, t) - \varphi(x - h, t)]$$

и т. д. Сеточное уравнение (3) требует на каждом слое решения, вообще говоря, нелинейной системы уравнений. Сеточное уравнение (2), в частном случае, когда имеет место $F(x, t, z, p, q) = F_1(x, t, z, p,) + F_2(x, t, z, p)\, q$, требует на каждом слое решения линейной системы уравнений с трехдиагональной матрицей. В этом его преимущество перед классическим неявным уравнением, в котором функции φ и $\varphi_{\widetilde{x}}$ взяты в узле (x, t). При обычных предположениях о гладкости решения уравнения (1) и естественном ограничении на само уравнение (1) автор доказывает, что погрешность в решении определяется величиной

$$\max|u - \varphi| = \begin{cases} O(h^2 + l) \text{ в случае уравнения (2)} \\ O(h^2 + l) \text{ в случае уравнения (3),} \end{cases}$$

где максимум распространен на всю сетку. Доказательство основывается на оценке величины $u - \varphi$ и ее первых разностных отношений в смысле метрики пространства L_2, откуда следует такая же оценка (с точностью до постоянной, не зависящей от h и l) в смысле метрики пространства C. Автор рассматривает также вопрос о решении методом итераций нелинейных систем, возникающих в общем случае на каждом слое.

В. К. Саульев

10933. Численная устойчивость при цифровых и аналоговых вычислениях задач диффузии. Франклин (Numerical stability in digital and analog computation for diffusion problems. Franklin J. N.), J. Math. and Phys., 1959, **37**, № 4, 305—315 (англ.)

Краевая задача

$$\partial U/\partial t = (1/x^2)(\partial/\partial x)(x^2(\partial U/\partial x)), \quad (1$$

$\partial U/\partial x = 0$ при $x = 0$ и $U = 0$ при $x = 1$, при аппроксимации производных по x приводится к виду

$$du/dt = Au, \qquad (2)$$

где A – соответствующий разностный оператор. Система (2) есть система обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие системы удобно решать на аналоговых вычислительных машинах (дифференциальный анализатор). Так как матрица, соответствующая оператору A, является симметризуемой (небольшая несимметричность матрицы вызывается левым граничным условием) и отрицательно определенной, система уравнений (2) устойчива. При использовании цифровых вычислительных машин в данном уравнении (1) аппроксимируется также производная по t. В результате получается система сеточных уравнений, которую можно записать в виде $v^{(n+1)} = C(\Delta t)\, v^{(n)}$, где сеточный оператор $C(\Delta t)$ определяется соотношением $C(\Delta t) = E + \Delta t\, A + O((\Delta t)^2)$ (E – единичная матрица). В частности, в случае простейшего явного сеточного уравнения $C(\Delta t) = E + \Delta t\, A$.

Автор полагает

$$C(\Delta t) = p(\Delta t\, A), \qquad (3)$$

где $p(z)$ – полином с вещественными коэффициентами вида $p(z) = 1 + z + \sum_{j=2}^{k} c_j z^j$. Очевидно, условие устойчивости оператора (3) определяется неравенством

$$|p(\lambda \Delta t)| \leqslant 1 \qquad (4)$$

для всех собственных значений λ матрицы A. Чтобы получить максимально устойчивый оператор (3) следует выбрать полином $p(z) = E_k(z)$, удовлетворяющий условию (4) на по возможности большом интервале $(-\tau \leqslant z \leqslant 0)$ отрицательной полуоси. Достаточные условия устойчивости оператора (3) имеют вид $\Delta t \leqslant \tau/-\lambda_m$, где λ_m – наибольшее отрицательное собственное значение матрицы A. Решением указанной проблемы на максимум является $E_k(z) = (-1)^k 2^{2k-1} T_{2k}(k^{-1}(-1/2z)^{1/2})$ (T_{2k} – полиномы Чебышева). В. К. Саульев

10934. О явном методе для решения задачи Стефана. Тренч (On an explicit method for the solution of a Stefan problem. Trench William F.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 2, 184—204 (англ.)

Задача Стефана: найти функции $x(t)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), && 0 < x < x(t), \quad t > 0,\\ &u_x(0,t) = -1, && t > 0\\ &u(x,t) = 0, && x \geqslant x(t), \qquad t \geqslant 0 \qquad (1)\\ &x(0) = 0,\\ &\dot{x}(t) = -u_x(x(t),t), && t > 0, \end{aligned}$$

решается методом сеток. При этом используются, в отличие, например, от работы (РЖМат, 1958, 2428), явные сеточные уравнения. Автор доказывает, что соответствующие сеточные решения при неограниченном измельчении сетки сходятся к $x(t)$ и $u(x,t)$ в интервале $0 \leqslant t < \infty$. Для каждого конечного интервала эта сходимость является равномерной. Доказательство сходимости сеточных решений к решению задачи (1) основывается на теореме Арцелла (из всякой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности функций можно выделить сходящуюся подпоследовательность) и поэтому не предполагает существования решения задачи (1). В. К. Саульев

10935. Об устойчивости двумерной «неявной схемы переменных направлений». Лоуан (On the stability of the two-dimensional «alternating derection implicit scheme». Lowan Arnold N.), Bul. Inst. politechn. Iași, 1958, 4, № 3-4, 69—72 (англ.; рез. русск., рум.)

Для численного интегрирования уравнения теплопроводности $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ Дуглас (РЖМат, 1957, 6688) предложил следующую схему „переменных направлений"

$$u_{i,j,2k+1} = u_{i,j,2k} + \alpha(u_{i-1,j,2k+1} - 2u_{i,j,2k+1}) + \\ + u_{i+1,j,2k+1} + \beta(u_{i,j-1,2k} - 2u_{i,j,2k} + u_{i,j+1,2k}), \qquad (1)$$

$$u_{i,j,2k+2} = u_{i,j,2k+1} + \alpha(u_{i-1,j,2k+1} - 2u_{i,j,2k+1} + \\ + u_{i+1,j,2k+1}) + \beta(u_{i,j-1,2k+2} - 2u_{i,j,2k+2} + u_{i,j+1,2k+2}). \qquad (2)$$

При этом Дуглас исследовал устойчивость метода (1), (2) в случае квадратной области, когда известны явные выражения собственных значений матрицы перехода с $2k$-го слоя на $(2k+2)$-й слой.

Автор, используя теорему Брауэра, согласно которой собственные значения матрицы (q_{ij}) лежат в интервалах, определяемых неравенствами $|\lambda - q_{kk}| < \rho_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |q_{ki}|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, показал абсолютную устойчивость метода (1), (2) в случае произвольных областей, границы которых проходят через узлы основной сетки. В. К. Саульев

10936. Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток. Халилов З. И., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1953, **6**, 5—13 (рез. азерб.)

Применяется метод сеток к решению граничной задачи для уравнения смешанного типа

$$(\partial^2 u/\partial x^2) + \Theta(y)(\partial^2 u/\partial y^2) = 0, \qquad (1)$$

где $\Theta(y) = 1$ при $y > 0$, $\Theta(y) = -1$, при $y < 0$, рассматриваемого в области D, ограниченной в верхней полуплоскости линией L с концами $A(0,0)$, $B(1,0)$ и ограниченной в нижней полуплоскости частями L_1 и L_2 характеристик. Сетка строится пересечением прямых, параллельных осям координат, в верхней полуплоскости, и прямых, параллельных характеристикам, в нижней полуплоскости. Для узлов, для которых $y > 0$, берется простейшее 5-точечное разностное уравнение для уравнения Лапласа; для узлов с $y < 0$ составляется разностное уравнение, соответствующее волновому уравнению; для узлов с $y = 0$ разностное уравнение составляется с учетом условия непрерывности производной du/dy при переходе через ось x. Доказывается единственность решения разностного уравнения и сходимость, при достаточно малом шаге сетки, разностного решения к решению дифференциального уравнения. Для решения системы разностных уравнений применяется метод последовательных приближений. Доказывается сходимость метода последовательных приближений. Автор отмечает, что при доказательстве указанных утверждений им использованы соответствующие материалы из книги И. Г. Петровского „Лекции об уравнениях с частными производными" (1950). Д. Ф. Давиденко

10937. Границы ошибки при конечноразностной аппроксимации решения симметричных гиперболических систем. Уэйнбергер (Error bounds in finite-difference approximation to solutions of symmetric hyperbolic systems. Weinberger H. F.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 1, 49—75 (англ.)

Система M дифференциальных уравнений

$$\sum_{\alpha=0}^{N} A^{\alpha}(x^0, x^1, \ldots, x^N)(\partial u/\partial x^{\alpha}) + \\ + B(x^0, x^1, \ldots, x^N)u = f(x^0, x^1, \ldots, x^N) \qquad (1)$$

называется симметричной гиперболической системой если B — квадратные матрицы M-го порядка, $A^1, \ldots$

$..., A^N$ — симметричные матрицы и A^0 —положительно определенная симметричная матрица. Рассматривается начальная задача для системы (1):

$$u(0, x^1, \ldots, x^N) = g(x^1, \ldots, x^N). \quad (2)$$

Начальная задача (1)—(2) аппроксимируется соответствующей конечноразностной системой уравнений. Показывается, что если коэффициенты системы (1) имеют ограниченные вторые производные, а f и g имеют интегрируемые с квадратом вторые производные, то корень средней квадратической на плоскости $x^0=T$ величины ошибки $|u-\psi|$ (ψ — решение конечноразностной системы) мажорируется величиной ch, где h — шаг сетки, а c зависит только от коэффициентов уравнения (1) и их производных. Эта граница ошибки выводится на основании энергетического неравенства (интеграл от квадрата решения задачи (1), (2), взятый в области пространственных переменных $x^1,..., x^N$, мажорируется интегралами от квадратов начальных значений (2) решения и неоднородного члена в (1)), аналог которого устанавливается автором на случай системы конечноразностных уравнений. Если A^α и B имеют ограниченные производные, а f и g интегрируемые с квадратом до порядка $p+2$, где $p>N/2$, то выводится равномерная (точечная) также априорная оценка для величины погрешности $(u-\psi)$. При этом используются результаты С. Л. Соболева (теоремы вложения). В. К. Саульев

10938. Метод характеристик для расчета изоэнергетического сверхзвукового потока, приспособленный на быстродействующие вычислительные машины. Элерс (The method of characteristics for isoenergetic supersonic flows adapted to high-speed digital computers. Ehlers F. Edward), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7 № 1, 85—100 (англ.)

При помощи преобразования независимых переменных характеристические уравнения изоэнергетического сверхзвукового потока сводятся к следующей системе дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются рациональными алгебраическими функциями

$$(dy/dx) = A^{\pm}(\beta, \xi) \quad (1)$$

$$E(\xi)\,d\xi \mp F(\beta)\,d\beta \mp G(\beta)\,ds \pm \frac{jH^{\pm}(\beta, \xi)\,dy}{y} = 0, \quad (2)$$

где

$$A^{\pm}(\beta, \xi) = \frac{\beta\xi \pm 1}{\xi \mp \beta}, \quad F(\xi) = \frac{1}{\xi^2+1},$$

$$F(\beta) = \frac{2\beta^2}{(\beta^2+1)[(\gamma-1)\beta^2+(\gamma+1)]},$$

$$G(\beta) = \frac{\beta}{\gamma(\gamma-1)(\beta^2+1)}, \quad H^{\pm}(\beta, \xi) = \frac{\xi}{(\beta\xi \pm 1)}.$$

Это „значительно уменьшает время вычисления каждого шага в процессе численного интегрирования". Уравнения (1) и (2) решаются численно путём их замены разностными уравнениями, которые решаются методом итераций. В новых переменных рассмотрены также случаи ударной волны, свободной поверхности и пр.

10939. Исследование газовой пленки смазки. Часть 2. Численное решение уравнения Рейнольдса для конечной скользящей опоры. Майкл (A gas film lubrication study. Part 2. Numerical solution of the Reynolds equation for finite slider bearings. Michael W. A.), IBM J. Res. and Developm., 1959, **3**, № 3, 256—259 (англ.)

Уравнение Рейнольдса для давления $p(x, y)$, которое автор записывает в виде

$$p(p_{xx}+p_{yy}) = ((6\mu U/nh^2) - (3ph_x/h))\,p_x - (3ph_y/h)\,p_y - 1/n\,(p_x^2+p_y^2) + 6\mu U(ph_x/h^3) \quad (1)$$

(здесь μ — вязкость, U — скорость движения поверхности, $h=h(x, y)$ — толщина пленки), аппроксимируется сеточным уравнением

$$p_{k,m}^2 - 2G_{k,m}\,p_{k,m} + H_{k,m} = 0, \quad (2)$$

где

$$2G_{k,m} = (p_{k+1,m}+p_{k-1,m})/\Gamma(\Delta x)^2 + (p_{k,m+1}+p_{k,m-1})/\Gamma(\Delta x)^2 + (3h_x(p_{k+1,m}-p_{k-1,m})/2\Gamma(\Delta x)h + (3h_y(p_{k,m+1}-p_{k,m-1})/2\Gamma(\Delta y)h - 6\mu U h_x/\Gamma h^3,$$

$$H_{k,m} = (3\mu U/\Gamma h^2(\Delta x)n)(p_{k+1,m}-p_{k-1,m}) - (1/4\Gamma(\Delta x)^2 n)(p_{k+1,m}-p_{k-1,m})^2 - (1/4\Gamma(\Delta y)^2 n) \times (p_{k,m+1}-p_{k,m-1})^2, \quad \Gamma = (2/(\Delta x)^2) + (2/(\Delta y)^2).$$

Погрешность этой аппроксимации равна $O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta y)^2]$. Система сеточных уравнений (2) с дополнительными условиями, соответствующими краевым условиям для уравнения (1), решается „экстраполяционным методом Либмана". Кратко обсуждается программа на машину ИБМ-650. В. К. Саульев

10940. Заметка о численном интегрировании некоторого класса нелинейных гиперболических уравнений. Белман, Черри, Уинг (A note on the numerical integration of a class of non-linear hyperbolic equations. Bellman R., Cherry I., Wing G. M.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 2, 181—183 (англ.)

Излагается новый метод численного решения гиперболического уравнения вида

$$u_t = g(u)\,u_x + h(u, x, t), \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

При применении обычных конечноразностных схем в большинстве случаев возникает неустойчивость из-за наличия «ударных волн». Этот метод иллюстрируется в применении к задаче $u_t = -uu_x$ $u(x, 0)=f(x)$, решение которой удовлетворяет соотношению

$$u(x, t) = f(x - u(x, t)t). \quad (3)$$

Так как $u_x(x, t) = f'(E) : [1+t\cdot f'(E)]$, где $E = x - u(x, t)\cdot t$, то вдоль линии $1+t\cdot f'(E)=0$, называемой слабой ударной волной, u_x претерпевает разрыв. Вместо обычного конечноразностного метода употребляется схема

$$u(x, t+\Delta) = u(x - u(x, t)\Delta, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad (4)$$

где t принимает значения $0, \Delta, 2\Delta, \ldots$. Выражение (3), как легко видеть, эквивалентно (4) с точностью до членов порядка Δ. Этим, по-видимому, и объясняется успех, обнаруженный при непосредственном расчете, результаты которого приведены в статье. Названный расчет осуществлялся для значений x, выбранных с некоторым шагом δ, величина которого никак не связана с Δ. При переходе на следующий слой по t осуществлялась шеститочечная интерполяция по Лагранжу. По аналогии с изложенным предлагается следующая схема для решения задачи (1), (2): $u(x, t+\Delta) = u(x - g(u(x, t))\Delta, t) + h(u(x, t), x, t)\Delta$, $u(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Отмечается, что этот метод обобщается в интересах решения задачи Коши для системы: $u_t = G(u, v, x, y)u_x + H(u, v, x, y)u_y + g(u, v, x, y)$, $v_t + M(u, v, x, y)v_x = N(u, v, x, y)v_y + h(u, v, x, y)$ в виде схемы $u(x, y, t+\Delta) = u(x+G\Delta, y+H\Delta, t) + g\Delta$, $v(x, y, t+\Delta) = v(x+M\Delta, y+N\Delta, t) + h\Delta$. Однако, как указывают авторы, попытка обобщения этого метода на общие системы гиперболических уравнений с одной пространственной координатой успеха не имеет, ибо возникает неустойчивость. А. Д. Горбунов

10941. Численное решение проблемы колебаний с двумя пространственными координатами. Конт (Numerical solution of vibration problems in two space

variables. Conte S. D.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1535—1544 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$W_{x^2} + 2W_{x^2y^2} + W_{y^4} + W_{t^2} = 0, \quad (x, y) \in R = (0 < x < 1;\ 0 < y < 1),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

поперечных колебаний $W(x, y, t)$ однородной тонкой пластинки с определенными начальными и краевыми условиями $W(x, y, 0) = f(x, y)$, $W_t(x, y, 0) = 0$, $(x, y) \in R$; $W(x, y, t) = W_{x^2}(x, y, t) = 0$ при $x = 0, 1$ для $0 < y < 1$, $t > 0$; $W(x, y, t) = W_{y^2}(x, y, t) = 0$ при $y = 0, 1$ для $0 < x < 1$, $t > 0$. (2)

В параллелепипеде $R \times [0, T]$ вводится прямоугольная сетка с шагами h, k и τ соответственно по осям x, y и t, $h = k = 1/M$. M — натуральное число. Задача (1), (2) аппроксимируется парой конечноразностных уравнений с соответствующими условиями:

а)

$$\tfrac{1}{2}\Delta_x^4[w^*_{ijn+1} + w_{ijn-1}] + 2\Delta_x^2\Delta_y^2 w_{ijn} + \Delta_y^4 w_{ijn} + (w^*_{ijn+1} - 2w_{ijn} + w_{ijn-1})/\tau^2 = 0,$$

б)

$$\tfrac{1}{2}\Delta_y^4[w_{ijn+1} + w_{ijn-1}] = \Delta_y^4 w_{ijn} - (w_{ijn+1} - w^*_{ijn+1})/\tau^2, \tag{3}$$

$(ih, jk) \in \bar{R}$, $0 \leqslant n\tau \leqslant T$; в) $w_{ij0} = w_{ij1} = f_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, M-1$; г)

$w_{0jn} = w_{Mjn} = 0$, $w_{i+1in} = -w_{i-1jn}$, $i = 0, M$, $j = 1, \ldots, M-1$, $0 \leqslant n\tau \leqslant T$; д) $w_{i0n} = w_{iMn} = 0$, $w_{ij+1n} = -w_{ij-1n}$, $j = 0, M$, $i = 1, \ldots, M-1$, $0 \leqslant n\tau \leqslant T$, где $f_{ij} = f(ih, jk)$

и в условиях г) и д) $w^*_{ijn} = w_{ijn}$. Названная система решается относительно w_{ijn} с промежуточным отысканием величины w^*_{ijn} и поэтому она эквивалентна системе

$$\tfrac{1}{2}\Delta_x^4[w_{ijn+1} + w_{ijn-1}] + 2\Delta_x^2\Delta_y^2 w_{ijn} + \tfrac{1}{2}\Delta_y^4[w_{ijn+1} + w_{ijn-1}] + \Delta_t^2 w_{ijn} + \tfrac{1}{4}\tau^2\Delta_x^4\Delta_y^4[w_{ijn+1} - 2w_{ijn} + w_{ijn-1}] = 0 \tag{4}$$

с соответствующими граничными условиями. Показывается, что схема, определяемая уравнениями (4) с соответствующими граничными условиями, безусловно устойчива и что при достаточной гладкости функции $f(x, y)$ она сходится в том смысле, что

$$(1/(M-1))\left(\sum_{i,j=1}^{M-1} |W_{ijn} - w_{ijn}|^2\right)^{1/2} = O((h^6/\tau^2) + \tau^2),$$

$$W_{ijn} = W(ih, jk, n\tau).$$

Кроме того, рассматривается точечная сходимость еще одной схемы, которая незначительно отличается от схемы (3). А именно, строится последовательность функций

$$w_M(x, y, t) = \sum_{p=1}^{K(M)}\sum_{q=1}^{K(M)} B_{pq}\sin p\pi x \sin q\pi y \cos(M^2 t/r) \arccos \lambda_1/\lambda_2,$$

где $K(M) \to \infty$ при $M \to \infty$, причем $K(M) < M^{1/5}$, $r = \tau/h^2 = \tau/k^2$, $\lambda_1 = (1 - 8r^2 s_p^2 s_q^2)^2$, $\lambda_2 = (1 - 8r^2 s_p^2 s_q^2)^2 + 8r^2(s_p^2 + s_q^2)$, $s_p = \sin(p\pi/2M)$, $s_q = \sin(q\pi/2M)$. При произвольных числах B_{pq} эти функции удовлетворяют системе (3), за исключением условия (3) в). Если числа B_{pq} подобрать так, чтобы выполнялись неравенства $|B_{pq} - A_{pq}| < \varepsilon M^{-2.5}$, $1 \leqslant p, q \leqslant K(M)$, где ε — произвольное положительное число и

$$A_{pq} = \int_0^1\int_0^1 f(x, y)\sin p\pi x \sin q\pi x\, dx\, dy,$$

то при произвольных допустимых фиксированных x, y, t и r $\lim_{M\to\infty} w_M(x, y, t) = W(x, y, t)$. Библ. 2 назв.

А. Д. Горбунов

10942. Численное интегрирование по площади треугольника. Бартоломью (Numerical integration over the triangle. Bartholomew Gerald E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, 13, № 68, 295—298 (англ.)

Первое приближение получается по формуле

$$\iint_T f(u, v)\, du\, dv \cong \sum_i \omega_i f(u_i, v_i), \tag{1}$$

в которой T — треугольник, $\omega_i = A/3$ для всех значений i, а точки (u_i, v_i) суть середины сторон треугольника. Далее треугольник T делится на четыре треугольника соединением середин сторон. Затем по формуле (1) вычисляется приближенное значение интеграла для каждого треугольника. Сумма этих значений дает второе приближение. Такой процесс продолжается до получения требуемого по точности результата и обрывается при $|I_n - I_{n-1}| < \varepsilon$, если I_n есть n-приближение. Рассматривается способ последовательного вычисления координат точек (u_i, v_i) и схема вычисления на автоматической цифровой машине ИБМ-650, основанные на методе, изложенном ранее в работе (РЖМат, 1957, 4387).

А. Б. Штыкан

10943. О численном интегрировании функций многих переменных. Станку (Contribuţii la integrarea numerică a funcţiilor de mai multe variabile. Stancu D. D.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1957, 8, № 1-2 75—101 (рум.; рез. русск., франц.)

Выводятся формулы для приближенного вычисления n-кратного интеграла распространенного на n-мерный прямоугольный параллелепипед. Главной задачей автора является вывод остаточных членов таких формул. В основу вывода положен известный общий метод исследования формул для приближенного вычисления двойных интегралов (Стефенсен И. Ф., Теория интерполяции, М.—Л., 1935, с. 0 — с. 6; РЖМат, 1955, 1974К). Поэтому выведенные в реферируемой работе кубатурные формулы с остаточными членами вытекают из общей кубатурной формулы (РЖМат, 1955, 1974К, стр. 491) с остаточным членом, в котором необходимо лишь исправить опечатку: заменить 16 на 4. После исправления получим

$$R = 4kh\left[\frac{nh^{2r+2}}{(r+)!}D_\xi^{2r+2}\int_0^m tP(t)\,dt + \frac{mk^{2s+2}}{(s+)!}D_\eta^{2s+2}\int_0^n TQ(T)\,dT - \frac{h^{2r+2}k^{2s+2}}{(r+2)!(2s+)!}D_\xi^{2r+2}D_\eta^{2s+2}\int_0^m tP(t)\,dt\int_0^n TQ(T)\,dT\right], \tag{1}$$

откуда при $m = n = r = s = 1$ вытекает, в частности, формула (5) реферируемой работы, т. е. получается точное выражение остаточного члена формулы Кавальери — Симпсона. Формула (1) показывает, что некоторые из численных коэффициентов при $D_\xi^4 D_\eta^4$ стр. 94 реферируемой работы требуют исправления. Из них коэффициент 1/144 следует заменить на 1/3 400, а 196/9 на 196/2025. Выведены формулы для трехкратных интег-

ралов. Для интегралов любой кратности даны две формулы. Одна из них использует один узел, другая обобщает формулу Симпсона. Ш. Е. Микеладзе

10944. О численном интегрировании функции двух переменных. Станку (Asupra integrării numerice a funcțiilor de două variabile. Stancu D. D.), Studii și cercetări științ. Acad. RPR Fil. Iași Mat., 1958, 9, № 1, 5—21 (рум.; рез. русск., франц.)

Исследуются кубатурные формулы вида

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1} c_{i\nu k\mu}\left(\frac{\partial^{\nu+\mu} f(x,y)}{\partial x^{\mu}\partial y^{\mu}}\right)_{\substack{x=x_i\\ y=y_k}} + R[f] \qquad (1)$$

в области $D\,(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$. Формула (1) имеет степень точности $(M-1, N-1)$, если $M = r_1+r_2+\ldots+r_m$ и $N = s_1+s_2+\ldots+s_n$, а коэффициенты $c_{i\nu k\mu}$ определяются либо с помощью интерполяционной формулы: $f(x, y) = L(x, y; f) + r(x, y; f)$, где $L(x, y; f)$ есть интерполяционный полином степени $(M-1, N-1)$; либо по формулам: $c_{i\nu k\mu} = A_{i,\nu}B_{k,\mu}$; $A_{i,\nu} = (1/\nu!\,(r_i-\nu-1)!)\,\varphi_i^{(r_i-\nu-1)}(x_i)$ $(\nu = 0,\ldots,r_i-1;\ i = 1,\ldots,m)$; $B_{k,\mu} = (1/\mu!\,(s_k-\mu-1)!)\,\psi_k^{(s_k-\mu-1)}(y_k)$ $(\mu = 0,\ldots,s_k-1;\ k = 1,\ldots,n)$.

При предположении, что корни многочленов $g(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{r_i}$; $h(y) = \prod_{k=1}^{n}(y-y_k)^{s_k}$; $g_i(x) = g(x)/(x-x_i)^{r_i}$; $h_k(y) = h(y)/(y-y_k)^{s_k}$ имеют нечетные кратности, автор определяет x_i и y_k так, чтобы кубатурная формула (1) имела максимальную степень точности (по отношению к x и y). Для этого необходимо и достаточно выполнение равенств $\int_a^b g(x)x^l dx = 0$; $\int_c^d h(y)\,y^k dy = 0$. Получена формула, имеющая степень точности $(M+m-1, N+n-1)$, аналогичная формуле (1). Указывается, что полученная кубатурная формула может быть обобщена; при этом для того чтобы она имела максимальную степень точности, необходимо и достаточно выполнение условий: $\int_a^b \omega(x)\,g(x)\,x^l dx = 0$ и $\int_c^d w(y)\,h(y)\,y^k dy = 0$, где $\omega(x) = A\prod_{\nu=1}^{s}(x-a_\nu)^{\alpha_\nu}$ $(A \neq 0)$ и $w(y) = B\prod_{\mu=1}^{r}(y-b_\mu)^{\beta_\mu}$ $(B \neq 0)$. Приведен числовой пример. И. Ф. Шелихова

10945. Метод построения кубатурных формул для функций двух переменных. Станку (O metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcțiile de două variabile. Stancu D. D.), Studii și cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1958, 9, № 1-4, 351—369 (рум.; рез. русск., франц.)

Метод построения кубатурных формул, предложенный автором для функции одной переменной, распространяется на случай двух переменных. Для случая двух переменных получена интерполяционная формула Лагранжа — Эрмита в форме:

$$f(x, y) = L_{N,M}(x, y) + R_{N,M}(f; x, y), \qquad (1)$$

где $L_{NM}(x, y)$ состоит из 9 слагаемых: четырех слагаемых вида: $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} l_\nu^{(1)}(x)\,\omega_\mu^{(1)}(y)\,f(x_\nu, y_\mu)$; четырех слагаемых вида: $\sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{\mu=1}^{m} l_{i_1,\nu_1}(x)\,\omega_\mu^{(1)}(y) \times \times(\partial^{\nu_1} f(a_{i_1}, y_\mu)/\partial x^{\nu_1})$ и одного слагаемого вида:

$$\sum_{i_1=1}^{r}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{j_1=0}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} l_{j_1,\nu_1}(x)\,\omega_{j_1,\mu_1}(y)\,\frac{\partial^{\nu_1+\mu_1} f(a_{i_1}, b_{j_1})}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\mu_1}}.$$

Автор применяет интерполяционную формулу (1) для приближенного вычисления двойного интеграла

$$I = \iint_D p(x, y)\,f(x, y)\,dxdy,$$

где $D\,(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ и $p(x, y)$ — данная неотрицательная, интегрируемая в области D функция. Выбрав в качестве значений $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ корни ортонормированных многочленов $Q_n(x)$ и $R_m(y)$, зависящих от системы ортогональных на $[a, b]$ полиномов с весом $p_1(x)$ и на $[c, d]$ с весом $p_2(y)$, автор находит кубатурную формулу вида:

$$\iint_D p(x, y)\,f(x, y)\,dxdy = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu,\mu}\,f(x_\nu, y_\mu) + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{\mu=1}^{m} G_{i_1,j_1,\mu}(\partial^{\nu_1} f(a_{i_1}, y_\mu)/\partial x^{\nu_1}) + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} H_{\nu,j_1\mu_1}(\partial^{\mu_1} f(x_\nu, b_{j_1})/\partial y^{\mu_1}) + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{j_1=1}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} I_{i_1\nu_1 j_1\mu_1}\frac{\partial^{\nu_1+\mu_1} f(a_{i_1}, b_{j_1})}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\mu_1}} + \rho[f]. \qquad (2)$$

Из общей формулы (2) строится несколько частных кубатурных формул. При этом кубатурные формулы типа формулы Гаусса, обладающие максимальной степенью точности, содержат в четыре раза меньше членов, чем формулы той же степени точности со случайно распределенными узлами. Приведены числовые примеры. И. Ф. Шелихова

10946. О знаках коэффициентов квадратурной формулы Котеса. Крылов В. И., Докл. АН БССР, 1959, 3, № 11, 435—439

Рассматривается вопрос о знакопостоянстве коэффициентов A_k квадратурной формулы Котеса

$$\int_0^1 p(x)\,f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(k/n). \qquad (1)$$

Предварительно устанавливается, что для любых интерполяционных квадратур с положительной весовой функцией на отрезке интегрирования число квадратурных коэффициентов, равных нулю, не больше числа отличных от нуля коэффициентов, отвечающих внутренним узлам отрезка интегрирования, и получается некоторое неравенство относительно наибольшего узла квадратурной формулы типа Маркова с одним узлом в верхнем пределе интегрирования. Произведена оценка близости к единице наибольшего корня многочлена Якоби для отрезка $[0, 1]$ с параметрами $\alpha, \beta > -1$. Для формулы (1) при $p(x) = x^\beta(1-x)^\alpha$ доказывается теорема 3:

Среди коэффициентов A_k формулы (1) существуют отрицательные для всякого n, удовлетворяющего одной из двух указанных ниже систем условий. 1) При $\beta \geqslant 0$ выполняются неравенства $m \geqslant 2$, $m \geqslant \alpha+3-(\alpha+3)^{-1}$, $(1/n) \geqslant 2\,[\,\mu(\alpha+3)+1+\sqrt{4\mu^2(\alpha+3)^2+1-4\mu\beta}\,]^{-1}$, где m — целая часть числа $n/$, $\mu = m(m+\alpha+\beta+2)/(\alpha+\ )(\alpha+3)(\alpha+4)$;) При $-1 < \beta < 0$ выпол-

няются неравенства $m \geqslant (1/2)[(\sqrt{5}-1)\alpha + 2\sqrt{5}]$, $1/n \geqslant [\mu(\alpha+3) + \sqrt{\mu^2(\alpha+3)^2 - \mu(\alpha+\beta+3)}]^{-1}$.

Л. А. Янович

10947. О численном интегрировании периодических функций нескольких переменных. Сюй (Concerning the numerical integration of periodic functions of several variables. Hsu L. C.), Acta scient. math., 1959, 20, № 4, 230—233 (англ.)

Рассматривается задача о приближенном вычислении интеграла

$$J = (\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(x_1, \dots, x_m)\, dx_1, \dots, dx_m$$

от периодической функции $f(x_1, \dots, x_m)$, обладающей всеми непрерывными производными до порядка p включительно ($p > 3$). Показывается, что при $N = R^m$, R целом

$$\left| J - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k\pi}{R}, \dots, \frac{2k\pi}{R^m}\right) \right| \leqslant 2A_3(p)\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{p}{m}} + o\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{p}{m}}\right).$$

Отметим, что такая же оценка, являющаяся по порядку неулучшаемой, имеет место при применении формулы прямоугольников, а в непериодическом случае при повторном применении формулы Грегори порядка p.

Н. С. Бахвалов

10948. Об одном аналоге эйлерова метода увеличения точности механических квадратур. Кеда Н. П., Докл. АН БССР, 1960, **4**, № 2, 43—46

Рассматривается увеличение точности квадратурной формулы $\int_0^1 P(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$ с остатком $R(f) = \int_0^1 f^{(m)}(x) L(x)\, dx$, где $L(x)$ не зависит от f. Следуя В. И. Крылову (РЖМат, 1956, 1677), автор для $R(f)$ получает выражение

$$R(f) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i [f^{(m+2i)}(0) + f^{(m+2i)}(1)] + R_p(f),$$

где $R_p(f) = \int_0^1 f^{(m+2p)}(t)\, \varkappa_p(t)\, dt$, $\varkappa_p(t) = {}^1/_2 (2p-1)! \int_0^1 K_{2p-1}(|x-t|) L(x)\, dx$, $c_i = {}^1/_2 (2i)! \times \int_0^1 K_{2i}(x) L(x)\, dx$, $K_i(x)$ — многочлены Эйлера. Для формулы трапеции приводятся явные выражения c_i и $\varkappa_p(t)$ и формулируются три теоремы относительно остатка $R_p(f)$.

Л. А. Янович

10949. О вычислении некоторых многомерных нормальных интегралов. Им (Numerical evaluation of certain multivariate normal integrals. Ihm Peter), Sankhya, санкия. Indian J. Statist., 1959, **21**, № 3-4, 363—366 (англ.)

Вычисление n-мерного нормального интеграла по области B с плотностью распределения, задаваемой матрицей $A = D + c^{-2} ii'$, где D — матрица некоторой положительно определенной квадратичной формы, i — вектор-столбец, c^{-2} — скаляр, сводится к вычислению аналогичного интеграла, плотность распределения которого определяется матрицей D и параметром τ, и к последующему интегрированию по τ полученного выражения, умноженного на $e^{-\frac{1}{2}c^2\tau^2}$. Вычисления упрощаются, когда D — диагональная матрица, B — n-мерный интервал.

Л. А. Янович

10950. Линейная алгебра на машине Pilot ACE. Уилкинсон (Linear algebra on the Pilot ACE. Wilkinson J. H.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 129—135. Discuss., 135—136 (англ.)

Рассматриваются три вопроса: 1) решение систем совместных линейных алгебраических уравнений; 2) умножение матриц; 3) вычисление собственных значений и векторов матриц. Системы алгебраических уравнений с полными матрицами невысокого порядка (порядка нескольких десятков) на машине Pilot ACE решаются методом исключения с выборкой главного элемента. Системы с большим числом нулевых коэффициентов (системы сеточных уравнений) решаются итерационным методом Гаусса — Зейделя. Для нахождения собственных значений и собственных векторов ($Ax = \lambda x$) составлены три программы на машину Pilot ACE, соответствующие следующим трем итерационным методам: 1) $\tilde{x}_{n+1} = Ax_n$, $x_{n+1} = \tilde{x}_{n+1}/N$, где N — множитель для нормировки. Если $\lambda_2 \sim \lambda_1$, то рекомендуется итерировать матрицу $A - pE$, где p — соответствующим образом выбранная константа. Остальные собственные значения и векторы вычисляются тем же путем, но уже с преобразованной матрицей (т. е. с матрицей, у которой вычисленные собственные значения суть нули). 2) Метод, основанный на последовательном возведении в квадрат матрицы A. 3) $\lambda_r = (x_r' A x_r) / (x_r' x_r)$, $x_{r+1} = x_r + \alpha(Ax_r - \lambda_r x_r)$, где α — некоторый параметр, а x_0, как и в случае 1), вообще говоря, произвольный вектор.

При оперировании с матрицами высоких порядков в программах предусмотрена возможность использования „промежуточной" памяти (перфокарты). Приводится время, необходимое для выполнения разных операций машиной Pilot ACE. Например, для итерации симметричной матрицы 19-го порядка требуется 2,5 сек., для итерации несимметричной матрицы 60-го порядка (с использованием промежуточной памяти) требуется 1,5 мин.

В. К. Саульев

10951. Метод быстрого нахождения решения системы линейных уравнений с главными диагональными элементами. Синго (Method of fast conversion for solving the linear simultaneous equations with principal diagonal coefficients. Shingo Takaichi), Доборку таккай фомбуниэ, Trans. Japan Soc. Civil Engrs, 1957, № 44, 53—62 (англ.)

Рассматривается метод решения системы линейных уравнений $ax = h$, $a = [a_{ij}]$, $x = \{x_i\}$, $h = \{h_i\}$ с матрицей a, в которой элементы $a_{ii} = 1$ и являются главными элементами. Тогда $x = a^{-1}h = \{I + (a-I)\}^{-1}h = (2I-a)Zh = Z(2I-a)h$, а $Z = \{I - (a-I)^2\}^{-1} = I + (a-I)^2 + (a-I)^4 + \dots$. Помимо непосредственного вычисления матрицы Z предлагается следующий путь нахождения решения. Находится приближение для матрицы Z: $Z \sim Z'$, где

$$Z' = z_{ii}\delta_{ik}, \quad z_{ii}' = \left(1 - \sum_{j, j \neq i} a_{ij} a_{ji}\right)^{-1},$$

(здесь δ_{ik} — символ Кронекера); за первое приближение к x берется величина $x' = (2I - a)Z'h$, затем решение x ищется в виде: $x = x' + \Delta^{\gamma} x'' + \Delta^2 x''' + \dots + \Delta^{\gamma} x^{(\gamma+1)} + \dots$, где $\Delta^{\gamma} x^{(\gamma+1)} = (2I - a) Z^{(\gamma+1)} \Delta^{\gamma} h$, $\Delta^{\gamma} h = \Delta^{\gamma-1} h - a\Delta^{\gamma-1} x^{\gamma} = a\Delta^{\gamma} x$, $\Delta^{\gamma} x = \Delta^{\gamma-1} x - \Delta^{\gamma-1} x^{\gamma}$; $\gamma = 1, 2 \dots$, $\Delta^0 h = h$, $\Delta^0 x = x$, $\Delta^0 x' = x'$.

Относительно матриц $Z^{(\gamma+1)}$ автор замечает, что они взяты вместо матрицы Z' в целях упрощения вычислений и ускорения сходимости. В заключении приводятся две схемы вычислений.

В. И. Лебедев

10952. О численном решении систем линейных уравнений. Паслек (Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. Passelecq D.)

Techn. tijdschr. U. I. Lv., 1959, 87, № 2, 21—32 (франц., рез. флам.)

Излагается метод решения систем n обыкновенных линейных уравнений с n неизвестными $[a_{jk}]\{x_k\}=\{c_j\}$ $(j,k=1,2,\ldots,n)$ с полной матрицей коэффициентов $A=[a_{jk}]$, основанный на приеме разложения квадратной матрицы порядка n в произведение двух треугольных матриц порядка n, т. е. $[a_{jk}]=[b_{jl}\mid 0]\,[0\mid b_{lk}]$. Идея метода состоит в том, что исходная система, записанная в виде $[b_{jk}\mid 0]\,[0\mid b_{lk}]\{x_k\}=\{c_j\}$, заменяется двумя новыми системами n уравнений с n неизвестными $[b_{jl}\mid 0]\{k_l\}=\{c_j\}$, $[0\mid b_{lk}]\{x_k\}=\{k_l\}$.

В первой из этих систем роль неизвестных играют члены $\{k_l\}$, которые вычисляются последовательно по следующей формуле: $k_n=(c_n-b_{n1}k_1-b_{n2}k_2-\ldots-b_{n,n-1}k_{n-1})/b_{nn}$. Из второй системы искомые значения $\{x_k\}$ определяются согласно формуле $x_j=(k_j-b_{j,j+1}x_{j+1}-\ldots-b_{jn}x_n)/b_{jj}$. Указывается, что при разложении матрицы системы на две треугольные, диагональные элементы нижней матрицы выбираются произвольно; другие элементы вычисляются на основании рекуррентных формул. На числовых примерах показаны два варианта вычислительной схемы (для несимметричной и симметричной матрицы A), а также показано, что все необходимые вычисления могут быть систематизированы в трех таблицах. Контроль вычислений осуществляется обычными методами (по столбцам сумм).

И. Ф. Шелихова

10953. Об одном приеме итерации при решении системы линейных уравнений. Суворовский П. П., Строит. механ. и расчет сооруж., 1960, № 1, 27—30

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с квадратной неособенной матрицей предлагается одна из модификаций «ручного» метода релаксации, при которой вычисления ведутся с наибольшими по абсолютной величине поправками (свободными членами). В случае «машинных» методов — метода простой итерации или итерации Зейделя — вычисления ведутся последовательно, независимо от величин поправок.

В. К. Саульев

10954. Итерационные процессы в строительной механике. Гофман Ш. М., Сб. научн. статей. Ташкентск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 9, 17—59

Рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений, матрицы которых симметричны и положительно определены. Все известные в строительной механике итерационные способы (одношаговые итерации — простая итерация, процесс Зейделя, смешанный итерационный процесс, итерация при помощи лучевой матрицы, итерация при помощи матрицы трехчленной структуры и аналогичные групповые итерации) автор рассматривает как варианты единого итерационного метода. Для этого общего итерационного метода выводится необходимое и достаточное условие сходимости, заключающееся в положительной определенности некоторой вспомогательной матрицы. Показывается, что для многих частных итерационных методов эта вспомогательная матрица является положительно определенной. Выводится оценка скорости сходимости общего итерационного метода. При доказательстве основной теоремы сходимости общего итерационного процесса использован следующий факт: решение данной системы алгебраических уравнений доставляет минимум соответствующей квадратичной форме.

В. К. Саульев

10955. О спектральных нормах некоторых итерационных процессов. Шелдон (On the spectral norms of several iterative processes. Sheldon J. W.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 4, 494—505 (англ.)

Система линейных алгебраических уравнений $Au=d$, где A — симметричная, положительно определенная матрица порядка N, решается линейным итерационным методом первой степени $u^{(m)}=H_mu^{(m-1)}+M_md$, $H_m+M_mA=E$, $(m=1,2,\ldots)$.

Спектральным радиусом $\rho(A)$ матрицы A автор называет максимум модулей ее собственных значений. Спектральная норма $\tau(A)$ матрицы A определяется согласно равенству $\tau(A)=[\rho(A'A)]^{\frac{1}{2}}$. При предположении, что матрица A обладает свойством (A) и упорядочено по σ_i (терминология Янга, см. РЖМат, 1955; 1953), автор устанавливает связь между спектральным радиусом $\rho(B)$ матрицы Якоби $B=E-A$ и спектральными нормами четырех итерационных процессов, характеризующихся следующими матрицами $K_m=\prod_{n=1}^{m}H_n$:

$$K_m=(L_{\sigma_1,\omega_b})^m,$$

$$K_m=\frac{T_m\left[\frac{2}{\rho(B)^2}L_{\sigma_1,1}-E\right]}{T_m\left[\frac{2}{\rho(B)^2}-1\right]},$$

$$K_m=(L_{\sigma_1,\omega_b})^{m-1}L_{\sigma_1,1},$$

$$K_m=\frac{T_{m-1}\left[\frac{2}{\rho(B)^2}L_{\sigma_1,1}-E\right]}{T_{m-1}\left[\frac{2}{\rho(B)^2}-1\right]}L_{\sigma_1,1}.$$

Основная теорема, доказанная автором, может быть сформулирована следующим образом: Пусть

$$L=\prod_i\left[L^{(p_l)}_{\sigma_1,\omega_l}-\Lambda_lE\right],$$

где $p_l=0$, если $L^{(p_l)}_{\sigma_1,\omega_l}=L_{\sigma_1,\omega_l}$, и $p_l=1$, если $L^{(p_l)}_{\sigma_1,\omega_l}=L'_{\sigma_1,\omega_l}$ (штрих означает операцию транспонирования); Λ_l — произвольные числа. Определим $Q(\mu,\omega)$ и $T(\mu)$ согласно равенствам

$$Q(\mu,\omega)=\begin{pmatrix}1-\omega & \omega\mu\\ (1-\omega)\omega\mu & 1-\omega+\omega^2\mu^2\end{pmatrix},$$

$T(\mu)=\prod_i\left[Q^{(p_l)}(\mu,\omega_l)-\Lambda_lE\right]$. Тогда, если μ — собственное значение матрицы B, а λ — собственное значение матрицы $T(\mu)$, то λ является также собственным значением матрицы L.

В. К. Саульев

10956. Метод нормализованной блочной итерации. Катхилл, Варга (A method of normalized block iteration. Cuthill Elizabeth H., Varga Richard S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 236—244 (англ.)

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений

$$Ax=k \qquad (1)$$

с квадратной клеточной матрицей $A=\{a_{ij}\}$ n-го порядка вида

$$A=\begin{pmatrix}A_{1,1}A_{1,2}\ldots A_{1,N}\\ \ldots\ldots\ldots\\ A_{N,1}A_{N,2}\ldots A_{N,N}\end{pmatrix},$$

где диагональные блоки $A_{i,i}$ суть квадратные матрицы

n_l-го порядка, $1 \leqslant l \leqslant N$ и $\sum_{i=1}^{N} n_l = n$. При некоторых ограничениях (авторы их явно выписывают) диагональные элементы матрицы A могут быть факторизованы в виде $A_{i,\,i} = D_l T_i' T_i D_l$, где D_l — положительная диагональная матрица, а T_l — верхняя треугольная (двудиагональная) матрица. Поэтому матричное уравнение (1) можно свести к уравнению $\widetilde{A}y = M$, где положено $D_l X_l \equiv Y_l$, $D_i^{-1} K_l \equiv M_l$, $\widetilde{A} = \{\widetilde{A}_{l,\,j}\}$, $\widetilde{A}_{l,\,j} = D_i^{-1} A_{i,j} D_j^{-1}$, $\widetilde{A}_{l,\,i} = T_i' T_i$,

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_N \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} K_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_N \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_N \end{pmatrix}.$$

Система (1) решается итерационным методом — методом нормализованной блочной релаксации:

$$Y_i^{(l+1)} = \omega \left[(T_i' T_i)^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (-\widetilde{A}_{i,\,j}) Y_j^{(l+1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=i+1}^{N} \left(-\widetilde{A}_{i,\,j}\right) Y_j^{(l)} + M_l \right\} - Y_i^{(l)} \right] + Y_i^{(l)}, \qquad (2)$$

где ω — множитель верхней релаксации. Для систем эллиптических сеточных уравнений авторы показывают, что („линейный“) метод ( ) для просчета одного узла требует точно такого же числа арифметических операций, как и обычный („точечный“) метод последовательной верхней релаксации. Вместе с тем метод ( ) сходится, вообще говоря, быстрее обычной верхней релаксации. В заключение авторы останавливаются на оценке оптимального множителя релаксации ω.

В. К. Саульев

10957. Порядок в схеме последовательной верхней релаксации. Варга (Orderings of the successive over-relaxation scheme. Varga Richard S.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 3, 925—939 (англ.)

Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,\,j} x_j = k_l, \quad a_{i,\,i} \neq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (1)$$

Франкел и Янг (см., например, РЖМат, 1955; 1953) предложили следующий итерационный метод (метод последовательной верхней релаксации):

$$x_i^{(n+1)} = \omega \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_{i,\,j} x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{i,j} x_j^{(n)} + g_l \right) +$$

$$+ (1 - \omega) x_i^{(n)}, \qquad (2)$$

где $b_{i,\,j} = \begin{cases} -a_{i,\,j}/a_{i,\,i}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$, $g_l = \dfrac{k_l}{a_{i,\,i}}$, ω — некоторый параметр, $1 \leqslant \omega < 2$. Скорость сходимости метода ( ) зависит, вообще говоря, от порядка следования уравнений в системе (1). Янг (РЖМат, 1955; 1953) выделил среди всех возможных упорядочиваний уравнений системы (1) так называемое согласованное упорядочивание (consistent ordering), которое является оптимальным в том смысле, что оно при $\omega = 1$ приводит к наиболее быстро сходящемуся итерационному процессу (2). Автор, основываясь на теории Перрона—Фробениуса о неотрицательных матрицах, получает несколько более общие результаты. В частности, он показывает, что в случае медленно сходящегося процесса (2) с $\omega = 1$ (метод Гаусса—Зейделя) действие различных упорядочиваний уравнений в системе (1) практически пренебрежимо мало.

В. К. Саульев

10958. Границы характеристических корней гершгоринского типа. Фарнелл (Characteristic root bounds of Gerschgorin type. Farnell A. B.), SIAM Rev., 1960, 2, № 1, 36—38 (англ.)

Пусть $A = (a_{i,\,j})$ — квадратная матрица n-го порядка, где $a_{i,\,j}$ — комплексные числа. Согласно теореме Гершгорина имеют место неравенства $|\lambda - a_{k,\,k}| \leqslant R_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где λ — собственное значение матрицы A $(Ax = \lambda x)$, а $R_k = \sum_{j=1(j\neq k)}^{n} |a_{kj}|$. Показывается справедливость следующих аналогичных оценок собственных значений $|\lambda - a_{k,\,k}| \leqslant C_k$, $|\lambda - a_{k,\,k}| \leqslant \sqrt{R_k C_k}$, где $C_k = \sum_{j=1(j\neq k)}^{n} |a_{j,\,k}|$.

В. К. Саульев

10959. Обращение матриц путем «снятия» ранга. Уилф (Matrix inversion by the annihilation of rank. Wilf Herbert S.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 2, 149—151 (англ.)

Требуется обратить матрицу $B = \|b_{ij}\|_{i,\,j=1}^{n}$. Построим последовательность матриц: $B - I = A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}, \ldots$; $A^{(k)} = \|a_{ij}^{(k)}\|_{i,\,j=1}^{n}$; $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \times a_{kj}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$; очевидно, $A^{(n+1)} = 0$. Таким образом, матрица $A^{(1)}$ представлена в виде суммы не более чем n матриц ранга 1 $\|a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}\|_{i,\,j=1}^{n}$ и для обращения B можно n раз применить известную формулу для $(A+C)^{-1}$, где C — матрица ранга 1. Количество умножений и делений в общем случае порядка $^7/_3 n^3$, в случае симметрии B — примерно вдвое меньше.

М. Л. Бродский

10960. Границы характеристических чисел произвольной матрицы. Хейнрих (Zur Eingrenzung der charakteristischen Zahlen einer beliebigen Matrix. Heinrich Helmut), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1956—1957, **6**, № 2, 211—216 (нем.)

10961. Метод Ритца для одновременного определения нескольких собственных значений и собственных векторов матриц больших порядков. Лаасонен (A Ritz method for simultaneous determination of several eigenvalues and eigenvectors of a big matrix. Laasonen Pentti. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1959, Sar. **A1**, № 265, 16 pp., ill.) (англ.)

Предлагается метод, оперирующий с линейными комбинациями ряда начальных аппроксимаций. В основе метода лежат две теоремы:

1. A — квадратная матрица порядка n, $m < n$ такое, что m корней уравнения $|A - \lambda E| = 0$ больше по абсолютному значению $n - m$ других корней. Тогда корни $|Q^{(k)} - \mu Q'^{k-1)}| = 0$ при $k \to \infty$ стремятся к m первым корням уравнения; нетривиальные решения $[Q^{(k)} - \mu Q^{k-1)}] x = 0$, $y' [Q^{(k)} - \mu Q^{(k-1)}] = 0$, умноженные соответственно на $Y^{(k)}$ и $V^{(k}$, стремятся к собственным векторам A и A'. Обозначения: $Y^{(k)} = A^k Y$, $V^{(k)} = A'^k V$, где Y, V — произвольные матрицы $n \times m$ ранга m; $Q^{(k)} = W D^k Z$, где $Z = Z^{(0)}$, $W = W^{(0)}$, $Z^{(k)} = T^{-1} Y^{(k)}$, $W^{(k)} = T' V^{(k)}$, $A = TDT^{-1}$,

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & \cdot \Lambda_p \end{pmatrix}.$$

2. Пусть A — эрмитова, $n \times n$, $m' < n$ такое, что m' собственных значений A по абсолютному значению больше $n - m'$ других, $m' \leqslant m < n$. Y — произвольная матрица $n \times m$ ранга m, $Q^{(k)} = \overline{Y}' Y^{(k)}$. Тогда m' первых корней $\mu_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m')$ $|Q^{(k)} - \mu Q^{(k-1)}| = 0$ стремятся к собственным числам A при $k \to \infty$. Последовательность $Y^{(k)} x_i^{(k)}$ стремится при $k \to \infty$ к собственному вектору A, соответствующему собственному значению λ_i, где $x_i^{(k)}$ — нетривиальное решение уравнения $(Q^{(k)} - \mu_i^{(k)} Q^{(k-1)}) x = 0$. В. Н. Кублановская

10962. Исследование устойчивости путем приведения матрицы к почти треугольному и треугольному виду с помощью элементарных подобных преобразований. Уилкинсон (Stability of the reduction of a matrix to almost triangular and triangular forms by elementary similarity transformations. Wilkinson J. H.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 3, 336—359 (англ.)

Рассматривается вопрос о вычислении собственных чисел и собственных векторов произвольной (вообще говоря, несимметрической) матрицы. В работе Гивенса (РЖМат, 1960; 4601) эта задача решается путем сведения матрицы к почти треугольному, а затем к треугольному виду (матрица $A = (aij)$ называется почти треугольной — almost triangular, если $a_{ij} = 0$ при $j > i+1$). Автор указывает, что не изменяя по существу метода Гивенса, он вносит в него некоторые усовершенствования, что позволяет построить удобную вычислительную программу. Такая программа была создана для машины ДЕЮКЕ (DEUCE) (РЖМат, 1955, 4740), вычисления (производимые с фиксированной запятой) дали результаты с высокой точностью. Для преобразования матрицы к почти треугольной форме предлагается два варианта. В первом варианте второй столбец матрицы $A = (a_{ik})$ меняется местами с одним из последующих столбцов (с номером l) с тем, чтобы после перестановки выполнялось условие $|a_{12}| \geqslant |a_{1j}| (j > 2)$. Это равносильно умножению матрицы A справа на матрицу I с элементами $i_{kk} = 1$, $k \neq 2$, l; $i_{2l} = i_{l2} = 1$, и остальными элементами, равными нулю. После этого матрица A умножается справа на матрицу M следующего вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1 & m_3 \ldots m_n \\ 0 & 0 & 1 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 \end{pmatrix},$$

где $m_j = -\dfrac{a_{1j}}{a_{12}}$. В результате умножения получаем матрицу A_1, в первой строке которой все элементы, кроме a_{11}, и a_{12} равны нулю. Для того чтобы получить матрицу подобную A, достаточно матрицу A_1 умножить на I^{-1} и M^{-1}, которые легко вычисляются. После этого подобным образом обращают в нуль элементы второй строки (кроме первых трех) и так далее. Второй вариант отличается тем, что на каждом этапе образуется лишь один новый нулевой элемент, число этапов при этом возрастает, но сами этапы делаются проще. В частности, матрица M содержит лишь один ненулевой элемент вне главной диагонали. Первый метод более удобен для машин, позволяющих производить операцию накопления без округления промежуточных результатов. На вычислении собственных векторов и собственных чисел почти треугольной матрицы автор специально не останавливается. Однако подробно рассматривается способ упрощения почти треугольной матрицы, если каким-либо из известных способов найдены один из собственных векторов и соответствующее собственное число. Способ состоит также в применении некоторой последовательности элементарных преобразований. Если исходная матрица имеет только линейные элементарные делители, то, применяя этот способ $n-1$ раз, можно преобразовать почти треугольную матрицу к треугольному виду. Приводятся подробно комментированные решения числовых примеров, в том числе с матрицей 15 порядка (общего вида). Вычисления производились на машине ДЕЮКЕ. Рассмотрен вопрос о точности вычислений — отчасти в общем плане, а главным образом в связи с примерами. Следует отметить для удобства сравнения, что метод, применяемый для преобразования матрицы к почти треугольному виду, лишь в деталях отличается от метода Данилевского.

В. Л. Загускин

10963. Оценки корней некоторых полиномов. Фланаган, Макс филд (Estimates of the roots of certain polynomials. Flanagan Czerna, Maxfield J. E.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, **7**, № 4, 367—373 (англ.)

Пусть $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^n x^i$ — полином степени n с действительными коэффициентами и известными различными корнями r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если r_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, — корни полинома $g(x) = f(x) + \varepsilon x^n$, где ε мало, то $r_i^* \cong r_i - \left(\varepsilon r_i^{n+1} / \prod_{i=1}(r_i - r_j)\right)$, $r_{n+1}^* \cong$

$$\cong -(1/\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} r_i + \varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 - \left(\sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}} r_i r_j\right)\right].$$

Если $f(x)$ имеет кратные корни, то строится полином, имеющий корни, равные разности между n_1-кратным корнем r полинома $f(x)$ и соответствующими корнями полинома $g(x)$. Коэффициенты этого полинома $\sum_{m=0}^{n_1} c_{n_1-m} y^{n_1-m}$ определяются по формуле

$$k! c_k = \prod_j^{(k)}(r) \cong \frac{\varepsilon}{\prod_{i=n_1+1}^{n} (r - r_i)} \left\{\frac{(n+1)! r^{n+1-k}}{(n+1-k)!} - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} \prod_j^{(k-m)}(r) \prod_j^{(m)}(r)\right\},$$

где

$$\prod_j(x) = \prod_{j=1}^{n_1} (x - r_j^*),$$

$$\prod_i(x) = \prod_{i=n_1+1}^{n} (x - r_i - r_j^* + r).$$

Если $f(x)$ — характеристический полином системы дифференциальных уравнений, а $g(x)$ — характеристический полином расширенной системы с малым параметром, то приведенные формулы дают возможность аппроксимировать $n+1$ корень полинома $g(x)$, используя n, ε и корни $f(x)$. В. Е. Говоров

10964. Нахождение корней уравнений 4-й степени посредством разложения на квадратные множители. Кристеллер (Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades durch Aufspalten in quadratische Faktoren. Christeller Silvio), Z. angew. Math. und Phys., 1959, **10**, № 5, 525—527 (нем.; рез. англ.)

Для определения корней алгебраического уравнения четвертой степени с действительными коэффициентами, не содержащего члена с x^3, имеющего вид $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, применяется метод, основанный на разложении левой части уравнения на два множителя второй степени $(x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q) = 0$, причем $p + q - s^2 = a$, $s(q - p) = b$ и $pq = c$. Дается исследование всевозможных случаев, встречающихся при решении для произвольного выбора p, и приводится числовой пример, хорошо иллюстрирующий схему вычислений.

Указывается, что для уточнения приближенных значений может быть применен метод Ньютона—Рафсона (вместо методов линейной или квадратичной интерполяции). И. Ф. Шелихова

10965. Об одновременном применении метода Ньютона и метода пропорциональных частей. Шайкин (Asupra aplicării simultane a metodei lui Newton şi a metodei părţilor proporţionale. Şaichin A.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1957, 8, № 3-4, 331—337 (рум.; рез. русск., франц.)

Указывается прямой метод приближенного решения алгебраических уравнений, основанный на том, что точное значение корня на данном интервале (a, b) заключено между его приближенными значениями, полученными по методу Ньютона и по методу пропорциональных частей. Доказывается, что если x_{N_a} и x_{N_b} — приближенные значения корня, полученные по методу Ньютона, когда в качестве первого грубого приближения корня взяты значения a и b и $\lambda = -f(a)/(f(b) - f(a))$, а $\mu = 1 - \lambda$, то значение корня с заданной точностью может быть найдено при помощи следующей последовательности формул:

$$x_p = a + \lambda(b-a),\ x_{Q_a} = x_{N_a} + \lambda(x_p - x_{N_a}),$$

$$x_{Q_a} = x_p + \lambda(x_{N_b} - x_p),\ x = x_{Q_a} + \lambda(x_{Q_b} - x_{Q_a}),$$

или

$$x_p = \mu a + \lambda b,\ x_{Q_a} = \mu x_{N_a} + \lambda x_p,$$

$$x_{Q_b} = \mu x_p + \lambda x_{N_b},\ x = \mu x_{Q_a} + \lambda x_{Q_b}. \qquad (1)$$

Указывается, что формулы (1) особенно удобны при применении счетных машин. Приведенные числовые примеры показывают, что эти формулы обеспечивают точность последнего десятичного знака исходных данных. И. Ф. Шелихова

10966. Замечание по поводу метода спуска. Колдуэлл (A note on the downhill method. Caldwell George C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 223—225 (англ.)

Развивая метод спуска Уорда для решения уравнения $f(z) = 0$ (РЖМат, 1958, 6222), автор предлагает двигаться на каждом шагу не параллельно действительной или мнимой оси, а в направлении наискорейшего уменьшения функции $|\mathrm{Re} f(z)| + |\mathrm{Im} f(z)|$. При таком выборе направления движения и надлежащем выборе величины шага (указывается, что последнее можно легко сделать при помощи простых испытаний) процесс сходится во всех случаях и может быть использован для составления универсальной программы вычисления нулей аналитических функций. В качестве примера рассмотрена «критическая» (РЖМат, 1958, 6222) функция $z^4 + 1$. М. Л. Бродский

10967. Решение нормальных уравнений методом краковянов. Вежбинский (Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens. Wierzbiński St.), Urania (Esp.), 1957, **42**, № 246, 133—139 (франц.)

Излагается алгоритм решения систем нормальных уравнений, основанный на более краткой, чем классические методы, вычислительной схеме, использующей свойства краковянов. Предлагаемый метод дает высокую точность вычислений и позволяет после относительно небольшой вычислительной работы одновременно с отысканием неизвестных находить их веса. Вычислительный процесс состоит из однотипных повторяющихся операций (столбцы одного краковяна умножаются на столбцы другого) и может быть легко автоматизирован на вычислительных машинах. Контроль вычислений, осуществляемый для каждого этапа вычислительного процесса, производится с большой четкостью и основан на том, что произведение столбцов сумм (каждый элемент такого столбца равен сумме всех элементов соответствующей строки) двух краковянов равно общей сумме элементов (т. е. сумме всех элементов) произведения двух краковянов. Производится вычисление указанных произведений и общих сумм, и результаты сравниваются. И. Ф. Шелихова

10968. Быстрое нахождение ошибок по методу наименьших квадратов. Володкевич (Schnelle Fehlerbestimmung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wolodkewitsch Nikolaus), Industr. Obstund Gemüseverwert, 1959, **44**, № 3, 43—45 (нем.; рез. франц.)

Описаны две разновидности простого приспособления. Они позволяют упростить и ускорить процесс графического вычисления величины $N_n = \sqrt{\sum (x_n^2)}$ способом последовательного построения прямоугольных треугольников: сначала с катетами x_1, x_2 и гипотенузой $N_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, затем с катетами x_3, N_2 и гипотенузой $N_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ и т. д. Приспособления представляют собою пластинки с двумя взаимно перпендикулярными миллиметровыми шкалами, начинающимися в одной из вершин прямого угла, образованного либо сторонами прямоугольной пластинки, либо двумя параллельными им прорезями. На пластинках, кроме того, нанесены таблицы величин $k_1 = 1/\sqrt{n-1}$ и $k_2 = 1/\sqrt{n(n-1)}$ для значений n от 2 до 20. При помощи указанных графических построений и таблиц легко вычислять величины средней квадратической ошибки (стандарта), выражаемой формулой $m = N \cdot k_1$, и „среднюю ошибку" среднего арифметического (результата) $M = N \cdot k_2$, а также $r = 0{,}674\, m$ и $\omega = 0{,}674 M$ по данным величинам отклонений x_n от среднего арифметического из n наблюденных значений X_n. Даны указания, касающиеся практики вычислений по описанной схеме. Рассмотрен пример. А. Б. Штыкан

10969. Об интерполяционной формуле Эрмита и о некоторых ее приложениях. Станку (Asupra formulei de interpolare a lui Hermite şi a unor aplicaţii ale acesteia. Stancu D. D.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1957, 8, № 3-4, 339—355 (рум.; рез. русск., франц.)

Указывается, что явное выражение интерполяционного полинома Эрмита, данное Земпленом, неточно при $s \geqslant 2$ и $r > 2$. Сравнительно простым путем выводится формула:

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{r_i-1} \sum_{r=0}^{r_i-k-2} \frac{(x-x_i)^k}{k!} \times$$

$$\times \left[\frac{(x-x_i)^r}{r!}\left(\frac{1}{g_i(x)}\right)^{(r)}_{x_i}\right] g_i(x)\, f^{(k)}(x_i),$$

где $g_i(x) = (x-x_1)^{r_1} \ldots (x-x_{i-1})^{r_{i-1}} (x-x_{i+1})^{r_{i+1}} \ldots (x-x_s)^{r_s}$. Для многочлена Эрмита, удовлетворяющего условиям $H_n^{(l)}(x_k) = f_n^{(l)}(x_k)$ $(l = 0, 1, \ldots, r_k - 1;\ k = 1, 2, \ldots, s)$, дается более явная формула. Далее выводится эффективное выражение для интерполяционного многочлена:

$$H_{m+n-1}(x) = H_{m+n-1}(\underbrace{a, \ldots, a}_{m}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n}; f/x) =$$

$$= \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i\right]^{(k)}_{t}(a) +$$

$$+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^m \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(x-b)^n}{r!} \times$$

$$\times \left[\sum_{j=0}^{n-r-1} \binom{m+j-1}{j} \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^j\right] f^{(r)}(b).$$

Полученные формулы применяются к разложению рациональной функции на простые дроби; получены эффективные выражения для коэффициентов разложения. Даны некоторые приложения к численному интегрированию. Построены две квадратурные формулы высокой точности при соответствующем выборе узлов. Далее выведены две формулы, предложенные еще Эрмитом, и доказывается формула численного дифференцирования, аналогичная одной из этих квадратурных формул Эрмита. Приводятся в качестве примеров 11 вариантов этих формул. И. Ф. Шелихова

10970. Опыт применения ортогональных полиномов для обработки результатов наблюдений на машине СВАК. Ашер, Форсайт (SWAC experiments on the use of orthogonal polynomials for data fitting. Ascher Marcia, Forsythe George E.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, **5**, № 1, 9—21 (англ.)

Полином $f_n^{(\xi)}$ степени n, минимизирующий среднеквадратическое отклонение от функции f на множестве $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, выражается известным образом через полиномы, ортогональные на ξ. На этом основан способ вычисления полинома $f_n^{(\xi)}$, испытанный авторами на машине СВАК. Они применяли метод плавающих векторов, заключающийся в представлении компонент вектора $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ в виде $z_i = q_i 2^{q_{m+1}}$, где q_{m+1} — целое, $1/2 \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |q_i| < 1$.

S. Paszkowski

10971. Конечный алгорифм для решения совместных линейных уравнений и неравенств и чебышевской аппроксимации несовместных линейных уравнений. Голдстейн, Чини (A finite algorithm for the solution of consistent linear equations and inequalities and for the Tchebycheff approximation of inconsistent linear equations. Goldstein Allen A., Cheney Ward), Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 3, 415—427 (англ.)

Работа посвящена решению указанных в заголовке проблем геометрическим методом, идея которого восходит к Фурье (см. также Зуховицкий С. И. Докл. АН СССР, 1951, **79**, 561—564). Пусть дана система m неравенств с n неизвестными $m \geqslant n$. Рассматривается в $(n+1)$-мерном пространстве (вообще говоря, неограниченный) многогранник P, построенный следующим образом: первые n координат точек многогранника произвольны, а $x_{n+1} \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} [(A^i, x) - b_i]$, где A_i — столбцы матрицы, определяющей систему, b_i — правые части. Задача состоит либо в описании тех точек многогранника, для которых выполнены условия $x_{n+1} \leqslant 0$ (система совместна), либо в нахождении наинизшей точки многогранника: $\min_P x_{n+1} = \min_P \max_{1 \leqslant i \leqslant m} [(A^i, x) - b_i]$ (в том случае, когда $x_{n+1} > 0$ для всех точек, т. е. система несовместна). Если задана система уравнений, то следует искать x_i^*:

$$x_{n+1}^* = \min_{P^*} x_{n+1} = \min_{1 \leqslant i \leqslant 2m} \max [(A^i, x) - b_i] =$$

$$= \min_P \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |(A^i, x) - b_i|; \quad \begin{matrix} A_{m+i} = -A_i \\ b_{m+i} = -b_i \end{matrix}.$$

Координаты x_i^* и будут давать чебышевскую аппроксимацию несовместной системы. Геометрический смысл предлагаемого алгорифма заключается в последовательном спуске по граням многогранника, начиная с произвольной точки в направлении наискорейшего убывания функции $F(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} [(A^i, x) - b_i]$ вплоть до точки, сообщающей минимум $F(x)$. Подробно разобран случай $m = n + 1$, который автор сводит к решению обычной экстремальной задачи. Изучается аппроксимация в метриках, отличных от чебышевской. В предположении существования решения задачи доказывается конечность предлагаемого алгорифма. В заключение устанавливается связь предлагаемого алгорифма и метода Зуховицкого, а также метода Валле-Пуссена для системы порядка $n+1$. А. М. Вершик

10972. Аппроксимация функций сглаживанием остаточных разностей. Легра (Approche d'une fonction par modelage des résidus. Legras J.), Câbles et transm., 1959, **13**, № 1, 37—49 (франц.; рез. англ.)

Излагается метод аппроксимации, позволяющий в тех случаях, когда для приближенного изображения заданной функции $f(y)$ неудовлетворительно выбрана приближающая функция $P(y)$, зависящая от некоторого числа параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, путем соответствующего подбора этих параметров сделать разность $\Delta f(y) = f(y) - P(y)$ сколь угодно малой. В первой части работы для функции $f(y) = F(\theta)$ (где $y = \omega_0 \cos\theta$, $-\omega_0 < y < \omega_0$) строится приближающий многочлен путем разложения ее в ряд по полиномам Чебышева: $F(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta$ $(0 < \theta < \pi)$,

$$a_0 = 1/\pi \int_0^\pi F(\theta)\, d\theta; \quad a_n = 2/\pi \int_0^\pi F(\theta) \cos n\theta d\theta$$

($\cos p\theta = T_p(y/\omega_0)$ — полиномы Чебышева).

Во II части статьи построенный полином $P(y)$ берется в качестве первого приближения данной функции и исходная аппроксимация улучшается методом выравнивания остатков путем модификации коэффициентов полинома. Чтобы судить о точности приближения, находят для каждого этапа вычислений абсолютную и относительную погрешность и вносят поправки в данные коэффициенты таким образом, чтобы максимальная величина остатков стала возможно меньше. Отправляясь от новых значений, продолжают процесс до тех пор, пока приближающийся многочлен станет отличаться от данной функции на величину, меньшую чем допустимая погрешность. Указывается, что, благодаря своей простоте и гибкости, описанный метод успешно применяется наряду с классическими методами для решения ряда практических задач. И. Ф. Шелихова

10973. Метод последовательных минимаксов вычисления корня выпуклой функции. Гросс, Джонсон (Sequential minimax search for a zero of a convex function. Gross O., Johnson S. M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, **13**, № 65, 44—51 (англ.)

О функции $f(x)$ известно, что она выпукла вниз на отрезке $[a, b]$, заданы $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, и известно, что в заданной точке s $(a \leqslant s < b)$ значение функции положительно. Тогда функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень x $(s < x < b)$. Требуется так последовательно определить значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы, вычисляя значения функции $f(x)$ в этих точках, мы получили наилучшую (сравнительно с любыми другими последовательно определенными $x_1', x_2', \ldots, x_n'$) оценку для корня x, т. е. наиболее тесный интервал, в котором этот корень заведомо заключается. Величина этого интервала определяется „наихудшей" по отношению к выбираемым значениям функцией, удовлетворяющей при выборе x_1 всем перечисленным выше условиям, а при выборе x_k также всей полученной ранее информацией о функции (задача выбора облегчается тем, что большая часть этой информации для нас уже бесполезна и никакие методы, кроме линейной интерполяции и экст-

раполяции, неприменимы). Решением этой типичной задачи динамического программирования служат функции, выражающиеся рекуррентными формулами и задающие оптимальные x_k и длину наименьшего интервала для корня x при данных $n, s = a/b - a$, $f(a)/f(b)$. Для простейшего (и, очевидно, наихудшего) случая $s=a$ результаты также представлены в виде графиков.

М. Л. Бродский

10974. Аппроксимация дифференцируемых функций полиномами. Мурнаган (The approximation of differentiable functions by polynomials. Murnaghan Francis D.), Anais Acad. brasil. cienc., 1959, **31**, № 1, 25—29 (англ.)

Предлагается способ вычисления полинома n-ой степени наилучшего приближения для дифференцируемой функции на сегменте. В качестве первого приближения берется отрезок разложения функции в ряд по полиномам Чебышева, а затем применяется итерационный процесс, совпадающий с известным вторым методом Ремеза (Ремез Є. Я., Про методи найкращого в розумінні Чебишова наближеного представлення функцій, Київ, 1935). Приведены примеры: $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $n = 5$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $f(x) = \cos\frac{\pi}{4}x$, $n = 2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Автор обращает внимание на малое отличие в этих примерах полинома наилучшего приближения от отрезка разложения в ряд по полиномам Чебышева.

М. Л. Бродский

10975. Рациональные приближения, близкие наилучшим приближениям Чебышева. Хорнеккер (Approximations rationnelles voisines de la meilleure approximation au sens de Tchebycheff. Hornecker Georges), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 10, 939—941 (франц.)

В качестве приближающей функции для $F(\theta)$, заданной рядом $F(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$, берется функция

$$G_{n,p}(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ik\theta} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu e^{(k-n-1)\alpha_\nu + ik\theta},$$

где

$$c_k = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu e^{(k-n-1)\alpha_\nu} \quad (k = n+1,\ n+2,\ \ldots,n+2p).$$

Аналитическая функция $f(x) = \operatorname{Re}\{F(\theta)\}$ разлагается в ряд по полиномам Чебышева:

$$f(x) = (c_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x),$$

где

$$c_k = (1/2^{k-1})\,(1/k!)[f^{(k)}(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (1/2)^{2\nu}(f^{(k+2\nu)}(0)/k!(k+1)\ldots(k+\nu))].$$

Показано, что интерполяция посредством семейства экспонент коэффициентов разложения функции по полиномам Чебышева и суммирование появляющейся при этом геометрической прогрессии приводят к рациональным приближениям, часто близким к рациональным наилучшим приближениям Чебышева. Построено рациональное приближение вида

$$g(x) = (\widetilde{c}_0/2) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k T_k(x) + 1/4 \sum_{\nu'} a_{\nu'} u_\nu^{-(n+2)} \frac{1-u_\nu^2}{((1+u_\nu^2)/2u_\nu) - x} + 1/2 \sum_{\nu''} \frac{[s_0 r - s_{-1}(1+\rho^2)/2]x + s_0((1-\rho^4-4r^2)/4\rho^2) + s_{-1}r}{[x-(1+1/\rho^2)r]x + 1/4(1/\rho-\rho)^2 + (r^2/\rho^2)}.$$

Рассмотрены частные случаи рационального приближения $g(x)$ для $p = 1$ и $p = 2$. Приводятся формулы оценки погрешности. В качестве примера дается аппроксимация показательной функции e^x.

И. Ф. Шелихова

10976. Приближенное решение краевой задачи Римана для систем n пар функций. Иванов В. В., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 1, 27—29

Излагается приближенный метод нахождения всех решений неоднородной краевой задачи Римана для систем n пар функций, достаточно эффективный с практической точки зрения. Пусть дан замкнутый ограниченный гладкий контур L, разбивающий комплексную плоскость на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^- с началом координат в D^+ и пусть требуется найти кусочно-аналитический вектор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, имеющий конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\varphi^+ = G\varphi^- + f, \qquad (1)$$

в котором $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — заданный на L, суммируемый с квадратом вектор, а $G = \{G_{\alpha,\beta}\}, \alpha,\beta = 1, 2, \ldots, n$ — матричная функция, непрерывная по Гёльдеру на L и нигде на L неособенная, т. е. $\det G(t) \neq 0$, $t \in L$. Сформулированная задача Римана эквивалентна следующей задаче: найти пару векторов φ^+ и φ^-, аналитически соответственно внутри и вне L, по условиям:

$$G(t_0)\varphi^-(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G(t) - G(t_0)}{t - t_0}\,\varphi^-(t)dt = = G(t_0)\gamma(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t - t_0} - \frac{1}{2} f(t_0), \qquad (2)$$

$$\varphi^+ = G\varphi^- + f, \qquad (3)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — многочленный вектор, заданная главная часть вектора φ на бесконечности. Показано, что можно приближенно найти все решения уравнения типа Фредгольма

$$x(t_0) - \frac{G^{-1}(t_0)}{2\pi i}\int_L \frac{G(t) - G(t_0)}{t - t_0}\,x(t)dt = = y(t_0) \equiv \gamma + G^{-1}\left(-\frac{1}{2} f + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f dt}{t - t_0}\right) \qquad (4)$$

и из полученного множества решений выделить все приближенные решения уравнения (2). Тогда приближенное решение задачи Римана находится по формуле (3).

И. Ф. Шелихова

10977. Применение матриц к расчету по методу смешения. Поснер (Anwendung von Matrizen auf die Mischungsrechnung. Possner L.), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1959, 5, № 1, 9—13 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Дается приложение матричных методов к расчету по методу смешения в технике сгорания топлива, предназначенного для сжигания в промышленных печах и котельных агрегатах. Приводятся основные формулы для подсчетов минимально потребного для сгорания единицы топлива количества кислорода и сухого воздуха, количества и состава отходящих газов, потерь от отходящих газов, содержания в дымовых газах углекислоты, соотношения между избытком воздуха и количеством отходящих газов, получающихся при сгорании и т. п. Для вычисления кажущегося молекулярного веса применяются формулы вида $M = \sum M_i m_i / \sum m_i$ или $M = \sum M_i r_i$.

Вследствие неравномерности тепловой нагрузки поверхность нагрева котла рассматривается как сумма отдельных слоев, что дает возможность записать в векторной форме суммарный коэффициент полезного действия лучеиспускания, коэффициент теплопередачи и паропроизводительность котла. Отмечается, что матричные

методы расчета особенно экономичны при многократном регулировании установки котла, так как однообразие операций позволяет проводить вычисления на быстродействующих вычислительных машинах. Приведен числовой пример. И. Ф. Шелихова

10978. Построение серии испытательных матриц. Эгертер (Construction of a set of test matrices. Aegerter M. J.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, 2, № 8, 10—12 (англ.)

Предлагается новая (РЖМат, 1957, 1685) серия матриц для испытания различных способов обращения матриц. Именно, $A_n = R_n^{-1}$, где $R_n = \|r_{ij}^{(n)}\|_{i,j=1}^{n}$; $r_{ij}^{(n)} = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n-1)$; $r_{in}^{(n)} = r_{ni}^{(n)} = i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Матрицы A_n записаны в явном виде; $\det A_n = -6\,[n(n+1)(2n-5)]^{-1}$; легко найти их собственные числа, составлены таблицы, показывающие постепенное ухудшение с ростом n различных параметров, характеризующих численную обратимость матрицы A_n $(2 \leqslant n \leqslant 10)$. М. Л. Бродский

10979. Новый метод проверки непротиворечивости матрицы предшествования. Маримонт (A new method of checking the consistency of precedence matrices. Marimont Rosalind B.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, № 2, 164—171 (англ.)

Система отношений упорядоченности $x_{i_k} < x_{j_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ для конечного множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется непротиворечивой, если в числе ее следствий не содержится ни одного ложного отношения $x_l < x_l$. Системе отношений упорядоченности ставится в соответствие матрица $M = \|M_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ такая, что $M_{i_k j_k} = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, а все остальные $M_{ij} = 0$. Баранкин (Barankin E. W. Precedence matrices. Univ. Calif., Manag. Sci. Res. Project, Rep. № 26, 1953) предложил метод проверки непротиворечивости системы отношений упорядоченности, основанный на том, что система непротиворечива тогда и только тогда, когда матрица M нильпотентна. Автор указывает другой критерий непротиворечивости: наличие нулевой строки или столбца в любой подматрице M, симметричной относительно главной диагонали. Указан алгорифм для проверки непротиворечивости: если i-я строка (столбец) матрицы состоит сплошь из нулей, вычеркиваются i-я строка и i-й столбец. Система непротиворечива тогда и только тогда, когда можно, применяя этот алгорифм, вычеркнуть всю матрицу M. Этот метод требует гораздо меньше операций, чем метод Баранкина. Проверка непротиворечивости системы отношений упорядоченности применяется в различных вопросах программирования (как для цифровых машин, так и в более широком смысле). М. Л. Бродский

10980. Матричное выражение формул сопротивления материалов. Фанжа-де-Сен-Фон (Expressions matricielles de formules de la résistance des matériaux. Fanjat de Saint-Font André), Ann. Inst. techn. bâtim. et trav. publics, 1959, 12, № 134, 127—146 (франц.; рез. англ.)

Излагаются теоретические вопросы теории упругости, непосредственно связанные с практикой. Отмечается, что все возрастающая сложность технических проблем вызывает необходимость совершенствования методов расчета сопротивления материалов с целью получения новых, более компактных формул. Приводятся некоторые вспомогательные формулы и известные свойства векторов в матричной форме (матричное определение скалярного и векторного произведений и другие), применяемые в работе. Дается приложение матричных методов к выводу основных зависимостей теории упругости. Получены в сжатой, матричной форме новые выражения обобщенного закона Гука, параметров деформации и работы всех упругих сил, приложенных к телу. В новой матричной форме вектор напряжения σ, приложенный в точке m какого-либо сечения, выражается формулой

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \lambda_m.$$

Указывается, что широкое использование матричных методов в теории упругости может дать удобные формулы расчета, практически важные для технических приложений, например для задач исследования сопротивления материалов изогнутых конструкций, решение которых классическими методами затруднительно вследствие большой сложности вычислений. И. Ф. Шелихова

10981. Обобщенный вычислительный метод для проектирования оптимальных систем. Часть I. Браун (A generalized computer procedure for the design of optimum systems. Part I. Brown R. Roderick), Commun. and Electron., 1959, № 43, 285—289 (англ.)

При проектировании часто приходится сталкиваться с задачей отыскания условного экстремума. Указывается, что при решении подобных задач могут быть использованы методы Ньютона, градиентный метод и др. Автор отмечает, что расчеты весьма эффективно проводить на электронных вычислительных машинах. Л. И. Горьков

10982. Обобщенный вычислительный метод для проектирования оптимальных систем. Часть II. Браун (A generalized computer procedure for the design of optimum systems. Part II. Brown R. Roderick), Commun. and Electron., 1959, № 43, 289—293 (англ.)

Часть I, см. реф. 10981.

Весьма бегло дается сравнительное описание метода Ньютона, метода наискорейшего спуска и некоторых других методов. Л. И. Горьков

10983. Определение численных значений сложных выражений с помощью автоматов «Мерседес». Гёринг (Rechnerische Auswertung komplizierter Gleichungen mit Hilfe des Mercedes-Automaten. Göring E.), Neue Techn. Büro, 1959, 3, № 7, 185—189 (нем.)

Статья посвящена вопросам наиболее рациональной организации численных расчетов, часто встречающихся в инженерной практике при графическом построении нерегулярных кривых, аналитически заданных сложными математическими выражениями в форме полиномов высоких степеней с большим числом членов и зависящих от различных параметров. Дается подробное описание двух способов механизации математических операций над полиномами при проведении вычислений на счетном автомате «Мерседес» с двадцатиразрядной клавиатурой и запоминающей шкалой, обеспечивающих значительную экономию времени и высокую точность расчетов. И. Ф. Шелихова

10984. Математическое проектирование формы корабля. Рёзинг, Бергхёйс (Tracé mathématique des formes de navires. Rösingh W. H. C. E., Berghuis J.), Bull. techn. Bur. «Veritas», 1959, 41, № 3, 445—451 (франц.)

Статья содержит математическое решение вопроса об отыскании оптимальной формы подводной части корабля в условиях конкретного технического задания на основании общего анализа судовой поверхности и изучения ее свойств по главным гидродинамическим характеристикам. Указывается, что предложенные в статье аналитические выражения кривых и параметров позволяют чисто вычислительным путем с помощью быстродействующих электронных машин определять ординаты точек ватерлинии и все другие элементы теоретического чертежа корабля. Погрешность, с которой вычисляются площади, положение центров тяжести, моменты инер-

ции, гидростатические характеристики подводного объема судна и данные, относящиеся к плавучести, а также продольной и поперечной остойчивости равна 1 *мм*; такая точность невозможна при конструировании теоретического чертежа графическими приемами. Отмечается, что, кроме перечисленных выше, и все другие характеристики — параметры корабля могут быть быстро вычислены предложенным методом. Отмечается, что применение вычислительных машин позволяет значительно снизить себестоимость чертежей, а также облегчить и ускорить технологические процессы, связанные с постройкой судна. Рекомендуется для ускорения работы по программированию широко использовать подпрограммы. Применение описанных приемов проектирования в каждом специальном случае пояснено числовыми примерами. И. Ф. Шелихова

10985. Об одной проблеме многозначности. Дюфьё (Sur un problème de redondance. Duffieux P. Michel), Rev. optique, 1959, 38, № 2, 75—83 (франц.; рез. англ.)

Дается математический анализ одной проблемы многозначности при определении ограниченной функции $F(x)$, заданной в области D, по результатам ее экспериментального определения в отдельных участках области D. Эта проблема возникает в теории информации и при исследованиях спектральных распределений в оптике. К. С. Вульфсон

10986. О численном преобразовании Фурье. Бауэр, Штеттер (Zur numerischen Fourier-Transformation. Bauer F. L., Stetter H. J.), Numer. Math., 1959, 1, № 4, 208—220 (нем.)

Излагаются теоретические вопросы, связанные с численными преобразованиями Фурье и численным гармоническим анализом периодических функций. Авторы предлагают некоторые приемы приближенного определения числовых значений спектров $F(\nu)$ и коэффициентов Фурье c_n основных периодических функций $f(t)$, позволяющие находить решение многих физических задач, которые не удается довести другими методами до числового результата. Метод основан на возможности построения с помощью дельта-функции $\delta(t)$ Дирака „опорной" функции $\hat{f}(t) = h\sum_\mu f_\mu \delta(t - t_\mu)$, где $t_\mu = t_0 + \mu h$ при $0 \leqslant t_0 < h$ и $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $f_\mu = f(t_\mu)$; причем используются эквидистантные деления опорного интервала h. Тогда $\hat{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\nu t} \times \hat{f}(t)\,dt = h\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_\mu e^{-2\pi i h\nu\mu} e^{-2\pi i\nu t_0}$ и $\hat{c}_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t}\,\hat{f}(t)\,dt = (1/N)\sum_{\mu=0}^{N-1} f_\mu e^{-2\pi i h n\mu} e^{-2\pi i n t_0}$.

Большая часть полученных результатов требует для строгого вывода применения теории функций комплексного переменного и, в частности методов теории вычетов. Во второй главе исследованы зависимости, существующие между спектром $F(\nu)$ основной функции $f(t)$ и спектром $\hat{F}(\nu)$ ее „опорной" функции $\hat{f}(t)$.

Доказано, что спектр „опорных" функций получается из спектра основных функций суперпозицией бесконечного числа спектров, получающихся из спектра $F(\nu)$ путем сдвига на целое число, кратное k/h, и умножения на периодический множитель. Дается определение и доказывается существование предельной функции $G_\infty(\nu, \Delta_0)$ для $G_m(\nu, \Delta_0)$ при $m \to \infty$, т. е. существование спектра F для функций класса $S_\infty(t_0)$. Полученные результаты переносятся на анализ Фурье периодических функций; при этом все функции от ν переходят в функции от целочисленного n. В частности, $c_n = \hat{c}_n \times G_m(n, \Delta_0)$. На конкретных примерах показано, что множители G_m при изучении закономерностей, затухания $F(\nu)$ могут быть найдены и для периодических функций, не принадлежащих классу G_m. Излагаются некоторые вопросы, касающиеся оценки точности. Имеются числовые примеры. Для функции $f(t) = |\sin 2\pi t|$ приведена таблица коэффициентов Фурье, в которой сравниваются точные значения с вычисленными тремя описанными способами по 12 опорным значениям, и указываются абсолютные ошибки. И. Ф. Шелихова

10987. Численный расчет переходных процессов линейных и нелинейных систем. Наслен (Calcul numérique des régimes transitoires des systèmes linéaires et non linéaires. Méthode de simulation numérique. Naslin Pierre), Automatisme, 1959, 4, № 7-8, 293—300 (франц.)

Описан простой метод приближенного расчета переходных процессов в системах саморегулирования с линейными и нелинейными элементами, представляющий собой численное моделирование, основанное на применении функциональной схемы, содержащей только интеграторы с передаточной функцией $1/p$, и показаны его применения. Для выбранного интервала времени Δt определяются приближенные значения u и y в момент времени t_{n+1} на основании несложных расчетных уравнений:

$$y_{n+1/2} = y_n + (y_n - y_{n-1})/2, \qquad \varepsilon_{n+1/2} = x_{n+1/2} - y_{n+1/2},$$

$$\Delta u = \varepsilon_{n+1/2}\Delta t, \quad u_{n+1} = u_n + \Delta u, \quad u_{n+1/2} = u_n + (\Delta u/2),$$

$$\eta_{n+1/2} = u_{n+1/2} - y_{n+1/2}, \quad \Delta y = \eta_{n+1/2}\Delta t,$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y, \quad y_{n+1+1/2} = y_{n+1} + (\Delta y/2).$$

Эти значения улучшаются с помощью итерации обычными методами. Дается оценка быстроты сходимости. Для конкретных примеров описанным способом проведен расчет систем с ненулевыми начальными условиями, систем с параметрами, зависящими от времени, нелинейных систем, а также систем с запаздыванием, для которых указанный метод особенно удобен. Ошибки в промежуточных расчетах определяются методом экстраполяции. Можно значительно улучшить результаты вычислений посредством повторения расчета по усредненным значениям. Предложенный метод сравнивается с методом Наумова. И. Ф. Шелихова

10988. Способ быстрого нахождения численных значений переходных характеристик. Апрайле (Calcolo numerico rapido della risposta transitoria. Aprile Giuseppe), Calore, 1958, 29, № 5, 203—205 (итал.)

Предлагается способ приближенного нахождения численных значений функции $y(t)$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty r(\omega)\sin\omega t\,d\omega, \qquad (1)$$

$$y(t) = A(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty i(\omega)\cos\omega t\,d\omega. \qquad (2)$$

Здесь $r(\omega) = \mathrm{Re}\,F(j\omega)/\omega$; $i(\omega) = \mathrm{Im}\,F(j\omega)/\omega$; $F(j\omega)$ — передаточная функция рассматриваемой системы; $A(0) = |F(j\omega)|_{\omega=0}$. Практически значения функций $r(\omega)$, $i(\omega)$ малы для $\omega > \Omega$ (Ω — некоторое фиксированное число). Это позволяет заменить интегралы в выражениях (1) и (2) их приближенными значениями с конечным верхним пределом Ω. Сами функции $r(\omega)$, $i(\omega)$ аппроксимируются полиномами подходящей степени, после чего нахождение приближенных значений функции $y(t)$ не представляет труда.

Ю. М. Барабошкин

10989. Другой вид некоторых экспоненциальных и степенных функций для графического изображения.

Гаррис (Alternative forms of some exponential and power functions for graphical representation. Harris C. C.), J. Appl. Phys., 1960, **31**, № 1, 215 (англ.)

Для вычисления значений функции $Y = Ae^{-bX} + k$ последнюю удобно представить в виде пары рекуррентных соотношений: $X_r = X_{r-1} + \Delta$, $Y_r = Y_{r-1}e^{-b\Delta} + k(1 - e^{-b\Delta})$, где r — целое, $\Delta > 1$ — постоянно.

Автор рассматривает аналогичные представления для функций

$$Y = \exp(-bX^n), \quad (1)$$

$$Y = 1 - BX^N. \quad (2)$$

Здесь b, n, B, N — параметры. Положим

$$X_{r-1} = qX_r \ (q - \text{постоянное}). \quad (3)$$

Тогда (1) сводится к паре соотношений (3) и

$$Y_{r-1} = Y_r^Q, \quad (Q = q^n), \quad (4)$$

а (2) сводится к соотношениям (3) и

$$Y_{r-1} = (1 + q^N) + q^N Y_r. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) можно заменить одним общим соотношением $Y_{r-1} = (1 + q^N) + q^N Y_r^Q$.

Ю. М. Барабошкин

10990. Подбор экспериментальных формул с помощью цифровых вычислительных машин. Кленшоу (Curve fitting with a digital computer. Clenshaw C. W.), Comput. J., 1960, **2**, № 4, 170—173 (англ.)

Многочлен $Y_i(x)$ степени i, приближающий наилучшим образом функцию $y(x)$, заданную своими значениями $y_r = y(x_r)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, m)$ в $m + 1$ точке, можно найти, пользуясь известным методом представления $Y_i(x)$ в ортогональном базисе $Y_i(x) = \sum_{j=0}^{i} c_j p_j(x)$. Здесь: $c_j = \sum_r y_r p_j(x_r) / \sum_r \{p_j(x_r)\}^2$, $p_j(x)$ — многочлен степени j, удовлетворяющий условию $\sum_r p_i(x_r) p_j(x_r) = 0$ $(i \neq j)$. Многочлены $p_j(x)$ можно находить из следующего рекуррентного соотношения $p_{j+1}(x) = \lambda_j (x - \alpha_{j+1}) p_j(x) - \beta_j p_{j-1}(x)$, где

$$\alpha_{j+1} = \sum_r x_r \{p_j(x_r)\}^2 / \sum_r \{p_j(x_r)\}^2,$$

$$\beta_j = \lambda_j \sum_r \{p_j(x_r)\}^2 / \lambda_{j-1} \sum_r \{p_{j-1}(x_r)\}^2,$$

λ_j — параметр, $\beta_0 = 0$.

Автор предлагает несколько измененную схему указанного метода. Многочлены $p_j(x)$ представляются в следующей форме: $p_j(x) = 1/2P_0^{(j)} + P_1^{(j)}T_1(x) + P_2^{(j)}T_2(x) + \ldots + P_{j-1}^{(j)}T_{j-1}(x) + T_j(x)$ $(j > 0)$. Здесь $T_i(x)$ есть многочлен Чебышева степени i. Положив $\lambda_i = 2$ легко можно получить следующее рекуррентное соотношение: $P_i^{(j+1)} = P_{i+1}^{(j)} + P_{i-1}^{(j)} - 2\alpha_{j+1}P_i^{(j)} - \beta_j P_i^{(j-1)}$. Искомый многочлен $Y_i(x)$ также представляется в форме $Y_i(x) = 1/2A_0^{(i)} + A_1^{(i)}T_1(x) + A_2^{(i)}T_2(x) + \ldots + A_i^{(i)}T_i(x)$, где $A_j^{(i)} = A_j^{(i-1)} + c_i P_j^{(i)}$.

Показывается, что при реализации предлагаемой схемы на цифровой вычислительной машине во многих случаях удается значительно сократить объем используемой машинной памяти при некотором увеличении времени вычислений. Приводятся соображения о рациональном выборе степени i приближающего многочлена $Y_i(x)$. В конце статьи подробно описывается программа нахождения приближающего многочлена по предложенной схеме, составленная для цифровой вычислительной машины ДЭЮКЕ. Ю. М. Барабошкин

10991. Оценка параметров для простых нелинейных моделей. Чжоу (Parameter estimation for simple nonlinear models. Chow Wen M.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, **2**, № 7, 28—29 (англ.)

Обзор методов и рекомендации по подбору параметров в эмпирической формуле типа $y = a + kx^m$ (т. е. $\ln(y - a) = m \ln x + \ln k$). Значение a подбирается так, чтобы максимизировать коэффициент корреляции между $\ln(y - a)$ и $\ln x$, затем вычисляются m и k. Метод применим, например, к $y = ab^{c^x}$. М. Л. Бродский

10992. К эффекту метода средних. Хигути (Higuchi Kazuo), Эхимэ дайгаку киё. Дайсанбу-когаку, Mem. Ehime Univ., 1957, Sec. III, 3, № 2, 85—96 (японск.; рез. англ.)

Показывается, что в случае выравнивания совокупности точек прямой линией методом средних, когда выбираются точки с абсциссами, равными или меньшими чем их среднее $1/2 < (\sigma_s/\sigma_a)^2 \leqslant 1$, где σ_a^2 и σ_s^2 — дисперсии разностей ординат этой линии и линии, полученной по методу наименьших квадратов, от ординат эмпирических точек. В специальном случае точек с равноотстоящими абсциссами этот результат совпадает с результатами Мердухова (РЖМат, 1956, 5513).

Резюме автора

10993. Суммирование последовательностей выборочным методом. Роман (Skip-term summation of sequences. Roman Irwin), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, **13**, № 66, 117—121 (англ.)

Для вычисления конечных сумм $\sum_{i=0}^{m} \gamma_{ig}$ в некоторых случаях выгодно построить интерполяционный полином для $\gamma_{ig} = f(i)$ по значениям в некоторых (равноотстоящих) узлах и просуммировать вместо функции интерполяционный полином. Приближенное значение суммы, полученное этим методом, выразится через $\gamma_{0g}, \gamma_{1g}, \gamma_{2g}, \ldots, \gamma_{ng}$ $(ng = m)$. Составлены таблицы коэффициентов при $n = 2,6$; $g = 5,10,25,50,100$; $n = 10$, $g = 5,10$. Метод удобен при „вычислении конечных сумм членов, которые достаточно гладки, но бесконечные ряды из которых расходятся. Он также удобен, когда члены вычисляются легко только при номерах, кратных некоторой константе, и когда последовательности членов проще вычислять при больших номерах чем при малых". М. Л. Бродский

10994. Перепечатка заметки об ошибках округления. Форсайт (Reprint of a note on rounding-off errors. Forsythe George E.), SIAM Rev., 1959, **1**, № 1, 66—67 (англ.)

Ошибки, возникающие при обычном округлении в процессе численного решения дифференциальных уравнений, нередко рассматривают как независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале (—0,5; 0,5). На самом деле, как показал ряд исследований, это выполняется не всегда. Поэтому полная ошибка округления получается в ряде случаев значительно больше ее теоретического значения, вычисленного в предположении, что единичные ошибки округления есть случайные величины. Предлагается использовать процесс «случайного округления», который заключается в том, что к цифрам тех разрядов округляемого числа, которые должны быть отброшены, прибавляются случайные цифры. После этого ошибки единичных округлений становятся случайными величинами. Заметка была опубликована в 1951 г. Ю. М. Барабошкин

10995. Сравнительный анализ некоторых численно-графических методов расчета переходных процессов. Сучилин А. М., Электричество, 1959, № 11, 32—36

В начале статьи приводятся общие рассуждения относительно причин возникновения случайных и система-

тических погрешностей при расчете переходных процессов численными и графическими методами, а также рассматриваются возможности уменьшения вычислительной работы и уменьшения влияния погрешностей отдельных вычислений и округлений на результат расчета. На примере дифференциального уравнения первого порядка, решение которого лежит в основе расчета переходных процессов, проведено исследование зависимости систематической погрешности решения задач от различного выбора методов расчета. И. Ф. Шелихова

10996. Упрощенный численный анализ. Мейли (A simplified numerical analysis. Maley C. E.), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1959, **63**, № 577, 59—62 (англ.)

Предлагается единый способ записи и составления большой группы формул численного анализа, так или иначе связанных с интерполяцией (функций одной или нескольких переменных, линейной или более высокого порядка), облегчающей освоение и запоминание математиками многих методов численного анализа для машинного и ручного решения ряда задач, являющийся «карманным инструментом, всегда готовым для использования ученым или инженером». Известный способ записи интерполяционного полинома при помощи определителей Вандермонда может быть обобщен и на функции многих переменных. Например, линейная функция двух переменных по значениям в трех точках (x_0, y_0); (x_1, y_1); (x_2, y_2) задается приравниванием нулю известного определителя четвертого порядка, откуда

$$z = -[xy\,1]\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Через обобщенные определители и матрицы Вандермонда, для которых в работе введены специальные обозначения и названия, просто выражаются многие формулы, служащие для прямой и обратной интерполяции, решения линейных систем (приведен пример), численного дифференцирования, отыскания экстремумов и, в частности метода наименьших квадратов, вычисления интегралов (в том числе кратных), численного интегрирования дифференциальных уравнений и систем (в том числе не разрешенных относительно производных). Обращается внимание на необходимость последующего преобразования некоторых формул во избежание потери точности при их применении. М. Л. Бродский

10997. Решение краевых задач на моделирующем устройстве REAC. Янович (The solution of boundary value problems on a REAC analog computer. Yanowitch M.), Computers and Automat., 1957, **6**, № 2, 26—29, 39 (англ.)

Исследуется вопрос решения краевых задач и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений на моделирующем устройстве. Основное внимание обращено на описание математического метода — метода суперпозиции. Согласно этого метода (применимого только к линейным уравнениям) решение данной неоднородной краевой задачи получается в виде суммы частного решения соответствующей начальной задачи и линейной комбинации фундаментальных решений. Коэффициенты в этой комбинации подбираются из условия удовлетворения правому граничному условию. В случае задачи на собственные значения условие удовлетворения правому граничному условию приводит к детерминанту $D(\lambda)$, корни λ которого являются искомыми собственными значениями. В качестве примеров рассмотрены краевая задача $(EIu'')'' = f$, $u = u' = 0$ при $x = 0$, $u'' = u''' = 0$ при $x = L$ и задача на собственные значения $(EJu'')'' = \lambda(mu + S\theta)$, $-(GJ\theta')' = \lambda(Su + J\theta)$, $u = u' = \theta = 0$ при $x = 0$, $u'' = u''' = \theta' = 0$ при $x = L$.

Отмечаются следующие преимущества применяемого метода. 1) Метод относительно прост и требует малой затраты времени; 2) Метод дает не только решение данного дифференциального уравнения n-го порядка, но и его производные до $(n-1)$-го порядка; 3) Метод может быть непосредственно применен к дифференциальным уравнениям, содержащим степени λ, например, $au^{IV} + (M^2/a)u'' = -2\lambda u'' - (\lambda^2/a)u$; 4) Метод применим к несамосопряженным задачам (при условии, что λ — вещественное).

В качестве недостатка метода отмечаются следующие два. 1) В некоторых задачах практически можно вычислять только первые несколько собственных значений. 2) Трудность точного введения функций; это обстоятельство является главным источником ошибок в случае переменных коэффициентов. В. К. Саульев

10998. Графическое исследование логнормального распределения. Дюваль (Étude graphique d'une distribution lognormale. Duval R.), Rev. statist. appl., 1959, **7**, № 1, 107—115 (франц.)

Описывается графический способ определения основных параметров распределения случайной величины. Участок кумулятивной кривой для значений функции распределения от 0,16 до 0,84 спрямляется путем нанесения ее в нормально логарифмической (логнормальной) сетке, называемой также гауссо-логарифмической или гальтон-логарифмической. В такой сетке значения абсцисс соответствуют функциональной шкале натуральных логарифмов, а значения ординат — шкале функции

$$\pi(t) = 1/\sqrt{2\pi}\int_0^t e^{-z^2/2}\,dz.$$

График спрямленной кумулятивной кривой позволяет довольно просто находить величины среднеарифметического $m = \gamma \cdot e^{\sigma^2/2}$ и моды $s = \gamma \cdot e^{-\sigma^2}$ (γ — медиана, σ — стандарт), не прибегая к кривым Пирсона. В тех случаях, когда кривая исследуемого распределения непосредственно не спрямляется на данном участке логнормальной сетки, иногда удается спрямить ее смещением аргумента t на некоторую величину $k = \text{const}$.

М. Л. Платонов, А. Б. Штыкан

10999. Графические методы, основанные на свойствах передвигаемых центроидов. Аскович (Graphic methods based upon properties of advancing centroids. Askovitz S. I.), J. Amer. Statist. Assoc., 1959, **54**, № 287, 668—673 (англ.)

Линейная интерполяция по способу наименьших квадратов может осуществляться графически. Обоснование построений опирается на нормальную систему способа наименьших квадратов и выражения для средних значений с весом. В данной статье рассматривается простой графический путь линейной интерполяции по трем точкам, произвольно расположенным на плоскости. То же можно сделать по четырем точкам. Указывается, что при наличии большего количества исходных точек их сначала можно свести к трем обобщенным центроидам (усредненным точкам) и затем применить вышеизложенный графический метод. Для равноотстоящих по X-координате точек рассматривается графическая корректировка уже осуществленной каким-либо способом линейной интерполяции в случае, когда к исходной совокупности точек на плоскости добавляется еще одна. Очевидно, что этот процесс добавления последовательно по одной точке может повторяться сколько угодно раз. Диаграммы распределения изучаемых величин часто публикуются без сопровождения таблицами цифровых данных. В работе показывается, как можно вычислять среднее значение частоты распределения величины, опираясь только на ее графическое изображение. При этом сначала осуществляется линейная интерполяция и затем проводятся элементарные дополнительные построения. Приводятся обоснования правильности предлагаемы

графических приемов вычисления. Библ. 8 назв.
М. Л. Платонов

11000. Приближенное графическое решение некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. Румберг (Graphische Näherungslösung einiger nichtlinearer Differentialgleichungen. Romberg W.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 391—393 (нем.)

В рецептурной форме описывается ход приближенного графического решения уравнений вида

$$L_n(u) = f(t) + U(u). \qquad (1)$$

Здесь $L_n(u)$ есть линейный дифференциальный оператор порядка n обычно с постоянными коэффициентами. Член, не содержащий производной неизвестной функции u, выносится из него в правую часть в виде $V(u) = U(u) - a_n u$. После этого (1) аппроксимируется разностным уравнением $(u_{k+1} - u_k)Q = \sum (u_{k-n+j+1} - u_{k-n+j})P_j + h^n V(u_k) + h^n f(t_k)$ по способу, описанному ранее автором для $n = 2$ до $n = 6$ в (Vorläufiger Bericht, Fysisk Institutt, NTH Trondheim. Dez., 1958). На эту же статью сделана ссылка по вопросу о целесообразном выборе величины интервалов h. Для начала построения необходимо знать два значения $u_0 = u(t_0)$ и $u_1 = u(t_0) + u(t_0 + h)$ искомой функции $u = u(t)$. Дискретные значения $\widetilde{u}_t = \widetilde{u}(t_t)$ получаются графическим построением в виде функциональной шкалы на оси $u(t)$. Рассмотрен пример решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.
А. Б. Штыкан

11001. О приведении уравнений к I и II каноническому виду уравнений третьего номографического порядка. Войтович (O sprowadzaniu równań do I i II formy kanonicznej równania trzeciego rzędu nomograficznego. Wojtowicz Jacek), Zesz. nauk. Politechn. warsz., 1959, № 40, 121—135 (польск.; рез. русск., англ.)

Исследуются условия приведения данной функциональной зависимости с тремя переменными вида $F(x, y, z)$ к первой и второй каноническим формам уравнений третьего номографического порядка. Вводятся понятия анаморфизирующей функции одной переменной $\Phi(u)$, для которой справедливо равенство: $\Phi[F(x,y,z)] = f(x) + g(y) + h(z)$, а также анаморфизирующего множителя $\varphi(x, y, z)$ такого, что $\varphi(x, y, z) \cdot F(x, y, z) = f(z) + g(y) + h(z)$ и уравнения $F = 0$ и $\varphi F = 0$ являются равносильными.

Доказаны необходимые и достаточные условия существования анаморфизирующей функции, приводящей данную функцию ко II каноническому виду и указан метод ее вычисления. Далее получены необходимые и достаточные условия существования анаморфизирующего множителя, зависящего только от 2 переменных и приводящего данное уравнение $F(x, y, z)$ ко II каноническому виду, а также дан метод вычисления такого множителя. Во второй части работы рассмотрена возможность приложения выведенных условий к I каноническому виду уравнений третьего номографического порядка.

11002. Приближенные номограммы первого жанра. Пентковский М. В., КазССР, Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1959, вып. 7(11), 3—39 (рез. каз.)

Приближенные номограммы из выравненных точек для зависимости с тремя переменными

$$v = f(u, w), \qquad (1)$$

где v—ответное переменное, получают из точных номограмм с контактом касания зависимости (1) путем замены в них семейства линий w точками. В номограмме с контактом касания зависимости (1) берутся прямолинейные шкалы u и v, причем шкала v считается ответной и задается заранее, а шкала u получается из условия обращения линии w_0 в точку. Вид ответной шкалы v выбирается таким образом, чтобы одной и той же геометрической погрешности Δl в разных местах шкалы соответствовали бы погрешности ответа, подчиняющиеся заранее выбранному закону. После замены линий w точками подбирается проективное преобразование номограммы, сохраняющее инвариантной ответную шкалу.

Рассмотрен случай параллельных и пересекающихся шкал u и v. Последний случай характеризуется наличием дополнительного параметра μ, определяющего угол между прямолинейными шкалами. Предполагается, что функция (1) имеет необходимое число частных производных по u и w в области номографирования. Кроме этого, предполагается, что линии из семейства w не имеют в области номографирования точек перегиба. Найдены соответствующие аналитические условия. Линии w заменяются точками так, чтобы максимальные геометрические погрешности Δl были равны по величине и противоположны по знаку. Для обоих указанных случаев в работе приведены отвечающие этим требованиям уравнения шкал w и формулы максимальных геометрических погрешностей, найденные при фиксированных параметрах w_0 (параллельные шкалы) и w_0 и μ (пересекающиеся шкалы). Значения этих параметров рекомендуется определять так, чтобы $\sup |\Delta l|$ имел в области номографирования наименьшее значение. Приведены пять примеров приближенных номограмм. Три из них даны для номографируемых зависимостей. Приближенные номограммы для них получаются более точными.
Г. С. Хованский

11003. Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраизация и стереоскопическая номография. Вильнер И. А., Сб. статей Всес. заочн. политехн. ин-та, 1958, вып. 21, 98—118

Работа содержит рассмотрение многочисленных вопросов теоретической номографии, в частности перечисленных в заголовке. Проблема анаморфозы в $N+1$-мерном пространстве сводится к N-мерному случаю посредством повторения переменной и эмпирического подбора решений некоторых функциональных уравнений.
Г. Е. Джемс-Леви

11004. О проективности номографических представлений уравнений. Николаев П. В., Матем. сб., 1958, 45, № 3, 369—396

Дано уравнение

$$F(t, \tau) = F(t_1, \tau_1,\ t_2, \tau_2,\ t_3, \tau_3) = 0, \qquad (1)$$

аналитическое в некоторой области G шестимерного комплексного пространства, допускающее в G анаморфозу

$$\Phi(t, \tau) = \psi(t, \tau) \cdot F(t, \tau) = \| f_{i_1}(t_t, \tau_t) f_{i_2}(t_t \tau_t) f_{i_3}(t_t \tau_t) \|, \qquad (2)$$

где $\Phi(t, \tau)$ —также аналитическая ($\Phi \not\equiv 0$) в G функция, а $\psi(t, \tau) = \psi_1(t_2, \tau_2, t_3, \tau_3) \cdot \psi_2(t_3, \tau_3, t_1, \tau_1) \psi_3(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2)$ — A-множитель этого уравнения. Доказывается следующая основная теорема: Если уравнение (1) допускает две непроективных между собой анаморфозы (2), то все бинарные поля переменных (t_t, τ_t) вырождаются в бинарные шкалы на алгебраических кривых. Сумма порядков различных кривых в каждой анаморфозе равна трем.
Г. Е. Джемс-Леви

ТАБЛИЦЫ

11005. Численные значения ортогональных полиномов Лагерра. Трикоми (Valori numerici di funzioni ortogonali di Laguerre. Tricomi Francesco G.), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955—1956, **90**, № 1, 63—70 (итал.)

Автор дополняет и исправляет таблицы, составленные им ранее (Tricomi F., Atti Accad. sci. Torino, 1941, **76**, 281 – 316), для первых десяти полиномов Лагерра $l_n(x) = e^{-x/2} L_n(x) = e^{-x/2} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{(-x)^m}{m!}$

с 4—5 десятичными знаками на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 34$, где содержатся все нули функций $l_n(x)$. Здесь приводятся таблицы функций $l_n(x)$ при $0 \leqslant n \leqslant 10$ с шестью значащими цифрами для $x = 0(0{,}1)\,1\,(0{,}25)\,6{,}00$ и $x = 7(1)34$. Сравнивая полученные табличные значения с соответствующими значениями из других аналогичных таблиц (Slater L. J., A short table of the Laguerre polynomials, Monogr. № 136 of the Inst. Electr. Eng., London, 1955), автор нашел в последних три неверных значения. Контроль таблиц проводился сравнением результатов, полученных по следующим двум формулам: $l_n(x/2) = e^{x/4} \cdot 2^{-n}\left[l_0(x) + \binom{n}{1} l_1(x) + \binom{n}{2} l_2(x) + \ldots + \binom{n}{n} l_n(x)\right]$,

$l_n(x+h) = [l_n(h) - l_{n-1}(h)]\,l_0(x) + [l_{n-1}(h) - l_{n-2}(h)]\,l_1(x) + \ldots + [l_1(h) - l_0(h)]\,l_{n-1}(x) + l_0(h)\,l_n(x)$. М. К. Керимов

11006. О табулировании некоторых функций Ханкеля в интегральном представлении. Горун (Über die Tabulierung eines den Hankelschen Funktionen verwandten Integrals. Gorup Guntram v.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 7-8, 256—257 (нем.)

Рассматриваются методы табулирования выражения $S_n(x) = \int_0^\infty e^{-nt} e^{-z(\mathrm{cht}-1)}\,dt$, $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$, которое связано цилиндрическими функциями соотношением

$$S_n(z) = e^z K_n(z) - R_n(z), \qquad (1)$$

где $R_n(z)$ — полином от z^{-1}. Представление (1) пригодно для вычисления S_n для малых значений n и больших значений $|z|$; при таких же ограничениях можно использовать рекуррентную формулу: $S_{n+1} = S_{n-1} - \frac{2}{z}(1 - nS_n)$, $S_0 = e^z K_0$, $S_1 = e^z K_1 - \frac{1}{z}$. Для S_n находится асимптотическое выражение

$$S_n(z) \approx \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{2^\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} \left(\prod_{r=-\nu}^{+\nu} \frac{1}{n-r}\right)\left(-z^\nu\right),\ m < n, \qquad (2)$$

по которому можно считать S_n для больших n и малых $|z|$ с большой, но для каждого случая ограниченной точностью. Для чисто мнимого значения $z = ik$ предлагается считать S_n по формуле (2), а для некоторых промежуточных значений индекса n по формуле $S_n(z) = \int_0^1 x^{n-1} e^{-\frac{z}{2}\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)} dx$ со специальным выбором интерполяционных формул. В. И. Лебедев

11007. Математические таблицы. Гудуин (Mathematical tables. Goodwin E. T.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 155—159. Discuss., 159—160 (англ.)

В порядке беглого обзора рассматриваются два вопроса: вычисление математических таблиц на быстродействующих вычислительных машинах и использование математических таблиц в быстродействующих вычислительных машинах. При этом таблицы подразделяются на следующие четыре группы: 1) таблицы элементарных функций (например, тригонометрических или экспоненциальных); 2) таблицы специальных («высших») математических функций (например, функций Бесселя); 3) таблицы «физических функций» (простые функции, содержащие постоянные, найденные экспериментальным путем); 4) «физические таблицы» (таблицы, полученные в результате эксперимента). В. К. Саульев

11008. Таблицы интегралов поля лигандов. Бальхаусен, Анкмон (Table of ligand field integrals. Ballhausen C. J., Ancmon E. M. Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab, 1958, **31**, № 9, 38 pp., ill.) (англ.)

В теории поля лигандов встречается следующий интеграл электронного взаимодействия:

$$G^n_{3d,3a} = \int R(3d)\,\frac{r^n_<}{r^{n+1}_>} R(3d)\,r^2\,dr = \int_0^{r_0} R^2(3d)\,\frac{r^{n+2}}{r^{n+1}_0}\,dr + \int_{r_0}^{\infty} R^2(3d)\,\frac{r^n_0}{r^{n-1}}\,dr$$

и ее первая и вторая производные по длине связи r (т. е. по расстоянию от иона металла до лиганда): $B^n_{a,b} = \frac{d}{dr_0} G^n_{a,b}$, $C^n_{a,b} = \frac{d^2}{dr_0^2} G^n_{a,b}$. Здесь $R(3d)$ есть водородоподобная волновая функция от $3d$ и r_0, имеющая эффективный заряд Z_{3d}.

В статье приводятся следующие таблицы: 1) Таблицы значений $G^n_{3d,3d}$, $B^n_{3d,3d}$, $C^n_{3d,3d}$ с 8-значащими цифрами для $n = 0{,}2{,}4$ и $Z_{3d} = 3{,}65$ (переменный) 7,85 $r = r_0/a_0 = 3{,}40\,(0{,}10)\,4{,}20$ (здесь a_0 — боровский радиус) 2) Таблицы значений $G^2_{3d,4s}$ с 8-значащими цифрами для $Z_{3d} = 3{,}65$ (переменный) 7,85, $r = 3{,}40\,(0{,}10)\,4{,}20$; 3) Таблицы значений $G^n_{3d,4p}$ и $B^n_{3d,4p}$ с 8-значащими цифрами при $n = 1{,}3$ для $Z_{3d} = 3{,}65$ (переменный) 7,85, $Z_{4p} = 3{,}00$ (переменный) 4,25, $r = 3{,}40\,(0{,}10)\,4{,}20$; 4) Таблицы значений $G^0_{4s,4s}$ с 8-значащими цифрами для $Z_{4s} = 2{,}50$ (переменный) 5,00, $r = 3{,}20\,(0{,}10)\,4{,}20$. Таблицы вычислены на машине ИБМ-650. Из-за округлений последние две цифры табличных значений могут содержать ошибку. М. К. Керимов

11009 К. Таблицы функций Бесселя дробного индекса. Т. 1. $J_\nu(x)$. Перев. с англ. Вычисл. центр АН СССР. М., 1959, XXIV, 414 стр., 22 р. 15 к.

Книга является вып. 4 «Библиотеки математических таблиц», издаваемой Вычислительным центром АН СССР. Оригинал книги был подготовлен и выпущен Национальным бюро стандартов США в 1948 г. (Tables of Bessel functions of fractional order, vol. 1, New York, Columbia Univ. Press, 1948).

В книге приведены следующие таблицы: 1) Таблицы функций $J_\nu(x)$ и их вторых центральных разностей с десятью десятичными знаками при $\nu = -3/4$, $x = 0(0{,}001)\,0{,}9\,(0{,}01)\,25$; $\nu = -2/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}9\,(0{,}01)\,25$; $\nu = -1/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}8\,(0{,}01)\,25$; $\nu = -1/4$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}8\,(0{,}01)\,25$; $\nu = 1/4$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}6\,(0{,}01)25$; $\nu = 1/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}6\,(0{,}01)\,25$; $\nu = 2/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}5\,(0{,}01)\,25$; $\nu = 3/4$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}5\,(0{,}01)\,25$. Шаг таблицы выбран так, чтобы интерполяция со вторыми центральными разностями была достаточна для получения удовлетворительных результатов. В некоторых областях для интерполяции используются четвертые разности. В этих областях формула Эверетта со вторыми разностями всегда обеспечивает получение семи точных значащих цифр. 2) Таблицы функций $x^{-\nu} J_\nu(x)$ и их вторых центральных разностей. Эти таблицы составлены для $x < 0{,}05$ с тем же числом десятичных знаков. 3) Таблицы функций $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$ при $\nu = \pm 1/4;\ \pm 1/3;\ \pm 2/3;\ \pm 3/4$ для $x = 25(0{,}1)\,50\,(1)\,500\,(10)\,5000\,(100)\,10\,000\,(200)\,30\,000$ с десятью десятичными знаками. Эти таблицы позволяют получить соответствующие значения для функции $J_\nu(x)$, так как между ними имеется зависимость $J_\nu(x) = A_\nu(x) \times \cos(x - 1/2\pi\nu - 1/4\pi) - B_\nu(x) \sin(x - 1/2\pi\nu - 1/4\pi)$. Для $x > 30\,000$ значения $J_\nu(x)$ можно получить с девятью значащими цифрами из асимптотического разложения, используя два первых его члена (это разложение приводится в начале книги вместе с другими сведениями

из теории функций Бесселя и примерами вычислений). 4) Значения коэффициентов $E_2(p)$, $F_2(p)$, $E_4(p)$, $F_4(p)$ формулы Эверетта; таблица синуса и косинуса при $x = 0{,}00\,(0{,}01)\,1{,}60$ и при $x = 2\,(1)\,40$ с десятью десятичными знаками; числа, кратные числу $\pi/2$; таблица некоторых констант (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2/\pi}$ и т. п.); таблица значений $L_\nu(\mu)$ для интерполяции по индексу ν при $\nu = \pm 1/4;\ \pm 1/3;\ \pm 2/3;\ \pm 3/4$ для $\mu = 0{,}000\,(0{,}001)\,1{,}000$. Здесь $L_\nu(\mu) = L(\mu)/(\mu - \nu)\,L'(\nu)$, $L(\mu) = (\mu^2 - 0^2)\times (\mu^2 - 1/16)\,(\mu^2 - 4/9)\,(\mu^2 - 1/9)$, $J_\mu(x) \approx L_{-3/4}(\mu)\,J_{-3/4}(x) + L_{-2/3}(\mu)\,J_{-2/3}(x) + L_{-1/3}(\mu)\,J_{-1/3}(x) + L_{-1/4}(\mu)\,J_{-1/4}(x) + L_{1/4}(\mu)\,J_{1/4}(x) + L_{1/3}(\mu)\,J_{1/3}(x) + L_{2/3}(\mu)\,J_{2/3}(x) + L_{3/4}(\mu)\,J_{3/4}(x)$. Библ. 42 назв. М. К. Керимов

11010 К. Таблицы функций Бесселя дробного индекса. Т. 2. $I_\nu(x)$. Обработка таблиц и перев. с англ. Э. А. Чистовой. Вычисл. центр. АН СССР, М., 1959, XI, 366 стр. 19 р. 75 к.

В этом вып. 5 „Библиотеки математических таблиц", издаваемой Вычислительным центром АН СССР, воспроизведен текст книги, первоначально изданной в США в 1949 г. (Tables of Bessel functions of fractional order, vol. 2, New Vork, Columbia Univ. Press, 1949).

В книге приведены следующие таблицы: 1) Таблицы функций $I_\nu(x)$ и их вторых центральных разностей при $\nu = -3/4$, $x = 0\,(0{,}001)\,1{,}00\,(0{,}01)\,13{,}00$; $\nu = -2/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,1{,}00\,(0{,}01)\,13{,}00$; $\nu = -1/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}80\,(0{,}01)\,13{,}00$; $\nu = -1/4$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}80\,(0{,}01)\,13{,}00$; $\nu = 1/4$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}60\,(0{,}01)\,25{,}00$; $\nu = 1/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}60\,(0{,}01)\,25{,}00$; $\nu = 2/3$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}50\,(0{,}01)\,25{,}00$; $\nu = 3/4$, $x = 0\,(0{,}001)\,0{,}50\,(0{,}01)\,25{,}00$. Для $x < 0{,}05$ даются таблицы вспомогательных функций $x^{-\nu}\,I_\nu(x)$ вместе со вторыми центральными разностями. Для $x > 30\,000$ значения $I_\nu(x)$ можно получить с девятью значащими цифрами, используя первые два члена приведенного в книге асимптотического разложения. Шаг таблиц выбран так, что в большинстве случаев интерполяция с помощью вторых центральных разностей дает максимальную точность. В областях, где эта точность не может быть получена с помощью вторых разностей, используются четвертые центральные разности. В этих областях применение интерполяционной формулы Эверетта со вторыми разностями обеспечивает точность в семь значащих цифр. 2) Таблицы функций $e^{-x}I_\nu(x)$ с десятью десятичными знаками при $\nu = \pm 1/4;\ \pm 1/3;\ \pm 2/3;\ \pm 3/4$ для $x = 25(0{,}1)\,50\,(1)\,500\,(10)\,5000\,(100)\,10\,000\,(200)\,30\,000$. 3) Коэффициенты интерполяционной формулы Эверетта, таблицы коэффициентов $L_\nu(\mu)$ для интерполяции по индексу ν и т. п. (реф. 11009К) М. К. Керимов

11011 К. Таблицы интегро-экспоненциальной функции $E_\nu(x) = \int_1^\infty e^{-xu}\,u^{-\nu}\,du$. Пагурова В. И., Вычисл. центр. АН СССР. М., 1959, XII, 152 стр., 9 р. 60 к.

В книге приводятся таблицы для функции $E_\nu(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения $x(d^2E_\nu(x)/dx^2) + (2 - \nu + x)(dE_\nu(x)/dx) + (1 - \nu)E_\nu(x) = 0$. Для функции $E_\nu(x)$ справедливо следующее разложение

$$E_\nu(x) = \Gamma(1-\nu)\,x^{\nu-1} - e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(1-\nu)(2-\nu)\ldots(1+k-\nu)},$$

а также асимптотическое разложение для больших x:

$$E_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{x}\left\{1 + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\frac{\Gamma(\nu+m)}{x^m} + R(k,\nu,x)\right\},$$

где

$$|R(k,\nu,x)| < (\Gamma(\nu+k+1)/\Gamma(\nu))\,(1/x^{k+1}).$$

Если x и ν оба велики, то удобнее пользоваться асимптотическим разложением

$$E_\nu(x) = (e^{-x}/(x+\nu))\,[1 + (\nu/(x+\nu)^2) + \nu(\nu-2x)/(x+\nu)^4 + \nu(6x^2 - 8\nu x + \nu^2)/(x+\nu)^6] + R(\nu,x),$$

где

$$|R(\nu,x)| < (e^{-x}/x)\,\nu/(x+\nu)^8\,|-24x^3 + x^2(-72-58\nu) + (x+1)(-114 + 116\nu - 22\nu^2) + \nu^3|.$$

Справедливы также рекуррентные соотношения

$$E'_\nu(x) = -E_{\nu-1}(x),\quad E_\nu(x) = \int_x^\infty E_{\nu-1}(u)\,du,$$

$$E_\nu(x) = (1/(\nu-1))\,\{e^{-x} - xE_{\nu-1}(x)\},\quad \nu \neq 1;$$

$$E_\nu(x) = (1/(\nu-1)) - \int_0^x E_{\nu-1}(u)\,du,\quad \nu > 1.$$

В книге имеются следующие таблицы: 1) Таблицы функции $E_n(x)$ с семью-десятью верными десятичными знаками для $x = 0\,(0{,}01)\,2\,(0{,}1)\,10$ и $n = 0\,(1)\,20$; 2) Таблицы функций $E_2(x) - x\ln x$ и $E_3(x) + (x^2/2)\ln x$ с семью-десятью верными десятичными знаками для x, близких к нулю; 3) Таблицы функций $e^xE_n(x)$ с семью верными десятичными знаками для $x = 10\,(0{,}1)\,20$ и $n = 2\,(1)\,10$; 4) Таблицы функций $e^xE_\nu(x)$ с семью верными десятичными знаками для $x = 0{,}01\,(0{,}01)\,7\,(0{,}05)\,12\,(0{,}1)\,20$ и $\nu = 0\,(0{,}1)\,1$, а для малых значений x — с семью верными значащими цифрами. В таблицах 3) и 4) даются также значения множителя e^x. Для интерполяции по x и по ν рекомендуется использовать формулу Лагранжа по трем, четырем и пяти точкам. Даны области с указанием соответствующих интерполяционных формул и величин, получающихся при этом ошибок. М. К. Керимов

См. также: 10177, 10283, 10474, 10475, 10657.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

11012. Индексация и метод управляющих слов. Блау (Indexing and control-word techniques. Blaauw G. A.), IBM J. Res. and Developm., 1959, **3**, № 3, 288—301 (англ.)

Подробно описывается методика организации циклов, разработанная для вычислительной машины СТРЕТЧ фирмы «ИБМ». Особенностью методики явля тся разработка большого количества специальных команд, объединяющих сразу несколько операций управления, что позволяет свести к минимуму количество команд управления в цикле. Переадресация в СТРЕТЧ осуществляется с помощью индекс-регистров. Текущий адрес эле-

мента некоторого массива представляется в виде $B+f(i)$, где B — базисный адрес начала массива, а $f(i)$ — текущее значение индекса. B обычно указывается в адресе исполнительной команды, а $f(i)$ — в индекс-регистре. $f(i)$ — как правило, линейная функция, вычисляемая путем последовательного прибавления шага по параметру. Счет числа повторений цикла осуществляется при заданном числе повторений с помощью счетчика, из которого последовательно вычитается единица. Сведение счетчика к нулю означает окончание цикла. Вся методика разработана для одноадресного формата команд, являющегося главным форматом команд в машине СТРЕТЧ. Основной концепцией является хранение и преобразование в индекс-регистрах так называемых управляющих слоев, которые содержат в себе три поля разрядов, длиной каждое в полный адрес, и имеют, по-видимому, длину двойной команды. В первом поле хранится текущее значение индекса, во втором поле — текущее значение счетчика, в третьем поле — адрес некоторого другого управляющего слова.

Описываются следующие основные команды с использованием индекс-регистров: «Прибавление к индексу» — шаг по параметру, находящийся в указанной ячейке, прибавляется к первому полю индекс-регистра. «Прибавление к индексу и счет» — дополнительно к предыдущему происходит вычитание единицы из второго поля индекс-регистра.

Если шаг по параметру равен 1, возможна команда «прибавление к индексу, счет и переход», когда прибавляется 1 к первому полю, вычитается 1 из второго поля и при счетчике, равном нулю, происходит переход по указанному адресу. Имеются модификации двух последних команд, в которых при достижении счетчиком нуля происходит автоматическая передача в индекс-регистр управляющего слова, указанного в третьем поле индекс-регистра. Существует модификация арифметических команд, при которой выполнение арифметической команды объединяется с выполнением операции «прибавление к индексу и счет». В этом случае исполнительный адрес полностью формируется в индекс-регистре, а в адресе команды указывается адрес шага по параметру. Управляющие слова используются также для упрощения операций, связанных с групповой передачей или переработкой информации, объединяемой в массивы. В этом случае в первом поле помещается адрес «ключевой» величины из массива (обычно начало массива), во втором поле — длина массива и в третьем поле — по-прежнему адрес некоторого другого управляющего слова. Для выполнения групповой операции над массивом необходимо в адресе соответствующей команды указать адрес управляющего слова данного массива. Наличие адреса следующего управляющего слова в третьем поле позволяет, рассматривая цепи управляющих слов, автоматически осуществлять обработку целых последовательностей массивов, произвольно расположенных в памяти. Сигналом к окончанию последовательности является появление 1 в специальном разряде управляющего слова, свидетельствующее об окончании цепи управляющих слов. А. П. Ершов

11013. Программно-управляемая система прерывания программ. Брукс (A program-controlled program interruption system. Brooks F. P., Jr), Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington, D. C.), New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 128—131, Discuss., 132 (англ.)

Описывается так называемая система прерывания программ для вычислительной машины СТРЕТЧ. Система прерывания программ предназначена для автоматического обращения из главной программы к подпрограммам в тех случаях, когда это обращение не предусматривается, как обычно, в главной программе, а происходит под воздействием неожиданных причин, время появления которых невозможно предусмотреть. Такие причины могут быть двух типов: внешние сигналы, поступающие в машину в неопределенные моменты времени, и внутренние причины, вызываемые самой программой, но момент поступления которых неизвестен (например, переполнения, деления на нуль и т. п.). С каждой из возможных причин связан индексный триггер, который включается при возникновении причины и выключается при ее отсутствии. Всего имеется 64 индексных триггера, которые собраны в один 64-разрядный индексный регистр. При появлении 1 в i-м разряде индексного регистра (появление i-й причины) номер прибавляется к так называемому базисному адресу прерывания N, хранящемуся в специальном регистре. Выполнение главной программы прерывается и выполняется прерывающая команда из ячейки $N+i$. Если эта команда была арифметической, то после ее выполнения продолжается работа главной программы. Если же при прерывании нужно выполнить целую подпрограмму, то в качестве прерывающей команды нужно взять команду обращения к данной подпрограмме с запоминанием места ухода с главной программы, если необходимо обеспечить возврат. Предусмотрен ряд мер для принудительной блокировки прерывания. Основным средством является 64-разрядный защитный регистр. Фактически прерывание программы i-й причиной происходит лишь при наличии единицы в i-м разряде защитного регистра. Кроме этого, ряд специальных команд может включать или отключать всю систему прерывания. Индексный, защитный регистры и регистр базисного адреса прерывания имеют адреса, так что их содержимое может меняться так же, как и у любой ячейки памяти. А. П. Ершов

11014. Исследования Корпуса связи по автоматическому программированию для цифровых вычислительных машин. Льюбберт, Коллом (Signal Corps research and development on automatic programming of digital computers. Luebbert William F., Collom Percy W., Jr), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, **2**, № 2, 22—27 (англ.)

Первая часть работы содержит общие рассуждения о методах и целях автоматизации программирования. Обосновывается необходимость общего языка автоматического программирования для описания программ, используемых в военном деле.

Вторая часть статьи содержит полуторагодичную программу работ по автоматическому программированию, проводимых по заказу службы связи армии США. Работа ведется двумя группами: группа, связанная с машинами, и группа, не связанная с машинами. Первая группа занята главным образом разработкой обслуживающих программ и элементарных компиляторов для конкретных вычислительных машин, в частности для полевых машин МОБИДИК. Вторая группа вырабатывает рекомендации стандартов, терминов, форматов и других характеристик, необходимых для работы первой группы, а также разрабатывает «универсальный машинный код», на котором записываются входные программы для компиляторов, составленных для конкретных машин. Основные усилия второй группы направлены на разработку общего языка автоматического программирования, который, по-видимому, будет предложен в качестве рекомендации. Без всяких подробностей указывается, что группой ведутся работы по построению «сверхпрограммы» автоматического составления компиляторов для целого класса машин. Руководство второй группой осуществляют известные американские специалисты по автоматическому программированию Перлис (A. J. Perlis), Горн (S. Gorn), Холт (A. Holt) и Туранский (W. Turanski). А. П. Ершов

11015. АЛГОЛ — интернациональный язык для электронных счетных машин. Хейсе (ALGOL — et internationalt sprog for elektronregnemaskiner. Heise Willy), Ingeniøren, 1959, **B68**, № 17, 505—511 (датск.)

Подробно излагается история создания языка АЛГОЛ (Algorithmic Language), основные принципы его построения и 5 примеров на составление программ с использованием этого языка. Библ. 4 назв.

Д. А. Поспелов

11016. Объяснение алгоритмического языка АЛГОЛ на примере элементарных программ. Боттенбрух (Erläuterung der algorithmischen Sprache ALGOL an Hand einiger Elementarer Programmierbeispiele. Bottenbruch Hermann), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1959, **4**, № 2, 199—208 (нем.; рез. англ.)

Летом 1958 г. на конференции в Цюрихе были доложены первые результаты по созданию удобного языка для описания программных алгоритмов — АЛГОЛ (реф. 11015). Основные его аспекты рассматриваются автором на ряде подробно разбираемых примеров. Новые данные в статье отсутствуют. Д. А. Поспелов

11017. Программа присвоения адреса для Z-22. Фромме (Ein Adressierprogramm für die Z 22. Fromme Th.), Elektron. Datenverarb., 1959, № 1, 49—52 (нем.; рез. англ.)

Команды в машине Z-22 имеют следующий вид: B_m — перенести m из памяти в накапливающий регистр, T_m — перенести m из накапливающего регистра в память, E_m — начать выполнение команд, начиная с m, в памяти, F_m — начать выполнение подпрограммы с m в памяти и вернуться после этого к главной программе, W — извлечь корень из содержимого накапливающего регистра, D — погасить содержимое накапливающего регистра. Кроме этого, имеются обычные операции сложения, вычитания, умножения и деления. Для этих четырех операций существует условие, что все результаты операций переводятся в запоминающее устройство в ячейку с номером 6 и накапливающий регистр. До производства операции необходимо первое из чисел, участвующих в операции, поставить в ячейку 6, а второе — в накапливающий регистр. Память машины состоит из оперативной памяти на магнитных сердечниках (с адресами от 0 до 31) и памяти на магнитном барабане (с адресами от 32 до 8191). Для подобной машины рассматривается компилирующая программа присвоения адреса. Эта программа основана на следующих принципах: все вводимые в машину величины снабжаются „именами" (например, „sinus"), на перфоленте стоят только имена интересующих адресов, все истинные адреса проставляются программным путем во время ввода. Подробно рассмотрена блок-схема такой программы и условия ее работы. Д. А. Поспелов

11018. Программирование и рекурсивные функции. Шрейдер Ю. А., В сб.: Вопр. теории матем. машин. I. М., Физматгиз, 1958, 110—126

Рассматривается один из методов автоматизации программирования, основанный на введении в схему вычислительного устройства специальных дополнительных регистров. Автор исходит из того, что работа вычислительной машины после ввода исходной информации может быть представлена в виде процесса, заключающегося в последовательном вычислении значений некоторой системы рекурсивных функций:

$$[\alpha]_{n+1} = F_\alpha([\alpha^1]_n, [\alpha^2]_n, \ldots).$$

Здесь через $[\alpha^i]_n$ обозначено содержимое ячейки с номером α^i после n-го такта работы машины. Это позволяет записывать программы для решения задач на машинах в рекурсивном виде. Функции $\text{ч}F_\alpha$ определяются возможностями машины, наличием в конструкции машины тех или иных цепей и логических элементов. Подробно рассматривается вопрос о выборе минимальной системы базисных функций для получения наиболее удобного метода переработки программы. Предлагается некоторая „минимальная" базисная система рекурсивных функций, с использованием которой строятся в качестве примера программы для перемножения двух матриц и решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Зейделя. Библ. 14 назв. Д. А. Поспелов

11019. Об основных понятиях программирования. Подловченко Р. И. В сб.: Пробл. кибернетики. Вып. I, М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 128—134

Рассматриваются некоторые предварительные положения, связанные с формальным математическим описанием программ для решения задач на цифровых машинах. В основе предлагаемого формализованного описания лежат теоретико-множественные соображения и операторный метод. Д. А. Поспелов

11020. Эволюция понятия структуры универсальной цифровой вычислительной машины. Реймон (Evolution du concept de structure d'une calculatrice numérique universelle. Raymond François Henri), Automatisme, 1958, **3**, № 2, 56—62 (франц.)

Формальное описание выполнения команд, обращения к памяти, условных переходов и модификации адресов в цифровых вычислительных машинах. И. В. Лебедев

11021. Техника самоконтроля в электронных счетных машинах. Рауш (Selbstprüfungstechnik in elektronischen Rechenmaschinen. Rausch F.), Elektron. Rundschau, 1959, **13**, № 6, 206—210 (нем.; рез. англ., русск.)

Имеются две возможности производства контроля работы цифровой машины: проверка, осуществляемая программным путем с помощью специальных тестовых программ и создание специальных цепей контроля при конструировании машины. В статье рассматривается круг вопросов, связанный с мероприятиями второго типа. Подробно рассматриваются коды с обнаружением однократной ошибки (двоично-пятеричный код и код с семью двоичными разрядами). Приводится блок-схема цепей контроля для двух подобных кодов. В качестве эффективного контроля входной информации рекомендуется применять метод остатка от деления на 9. При применении этого метода вся вводимая информация подвергается делению на 9 с запоминанием результатов и остатков. После этого подсчитывается сумма всей входной информации. Эта сумма также подвергается делению на 9. Частное от деления и остаток должны совпадать с суммой частных и остатков, полученных при обработке входной информации. Д. А. Поспелов

11022. К теории программ контроля. Брокате (Zur Theorie der Überwachungsprogramme. Brokate Klaus), Elektron. Datenverarb., 1959, № 3, 14—15 (нем.; рез. англ.)

Под программами контроля понимаются такие программы, с помощью которых машина может оценивать выполнение данной (контролируемой) программы. В результате работы программы контроля составляется список команд, фактически выполняемых при работе контролируемой программы (главной программы). Описывается принцип программы контроля и приводится ее блок-схема. И. Б. Рохлина

11023. Транспонирование матриц в цифровой вычислительной машине. Уиндли (Transposing matrices in a digital computer. Windley P. F.), Comput. J., 1959, **2**, № 1, 47--48 (англ.)

Сообщается о способе транспонирования с помощью вычислительной машины члена матрицы a_{ij}, имеющего адрес $ni+j$, на адрес $mj+i$, где m — число строк, n — число столбцов матрицы, $0 \leqslant i \leqslant m-1$ и $0 \leqslant j \leqslant n-1$. В общем случае такое транспонирование требует $\frac{1}{2}m(m-1)n(n-1)+(m-1)(n-1)$ обращений к запоминающему устройству (операции считывания и записи). С помощью программы удается исключить из общего времени член m^2n^2. Приводится блок-схема составления программы по предлагаемому методу.

Г. П. Зеленкевич

11024. Два способа построения многопрограммных кодов для статистического кодирования. Кириллов Н. Е., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 2, 150—151

Словарь разбивается на n групп. Передача символа осуществляется при первом способе последовательной передачей кодовых обозначений групп и символа внутри группы (код описывается $n+1$ программами), а при втором способе кодовое обозначение группы передается лишь при смене группы, т. е. в случае, если передаваемый символ принадлежит группе, отличной от той, которой принадлежал ранее передаваемый символ (код описывается n программами). При этом возможно для символов разных групп, при условии одинакового числа символов в группе, использовать одинаковые кодовые обозначения и таким образом упростить построение кодирующей системы. Рассмотрены формулы для расчета эффективности кодирования при обоих способах кодирования. Рекомендуется строить код по первому способу в случае словаря из независимых символов и по второму способу в случае словаря из зависимых символов.
М. И. Гринев

11025. Принцип группового квитирования в устройствах телемеханики. Ус В. И., УзССР Фанлар Акад. ахбороти, Изв. АН УзССР. Сер. техн. н., 1959, № 2, 18—26 (рез. узб.)

Показано, что при построении m-значных сигналов в системах телеуправления и телесигнализации из элементов $n_1, n_2, \ldots, n_m$ с различными комбинационными возможностями (где $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$), общее число возможных комбинаций будет $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m = N$, а число групп сигналов, внутри каждой из которых при наличии одного искажения сигналы не будут переходить друг в друга, будет n_m; так что в результате N сигналов разбиваются на n_m групп по $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_{m-1}$ сигналов в каждой и для подтверждения правильности выбора объекта достаточно лишь n_m отдельных квитирующих сигналов вместо N. Рассмотрено много подробных примеров.
М. И. Гринев

11026. Многорегистровые схемы выполнения арифметических операций. Акушский И. Я., В сб.: Вопр. теории матем. машин. I. М., Физматгиз, 1958, 192—218

В связи с развитием современных средств вычислительной техники встает вопрос о мерах по увеличению скорости работы арифметического устройства, особенно при выполнении операции деления. Одним из способов решения этого вопроса автор считает введение в конструкцию арифметического узла машины нескольких сумматоров и активных регистров, одновременно выполняющих необходимые операции. Автор считает, что подобное усложнение конструкции окупается существенным уменьшением машинного времени, необходимого для производства арифметических операций. Статья состоит из введения и двух глав. В первой главе автор рассматривает схемы выполнения операции деления и вычисления выражений типа ac/b; abc; ab^2 в том случае, когда арифметическое устройство работает с числами, заданными в обычном двоичном коде. Отмечается значительное уменьшение числа необходимых тактов по сравнению с обычной схемой деления (почти в два раза). Во второй главе рассматривается выполнение тех же операций при условии, что участвующие в них числа заданы десятичным кодом. Библ. 4 назв.
Д. А. Поспелов

11027. О выборе рационального количества адресов цифровой вычислительной машины. Линский В. С., В сб.: Вопр. теории матем. машин. I. М., Физматгиз, 1958, 181—191

С помощью элементарных расчетов и рассуждений (не всегда достаточно убедительных) доказывается преимущество одноадресных универсальных вычислительных машин с программным управлением перед машинами двух- и трехадресными. Утверждается, что программа в одноадресных машинах занимает меньше места в оперативном запоминающем устройстве, чем аналогичные программы в двух- и трехадресных машинах. Также утверждается, что время решения задачи на одноадресной машине будет меньше времени решения этой же задачи на двух- и трехадресных машинах. Те же выводы сделаны относительно машин, имеющих оперативное запоминающее устройство с последовательной выборкой. В таких машинах часто применяются команды, в которых один адрес используется для указания номера ячейки, в которой хранится следующая команда. Здесь утверждается преимущество двухадресных машин перед трехадресными и четырехадресными.
Н. Н. Поснов

11028. Характеристики системы УНИВАК-УКТ (Características del sistema UNIVAC U. C. T.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1959, 8, № 20, 20—23 (исп.)

В новой вычислительной машине УНИВАК-УКТ (Univac U. C. T.) фирмы «Ремингтон ренд» (Remington Rand) широко применены новейшие достижения вычислительной техники. Машина построена на полупроводниковых триодах, магнитных сердечниках и ферракторах с применением печатных схем. Машина состоит из 4 основных блоков: центральной вычислительной системы, вводного быстродействующего устройства, устройства чтения и перфорации и быстродействующего печатающего устройства, к которым могут быть приданы различные вспомогательные устройства. Цифровая и буквенная информация вводится в машину посредством перфокарт со скоростью до 36 000 карт в 1 час. Все данные, а также программа вычислений запоминаются в запоминающем устройстве с произвольным выбором на магнитном барабане. На магнитном барабане запоминается 50 000 десятичных знаков, что соответствует 5000 10-разрядных чисел. Одиннадцатый разряд определяет знак числа. Барабан вращается со скоростью 18 000 оборотов в 1 мин. в резервуаре, заполненном гелием. Благодаря такой большой скорости вращения время обращения к запоминающему устройству очень мало, а в быстродействующем устройстве на 1000 чисел оно достигает 0,4 мсек. Арифметическое устройство выполняет 4 арифметические операции и около 30 дополнительных. Благодаря применению ферракторов скорость работы машины сравнима со скоростью больших вычислительных машин. Машина предназначена для работы с автоматическим программированием, поэтому программа вводится в простейшей форме и может быть записана на нескольких языках. Система предназначена для решения коммерческих, технических и научных проблем.
О. В. Бачин

11029. Электронная вычислительная машина с программным управлением (Programmgesteuerte elektronische Rechenanlage), Industriekurier Wochenausg., Techn. und Forsch., 1959, 12, № 22, 306 (нем.)

Приводятся некоторые технические данные электронной вычислительной машины, выпускаемой фирмой «Цузе» (Zuse KG, ФРГ). Машина последовательного действия. Команды, числа представлены в виде 38-разрядного двоичного кода. В качестве запоминающего устройства используется магнитный барабан, имеющий 8192 ячейки памяти. Время обращения к нему составляет 5 мсек. Особая нумерация мест позволяет без останова машины выбирать команды, число разрядов которых может вдвое превышать число разрядов обычной команды. Вводные и выводные устройства — обычные буквопечатающие аппараты типа «телетайп». Эти устройства соединяются с машиной через буферное запоминающее устройство, что позволяет одновременно с вычислениями производить ввод и вывод данных.
В. Е. Кравченко

11030. Вариант конструктивного выполнения бортовой авиационной цифровой вычислительной машины. Боун, Кинг (An approach to airborne digital computer equipment construction. Boun P. E., King E. N.), IRE Trans. Product. Techn., 1959, № 4, 18—21 (англ.)

Описывается конструктивное выполнение бортовой авиационной цифровой вычислительной машины, применяемое фирмой «Hughes Aircraft». Триггерные ячейки и диодные вентильные ячейки машины изготовляются на стандартных панелях с печатными схемами. Все 32 триггерных и 17 вентильных ячеек вставляются в основание, образованное набором одинаковых полос изоляционного материала, на которых нанесены проводники (по 6 продольных полос на одной стороне и по 34 поперечных полосы на другой стороне) и в нужных местах выполнены соединения продольных и поперечных линий для образования схемы коммутации. В приводимом в качестве примера блоке машины таким образом обеспечено 1716 контактов ячеек с основанием и сделан вывод на внешний разъем с 364 контактами. Достоинствами такого способа выполнения указываются: а) близость вентильных схем к триггерам и поэтому пониженная емкость входных цепей триггеров; б) равномерность распределения расстояний между проводниками и за счет этого сниженная емкость выходных цепочек триггерных ячеек (оба эти достоинства устраняют необходимость установки катодных повторителей с малым импедансом); в) каждый элемент является независимой частью, легко изготовляется и проверяется; г) снижена возможность неправильной сборки, т. к. после сборки эталонного образца работа выполняется по образцу; д) возможна высокая автоматизация производства и е) доработки в полевых условиях могут проводиться не высококвалифицированным персоналом, обеспеченным необходимым набором инструмента и сменных блоков. Приводятся фотографии ячеек и блока вычислительной машины в различных видах. И. Д. Алимов

11031. Автоматическая обработка данных — новейшее оружие армии. Янг (The Army's newest weapon: ADP. Young Lewis H.), Control Engng, 1959, **6**, № 7, 25—26 (англ.)

Отделение автоматической обработки данных в форте Хуачука, Аризона (США) исследует вопросы применения вычислительных машин в военном деле. Исследования ведутся в направлении испытания полевых вычислительных машин совместно с фирмой «Рамо-Вулдридж», а также исследования областей применения автоматической обработки данных для военных целей. Среди полевых вычислительных машин наиболее известна машина МОБИДИК (MOBIDIC — мобильная цифровая вычислительная машина). Это универсальная безламповая машина, по типу аналогичная машине ИБМ-709. Запоминающее устройство на ферритовых сердечниках может иметь емкость до 28 000 чисел. Предполагается, что МОБИДИК будет размещаться в двух грузовых прицепах и функционировать при штабе армии. Основными заданиями его будут автоматическая обработка донесений, сборка данных по снабжению, каталогизация тактической информации и т. д. Машина разработана фирмой «Сильвания» (Sylvania Electric Products Inc.). Для работы при штабах меньших соединений фирмой «Филко» разработаны машины ЛОДЖИПАК (LOGIPAC) и БЕЙСИКПАК (BASICPAC), каждая из которых размещается на 2,5-тонном крытом грузовике. Эта же фирма спроектировала машину КОМПАК (COMPAC) объемом 0,028 $м^3$ и весом 28,5 *кг*, предназначенную для работы при радарных и метеорологических станциях. Для обработки больших объемов данных фирма «ИБМ» проектирует машину-информатор с запоминающим устройством емкостью 200 000 000 двоичных знаков. Из вспомогательного оборудования для армии разработано электромеханическое печатающее устройство со скоростью 600 строк в 1 мин. в лентопротяжное устройство, работающее в тяжелых климатических условиях при тактовой частоте 50 *кгц*, плотности записи 200 знаков на 1 *см* и скорости ленты 3,81 *м/сек*. Проводимые работы включали цифровое моделирование исследуемых систем на других машинах. Для этого отделение располагало вычислительным центром, включавшим машины ИБМ-709, ЛГП-30 (LGP-30), «Рикомп II» (Recomp II) и ИБМ-610. О. В. Бачин

11032. Автоматическое оборудование для диагностического контроля по испытательным программам. Лолер, Уайтли, Сейлор (Automatic checkout equipment featuring test programs for diagnostic checking. Lauler L. J., Whiteley R. B., Sailor D. E.), IRE Nat. Convent. Rec., 1959, **7**, № 4, 218—222 (англ.)

Приводятся краткие сведения о цифровой вычислительной машине, являющейся составной частью системы контроля работоспособности баллистических ракет, находящихся на вооружении подводной лодки с атомным двигателем. Система контроля выполняет следующие задачи: 1. Непрерывную проверку работы узлов ракет по наиболее критичным параметрам. 2. Периодический полный профилактический контроль системы управления ракетой и замену дефектных узлов. 3. Проверку работоспособности выбранной ракеты и автоматическое включение стартового оборудования, обеспечивающего запуск.

При проектировании системы контроля в основу были положены следующие принципы: гибкость системы контроля, позволяющая сохранять ее независимо от модификации самих ракет; обеспечение высокой надежности оборудования; при обнаружении неисправности в определенном устройстве система контроля на основе анализа обстановки и данных о работоспособности прочих узлов должна принять оптимальное решение; система должна иметь самоконтроль, локализирующий причину неисправности; система должна быть автоматической; работа системы должна сопровождаться документальной фиксацией результатов контроля с возможностью последующей обработки такой записи. Вычислительная машина, входящая в состав системы контроля, является универсальной машиной последовательного типа с рабочей частотой 90 *кгц*. Запоминающее устройство машины, хранящее информацию и программу, использует вращающий магнитный носитель. Его емкость распределена следующим образом: 52 канала по 64 кода — для хранения неизменной информации; 8 каналов по 64 кода — в качестве оперативного запоминающего устройства; 4 канала по 16 кодов — в качестве запоминающего устройства с малым временем выборки; 6 арифметических регистров емкостью в один код используют петли перезаписи; 3 канала используются для синхроимпульсов. Каждый код состоит из 24 разрядов, из которых 22 содержат информацию, один служит для контроля четности и один для обозначения начала кода. В инструкции 6 разрядов используются в качестве кода команды и 12 — в качестве кода адреса. Числа представляются в машине в двоичном коде с фиксированной запятой, расположенной слева от старшего разряда. Машина выполняет 32 команды, из которых 20 типичны для универсальной машины, а 12 являются специализированными и служат для контроля системы. Все элементы машины смонтированы на платах с печатным монтажом, имеющих размеры 135×135 *мм*. Контейнерное шасси вмещает 25 плат. В каждой стойке размещается пять таких шасси. Шарнирные соединения между стойками образуют конструкцию раскрывающейся «книги». А. Б. Залкинд

11033. САПО — чехословацкая автоматическая вычислительная машина (Sapo — automatische Tsjechische rekenmachine), Bedrijf en techn., 1959, **14**, № 334, Electronica, **12**, № 281, 107 (пол.)

Сообщается об электронной вычислительной машине САПО, запланированной к пуску в производство в Чехословакии в апреле 1958 г. Машина обладает магнитным запоминающим устройством емкостью в 1024 слова по 32 двоичных разряда, содержит 7000 реле и 4000 электронных ламп и выполняет 10 000 операций в 1 сек. Особенностью машины является применение схем автоматической коррекции ошибок. А. Д. Закревский

11034. Малогабаритная универсальная цифровая вычислительная машина на магнитных (ферритовых) элементах ЛЭМ-1. Махмудов Ю. А., Радиотехника, 1959, 14, № 3, 47—57

Рассмотрены вопросы построения универсальной вычислительной машины на магнитных элементах, разработанной в лаборатории электромоделирования ВИНИТИ АН СССР под руководством профессора Л. И. Гутенмахера. В логических элементах и запоминающем устройстве используются ферритовые сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса. В цепях связи применены малогабаритные селеновые вентили. Магнитные элементы, используемые в машине, малогабаритны, экономичны, просты и долговечны. Машина оперирует с 15-разрядными двоичными числами, включая знак числа. Форма представления чисел — с фиксированной запятой. Подробно освещается представление и структура команд, их выполнение на машине. Имеется таблица команд. В состав машины входят: 1. Внутреннее запоминающее устройство, состоящее из оперативного запоминающего устройства на 1024 адреса, выполненного на ферритовых сердечниках по системе с непосредственным выбором адреса (система Z), и устройство постоянной памяти на 7167 адресов, построенное на емкостных элементах. 2. Арифметическое устройство с четырьмя регистрами для оперативного запоминания. 3. Устройство центрального управления. 4. Анализатор команд. 5. Внешнее запоминающее устройство на магнитной ленте с емкостью 65536 чисел. 6. Выходные устройства.

Приведены основные характеристики работы устройств. Машина одноадресная по отношению к внутреннему запоминающему устройству и основному накопителю и трехадресная при работе с регистрами арифметического устройства. Структура машины позволяет одновременно выполнять несколько операций. Рабочая частота тактовых импульсов 30 *кгц*. Скорость работы 1200 сложений, 600 умножений, 200 делений в 1 сек.

Ю. И. Торгов

11035. РАМАК-305. Райнер («RAMAC 305». Rayner Kurt), Universum, 1959, 14, № 21, 654—656 (нем.)

Рекламируется коммерческая машина РАМАК-305. Приводится краткое описание машины. Машина демонстрировалась на Всемирной выставке в Брюсселе и на осенней ярмарке в Вене в 1959 г. (давала ответы на различные вопросы). Машина может использоваться в бухгалтерии, для операций по обслуживанию складов и т. д. Память на магнитных дисках. Один блок имеет 50 дисков, которые установлены на вертикальной оси. Скорость вращения дисков 1200 оборотов в 1 мин. На каждом диске 100 дорожек; на каждой дорожке расположено 10 предложений. В каждом предложении может быть до 100 буквенно-цифровых знаков. Емкость одного блока 5 000 000 буквенно-цифровых знаков. К машине может быть подключено до 4 таких блоков. Считывающие и записывающие головки расположены на двухзубцовой вилке, которая может двигаться в вертикальном и горизонтальном направлениях. Время выборки информации с одной дорожки — порядка нескольких миллисекунд. Время перехода с одной дорожки на другую 0,2 сек., с одного диска на другой 0,8 сек. Во время выборки из памяти могут производиться другие операции. Производится автоматический контроль работы машины. К машине подключаются магнитные ленты и устройства быстрой печати (80 строк в 1 мин.).

И. Б. Рохлина

11036. Электронная вычислительная машина ИБМ-705. Фишер (Einführung in die Elektronische Rechenanlage Typ 705. Fischer Bernhard), Elektronik, 1959, 8, № 8, 245—250 (нем.)

Приводятся сведения о структуре и функциях отдельных устройств машины ИБМ-705, системе кодирования, вводных и выводных устройствах.

11037. Управление с помощью вычислительной машины приспосабливается к требованиям (Computer control adapts to needs), Automation, 1959, 6, № 2, 58—59 (англ.)

Сообщается о выпуске фирмой «Лайбраскоп» (Librascop) вычислительной управляющей системы «Лайбратрол-500» (Libratrol 500). Основой системы является вычислительная машина, специально приспособленная для целей управления производством. Вычислительная машина работает в последовательном двоичном коде с фиксированной запятой с одноадресными командами и имеет внутреннюю запоминаемую программу. Входные данные могут иметь как цифровой характер сигналов цифровых датчиков, так и вид электрического напряжения от измерительных инструментов. Возможен ввод данных оператором. Выходные данные могут быть представлены в цифровой форме и в виде напряжений для контроля управляющих инструментов. Предполагается применение системы в нефтяной, газовой, химической промышленности, на металлургических заводах, электрических и атомных станциях.

О. В. Бачин

11038. Обзор британских цифровых вычислительных машин. Часть I. Де-Керф (A survey of British digital computers. Part I. De Kerf Joseph L. F.), Computers and Automat., 1959, 8, № 3, 25—26, 29 (англ.)

Предлагается обзор основных фирм Англии, выпускающих вычислительные машины, и основных типов машин, выпускаемых этими фирмами. Сообщается, что к 1959 г. в Англии установлено и заказано около 300 вычислительных машин. В основном обзор написан по материалам Лондонской выставки вычислительных машин в декабре 1958 г. Фирма «The British Tabulating Machines» продает электронные цифровые вычислители «Голлерит-555» (Hollerith 555). Это последовательно-параллельная двоично-десятичная машина с программой из 150 трехадресных команд, набираемых на пульте. Запоминающее устройство емкостью 105 десятиразрядных двоично-десятичных чисел с временем выборки 10 мсек. выполнено на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 3000 об/мин. Время сложения и вычитания 1 мксек., умножения 18 мсек., деления 55 мсек. Извлечение квадратного корня автоматическое. Занимаемая площадь 3,6 $м^2$, потребляемая энергия 8 *ква*, стоимость 25 000 фунтов стерлингов. Этой же фирмой выпускаются последовательные двоичные машины ГЕК-1201 (HEC 1201) и ГЕК-1202, работающие по 1+1-адресной системе с 40-разрядными числами. Запоминающее устройство этих машин выполнено на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 3000 об/мин., имеет среднее время выборки 10 мсек. и емкость 1024 числа (1201) и 4096 чисел (1202). Сложение и вычитание занимают 2,5 мсек., умножение 20 мсек., деление 50 мсек. Занимаемая площадь 5,2 $м^2$, потребляемая энергия 11 *ква*, стоимость 33 000 фунтов стерлингов (1201). Готовится к выпуску модель ГЕК-1400. Это трехадресная последовательно-параллельная машина, работающая в двоично-десятичной системе счисления с числами длиной 11 разрядов плюс контрольный разряд. Время передачи числа 16 мксек. Имеется запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью 100 чисел и магнитный барабан емкостью 11 250 чисел, вращающийся со скоростью 6000 об/мин. Среднее время выборки 5 мсек. Возможно добавление блока двойной магнитной ленты. Входное устройство обрабатывает 600 перфокарт в 1 мин. Выходное печатающее устройство печатает 400 строк в 1 мин. Время умножения 850 мксек., деления 1,65 мсек. Предполагается увеличение объема быстродействующей памяти до 1000 чисел. Ожидаемая цена машины 100—150 тысяч фунтов стерлингов. Все эти машины работают на стандартных 80-колоночных перфокартах. Фирма «Эллиотт» (Elliott Brothers), помимо хорошо известных машин «Эллиотт-402» (Elliott 402)

и «Нейшнл Эллиотт-405» (National Elliott 405), выпускает новую машину «Нейшнл Эллиотт-802». Это одноадресная последовательная двоичная машина, работающая с 33-разрядными числами. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках имеет емкость 1024 числа, причем каждая ячейка может служить *B*-регистром. Пятидорожечная перфолента читается на входе со скоростью до 170 букв в 1 сек., на выходе пробивается 25 букв в 1 сек. Печатающее устройство печатает 10 букв в 1 сек. Сложение и вычитание производятся за 612 мксек., умножение и деление за 21,4 мсек. Занимаемая площадь 3,6 $м^2$, потребляемая энергия 2 *ква*, стоимость 20 000 фунтов стерлингов. Фирма «EMI Electronics», помимо выпускаемой вычислительной машины «Эмидек-1100» (Emidec 1100) стоимостью от 10 000 до 20 000 фунтов стерлингов, подготавливает к выпуску двухадресную параллельную двоичную вычислительную машину «Эмидек-2400», работающую с 36-разрядными числами, представляющими блок из 6 букв. Имеется быстродействующее диодно-конденсаторное устройство емкостью 64 числа, которое может быть использовано в качестве *B*-регистров. Время цикла машины 4 мксек. Оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках имеет емкость 4096 чисел и цикл обращения 15 мксек. Имеется 20 блоков магнитной ленты шириной 25,4 *мм*, позволяющих быстрый пуск и остановку, и 5 блоков ленты 101,6 *мм*. Скорость чтения магнитной ленты 20 000 букв в 1 сек. На входе 65-или 80-колоночные перфокарты читаются со скоростью 300 карт в 1 мин., а 5- или 7-дорожечная перфолента со скоростью 300 букв в 1 сек. Возможен ввод информации обоими типами магнитной ленты. Информация выводится перфокартами по 100 карт в 1 мин., перфолентой 30 букв в 1 сек., печатающим устройством 300 строк по 140 букв в 1 мин. или магнитной лентой. Предполагается введение ксеропрафической печати с магнитной ленты со скоростью 3000 строк в 1 мин. Арифметическое устройство работает асинхронно. Большинство команд выполняется за 25—40 мксек. Занимаемая площадь свыше 18 $м^2$, среднее потребление энергии 20 *ква*. Цена машины еще не установлена. Основной продукцией фирмы «The English Electric» является вычислительная машина ДЭЮКЕ (DEUCE). О. В. Бачин

11039. Электронные счетно-вычислительные машины в Швеции. Андерсен (Elektroniske databehandlings maskiner i Sverige. Andersen Nave), Ingr. ugebl., 1959, 3, № 39, 4—5 (датск.)

Статья посвящена статистике применения цифровых машин в Швеции. Отмечается, что в настоящее время в Швеции реально действуют 28 электронных цифровых машин. В 1960 г. предполагается увеличить их количество до 35. Используемые машины имеют стоимость от 0,5 до 6 млн. шведских крон каждая. Рост числа используемых машин по годам распределялся следующим образом (данные приводятся нарастающим итогом): 1953 г.—1, 1954 г.—1, 1955 г.—1, 1956 г.—5, 1957 г.—12, 1958 г.—17, 1959 г.—28. Общая сумма капиталовложений за 1953—1959 гг. достигла 38,6 млн. шведских крон. На 1960—1961 гг. предусматриваются капиталовложения в сумме 37 млн. шведских крон. Типовой состав действующих и планируемых машин иллюстрируется следующей таблицей:

АЛЬВАК III E (ALWAC III E)	5
АЛЬВАК-Вегематик 1000 (ALWAC Wegematic 1000)	2
БЭСК (BESK)	1
ФАЦИТ ЭДБ (FACIT EDB)	4
„Меркурий" фирмы „Ферранти" (Mercury)	1
„Пегас" „ „ (Pegasus)	2
„Персей" „ „ (Perseus)	1
ИБМ-650 (IBM-650)	12
ИБМ-7070 (IBM-7070)	4
ИБМ-7090 (IBM-7090)	1
САРА (SARA)	1
СМИЛ (SMIL)	1

По сферам применения действующие вычислительные машины распределяются следующим образом: 6 машин универсального назначения, 4 — для целей учета и планирования, 6 — в страховых обществах, 7 — для управления производством, 1 — для целей обороны, 4 — в научных институтах. Распределение по сферам применения на 1961 г. имеет следующий вид: 6 машин универсального назначения, 6 — для целей учета и планирования, 8 — в страховых обществах, 7 — для управления производством, 3 — для целей обороны, 5 — в научных институтах. Д. А. Поспелов

11040. Коммерческое использование вычислительных машин в Великобритании. Вильямс (The commercial use of computers in Britain. Williams R. H.), Automat. Data Process., 1959, **1**, № 10, 33—35 (англ.)

Обзор по ответам на анкету, разосланную фирмой „Computer Consultants" всем фирмам Великобритании, использующим вычислительные машины в коммерческих целях. В Великобритании насчитывается 69 таких вычислительных машин, из которых около половины установлено в Лондоне, а из остальных одна находится в Уэлсе и одна в Шотландии. 16 машин работает в вычислительных центрах. Первая машина была установлена в августе 1952 г., среднее время между заказом машины и вводом ее в действие 20 месяцев, при наименьшем сроке 4 месяца и наибольшем 52 месяца. Среднее эффективное время использования машины составляло 78%, при самой малой величине 33%. Среднее эффективное время использования машины по расписанию, не учитывающее время на плановую профилактику, составило 90%, при наивысшей величине 99,9% и наименьшей 60%. Для экономического использования машины она должна работать по меньшей мере две восьмичасовые смены в сутки, и эффективность использования ее в пределах расписания должна составлять 95%. 64% потерянного времени приходится на неисправности входных и выходных устройств, обычно связанные с перфолентой. Из других причин заслуживают внимания выход из строя ламп, неисправности магнитных барабанов и недостаток обслуживающего персонала. Даются некоторые советы фирмам, желающим установить вычислительную машину, и приводится новая анкета, адресованная фирмам, эксплуатирующим вычислительные машины в коммерческих целях. О. В. Бачин

11041. Большие вычислительные устройства с программным управлением. Бройдо (Programm-gesteuerte Groß-Rechenanlagen. Broido D.), Feinwerktechnik, 1959, **63**, № 3, 93—96 (нем.)

В начале декабря 1958 г. в Лондоне состоялась выставка электронных счетных машин. На этой выставке демонстрировалось различное оборудование с программным управлением и цифровые машины. В настоящее время в повседневном употреблении в Англии находится 120 цифровых машин, стоимость которых составляет около 130 млн. немецких марок. Из этих 120 машин лишь 7 принадлежат государственным учреждениям. В ближайшие 10 лет Англия намеревается построить 30—40 электронных цифровых машин. Из осмотра выставки, по мнению автора, вытекает, что развитие современной вычислительной техники идет по пути решения следующих задач: 1) увеличение надежности функционирования всех устройств, 2) переход на стандартные сменные блоки, 3) уменьшение размеров элементов (полупроводники, магнитная память), 4) уменьшение размеров всего устройства, 5) индивидуальное охлаждение всех основных узлов, 6) увеличение скорости ввода и вывода, 7) возможность печати прямо из арифметического устройства. Д. А. Поспелов

11042. Расчет основных стандартных блоков вычислительной машины. Олман, Фипс, Бильсон (Design of a basic computer building block. Alman J., Phipps P., Wilson D.), Proc. Transistor Reliabil. Sympos. (1956, New York City). New York, Univ. Press, 1958, 119—124 (англ.)

На вычислительной машине УНИВАК произведен расчет стандартного блока типа потенциального инвертора на двух полупроводниковых триодах, имеющего входы, объединенные по схеме ИЛИ, и выходы, объединенные по схеме И. Расчет включает две фазы. Первая обеспечивает получение новых программных уравнений с учетом ряда переменных параметров, используя уравнения, составленные на основе классического анализа цепей применительно к данной схеме. К числу переменных параметров относятся: коэффициент усиления каждого триода; число выходов; мощность, рассеиваемая выходным триодом и ± допуска сопротивлений. Программа 1-й фазы осуществляет образование всех величин, которые постоянны в процессе вычислений, и объединение полученных величин с переменными параметрами. Изменение параметров производится: 1) для отыскания всевозможных решений и указания всех тех комбинаций из них, которые не являются решениями для данной схемы, и 2) для определения и фиксирования особых решений, наилучшим образом удовлетворяющих необходимым рабочим требованиям, которые введены в машину. Программа обеспечивала поочередное изменение указанных параметров. Выполнение 1-й фазы при применении для легкого программирования представления чисел с плавающей запятой потребовало для расчета 1400 вариантов схемы около 3 часов машинного времени, включая время вывода. Вторая фаза обеспечивает контроль параметров переменных, полученных в результате выполнения 1-й фазы, используя уравнения проверки надежной работы схемы. Программа 2-й фазы, если рассматривать особые решения как номинальные значения параметров, производит следующий анализ: из двух выбранных параметров 1-й рассматривается как зависимая переменная, а 2-й (затем 3-й, 4-й и т. д. последовательно) — как независимая переменная. Независимая переменная может изменяться в пределах 150% и 50% от номинального с шагом, равным 5%, при условии, что уравнения проверки удовлетворены. В противном случае зависимая переменная изменяется в тех же пределах и с тем же шагом, а независимая не меняется. Пары значений переменных, не удовлетворяющих уравнениям проверки, фиксируются. Производится анализ всевозможных пар, что позволяет строить кривые, указывающие области значений параметров, где схема работает надежно. Для анализа схемы с 15 переменными, т. е. с 105 различными парами, требуется около 2 час. машинного времени (около 1 мин. на пару), включая время вывода. В тексте имеется ряд опечаток.

И. А. Ефимов

11043. Новые пути в постройке электронных вычислительных машин (Neue Wege beim Bau von Elektronentechnern), Industriekurier Wochenausg. Techn. und Forsch., 1959, 12, № 22, 306 (нем.)

При разработке новых вычислительных машин УНИВАК, рассчитанных на предприятия средней величины, фирма «Ремингтон Ренд» (Remington Rand) отказывается от применения электронных ламп и переходит к магнитным усилителям. Использование магнитных усилителей, отличающихся большим сроком службы, значительно ускоряет работу арифметического устройства. Новым в постройке машин является также нанесение большей части деталей и соединений на съемных одинаковых по величине пластических картах. Попутно с этим должна быть решена проблема кабельных соединений минимальной длины. Решение проблемы дает упрощение монтажа и минимум потерь на соединительных проводниках. Желаемое расположение коммутируемых цепей рассчитывается на больших вычислительных машинах УНИВАК.

В. Е. Кравченко

11044. Сдвигающие регистры с логической обратной связью и их использование в качестве счетных и кодирующих устройств. Радченко А. Н., Филиппов В. И., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 11, 1507—1514 (рез. англ.)

На примере сдвигающего регистра, построенного на магнитных элементах с прямоугольной петлей гистерезиса, описываются способы повышения эффективности счетных и кодирующих устройств, построенных на сдвигающих регистрах. Особенностью устройств является то, что регистр замыкается в кольцо через логическое звено, состояние которого является функцией кода, введенного в регистр. Изложены методы построения логических схем обратной связи для получения счетчиков или кодирующих устройств любой емкости. Б. О. Ольхов

11045. Элементы цифровой вычислительной техники. Фелькен (Aus der Technik der Digitalrechner. Veelken Reinhard), Nachrichtentechn. Z., 1959, 12, № 2, 75—79 (нем.; рез. англ.)

Элементы цифровой вычислительной техники состоят из переключательных схем, запоминающих устройств, входных и выходных устройств. Электронные переключательные схемы с транзисторным выполнением рассматриваются на примере машины 2002 фирмы «Сименс—Гальске». Рассмотрению принципиальных схем предпослано рассмотрение их логической структуры. Разбирается возможность построения вычислительных устройств на основе двух типов стандартных элементов: триггерной схемы и пассивного вентильного элемента с последующим усилителем.

Ц. А. Шенфельд

11046. Электронный мозг получает глубоко охлажденные нервные клетки (Elektronengehirne bekommen tiefgekühlte Nervenzellen), Industriekurier Wochenausg. Techn. und Forsch., 1959, 12, № 27, 358 (нем.)

Краткий отчет о выставке электронных вычислительных машин, используемых для решения научных задач, открывшейся в Париже летом 1959 г. в связи с международным конгрессом, посвященным применениям вычислительных машин. На выставке демонстрировались элементы запоминающих устройств, представляющие собой миниатюрные шайбы из изоляционного материала, на которые наносятся три концентрических кольца из материала, становящегося сверхпроводником при температуре жидкого гелия (—270°С). Кольца разделены перемычками из полупроводника, являющегося в обычных условиях изолятором, но становящегося проводником при приложении к нему электрического напряжения. Перемычки используются в качестве выключателей, с помощью которых на сверхпроводящие кольца накладываются и с них в нужный момент снимаются токовые импульсы. Указывается, что однажды наложенный на кольцо импульс вызывает в кольце протекание тока в течение практически неограниченного времени. Три японские фирмы показали на выставке мащения к памяти по сравнению с запоминающим и конструкций. В них, в частности, в качестве основных элементов арифметических и логических устройств используются параметроны, изобретенные Гото (E. Goto) из Токийского университета. Шведская фирма экспонировала машины с карусельным запоминающим устройством, состоящим из 64 катушек с магнитной лентой. Вычислительная машина выбирает заданную катушку, а затем считывает нужную информацию с катушки. Объем памяти 5 млн. цифр. Указывается, что подобное устройство в 100 раз уменьшает время обращения к памяти по сравнению с запоминающим устройством, в котором вся информация наносится на ленту, располагаемую на одном рулоне. Описан также экспонированный на выставке телефон с кнопочным набором номера, в котором реле, искатели, переключатели и прочие контактные коммутационные элементы замене-

ны на полупроводниковые диоды и триоды. Это существенно повысило надежность и помехоустойчивость телефона. Б. Е. Бердичевский

11047. Четырехразрядный десятичный счетчик с предопределением. Бонифорти (Contador de cuatro décadas con predeterminación. Boniforti A.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1959, 8, № 20, 1—7 (исп.; рез. франц.)

В описываемом десятичном счетчике используются десятипозиционные вакуумные счетные лампы с отклонением луча типа E1T, а также вакуумные двойные триоды и диоды. Этот счетчик, предназначенный для подсчета готовых деталей при серийном производстве, обладает следующими особенностями: 1) за один цикл счета может быть сосчитано до 10 000 деталей; 2) число деталей может в любой момент визуально наблюдаться на экранах четырех ламп E1T, выведенных на переднюю панель прибора; 3) при достижении определенного, наперед заданного числа счетчик сбрасывается в «0», а на выходе появляется электрический импульс, запускающий электромагнитное реле; 4) частота импульсов счета может достигать 12,5 *кгц* при наименьшем полном цикле счета 333 мксек.; 5) число циклов счета в 1 сек., равное 20, лимитируется электромагнитным реле и может быть увеличено при замене его другим элементом, например тиратроном. Установка числа, ограничивающего цикл счета, производится путем подачи на отклоняющие пластины ламп E1T потенциалов, соответствующих дополнению данного числа до 10 000. Приведена полная электрическая схема описываемого устройства. О. В. Бачин

11048. Электронные счетчики из стандартных блоков (Sous -ensembles standard pour compteurs électroniques et installations de comptage), Instrum. et labs, 1959, № 8, 7—11 (франц., англ.)

Отмечается широкое применение счетчиков для измерения физических величин как в производстве, так и при экспериментальных научных исследованиях. Приведен ряд примеров измерений, сводящихся к счету электрических импульсов, и отмечены преимущества электронных счетчиков в надежности и скорости. Описан ряд стандартных блоков (счетные декады, источники питания, усилители, генераторы) агрегатируемых друг с другом в различной комбинации и образующих счетчики разного назначения. В частности, упоминаются счетчики с заранее устанавливаемым числом, выдающие сигнал после прихода установленного числа импульсов. Счетчики имеют регистры для визуального наблюдения сосчитанного числа. В качестве примера перечислена комбинация стандартных блоков, позволяющая измерять интервалы времени между двумя событиями (в частности, между подачей напряжения на реле и его срабатыванием). Блоки рассчитаны на подачу импульсов с частотой до 30 *гц*. В конце статьи приведена сводная таблица стандартных блоков с указанием их назначения, а также таблица примеров применения различных их комбинаций. В. В. Васманов

11049. О применении полупроводниковых приборов в электронных вычислительных машинах. Валявко В. В., Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1959, вып. 3, 85—99

Описаны известные логические схемы И, ИЛИ, одноразрядный двоичный сумматор, триггеры, счетчики на триггерах, сдвигающий регистр и устройство фотоэлектрического считывания с перфоленты. В схемах используются полупроводниковые диоды, триоды, ферритовые сердечники. В. К. Зейденберг

11050. Применение переключающих триодов типа *p-n-π-n*. Гринич, Хас (*p-n-π-n* triode switching applications. Grinich V. H., Haas I.), IRE Trans. Electron. Comput., 1959, 8, №2, 108—113 (англ.)

Рассматривается физика явлений в триодах типа *p-n-π-n* и возможность использования их в моностабильных и бистабильных схемах и схемах релаксационных генераторов. Приводятся данные испытаний опытных образцов триодов этого типа, теоретические и практические ограничения. Результаты испытаний указывают на возможность создания генератора импульсов тока в 80 *а* при длительности импульсов 0,5 мксек. и частоте повторения порядка килогерца, и генератора импульсов тока в 4 *а* при частоте повторения 100 *кгц* и длительности импульсов 0,06 мксек. Л. В. Кутуков

11051. Некоторые результаты исследования работы электронных ламп в быстродействующих вычислительных машинах. Абалышникова Л. М., Сб. тр. Вычисл. центра АН УССР, 1958, вып. 3, 94—98

Приводятся статистические данные о причинах выхода из строя ламп, работающих в вычислительной машине, в зависимости от режима работы. Проводилось наблюдение за эксплуатацией электронных ламп в машине МЭСМ АН УССР. Время наблюдения составило 12 000 час. В машине МЭСМ работает 3790 электронных ламп, из них 2299 ламп типа 6H8C и 1491 лампа типа 6H9C. Причины выхода из строя разбиты на пять групп: перегорание нити подогревателя накала, уменьшение анодного тока в номинальном режиме до величины меньшей, чем допускается ТУ, замыкание электродов, изменение характеристики и механические повреждения. Под изменением характеристики понимается отличие величины анодного тока или крутизны от первоначально замеренных больше чем на 25%, что особенно важно для работы триггерных схем, не допускающих асимметрии. Приводятся статистические таблицы выхода из строя ламп в зависимости от причин. Выяснено, что отмеченными видами повреждений являются уменьшение анодного тока и изменение характеристик. Процент выхода из строя ламп, работающих в нормально закрытом режиме, больший, чем для ламп, работающих в нормально открытом режиме. Для ламп типа 6H8C, работающих в основном в схемах триггеров, наибольший процент составляет выход из строя из-за изменения характеристик. Лампы 6H9C чаще, чем лампы 6H8C, выбраковываются из-за перегорания нити накала и замыкания электродов. Приведены диаграммы срока службы радиоламп, на основании которых сделан вывод, что лампы типа 6H9C и 6H8C либо выходят из строя в течение первой тысячи часов работы, либо работают 5000—7000 час. Также определено, что наибольшее число ламп типа 6X6C (в машине из 2400) выходит из строя после 7000—8000 час. эксплуатации. Г. П. Зеленкевич

11052. Надежность вычислительных машин. Бергман (Tillförlitligheten hos matematikmaskiner. Bergman C. I.), Medd. Forskarnas kontaktorgan IVA, 1958, № 29, 178—185 (шведск.)

Обсуждаются вопросы, связанные с надежностью вычислительных машин в эксплуатации. В качестве мер по повышению надежности предлагается обратить особое внимание на тщательное изготовление отдельных элементов машин, переход на транзисторы, модернизацию и улучшение существующих систем охлаждения. В заключение статьи приводится дискуссия по вопросам надежности вычислительных устройств. Д. А. Поспелов

11053. Проблемы испытаний электронных счетных машин. Вада Хироси. Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1958, 22, № 12, Дэнсики нюсу, № 107, 2—4 (японск.)

11054. Надежность вычислительного устройства системы противовоздушной обороны: усовершенствование отдельных узлов. Хит (Reliability of an air defense computing system: component development. Heath Harold F., Jr), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 4, 224—226, 256 (англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 21, 40615.

11055. Отдельные детали автоматических вычислительных машин: перечень типов (Components of automatic computing machinery—list of types), Computers and Automat., 1957, **6**, № 3, 24—25 (англ.)
См. РЖЭ, 1958, № 1, 949.

11056. Надежность вычислительного устройства системы противовоздушной обороны: проектирование схемы. Нинберг (Reliability of an air defense computing system: circuit design. Nienburg Raymond E.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 4, 227—233, 257 (англ.)
См. РЖЭ, 1959, № 12, 25296.

11057. Автоматическая регистрация в быстродействующем устройстве считывания слогов. Терсофф (Automatic registration in highspeed character sensing equipment. Tersoff Abraham I.), Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington, D. C.). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 238—242 (англ.)

В связи со значительным развитием машинной обработки данных предпринято много исследований по разработке устройств автоматического ввода данных непосредственно с печатных документов.

Описываемая система регистрации была успешно применена в большом числе считывающих устройств. Она использует механическую развертку с высокой разрешающей способностью и фотоумножители для преобразования получаемого с документа оптического изображения в электрические сигналы. При движении документа, который должен быть прочтен, его изображение фокусируется на развертывающем диске, имеющем от двадцати до сорока радиальных прорезей каждая шириной 0,25 *мм*. Диск вращается со скоростью от 10 до 15 тысяч оборотов в 1 мин. За диском находится плата с расположенной перпендикулярно по отношению к цели на диске фиксированной целью шириной 0,25 *мм*. Таким образом получается развертка в двух взаимно перпендикулярных направлениях с помощью луча света, проходящего через «плавающее отверстие». Движущаяся точка света, проходящая через скрещивающиеся щели, фокусируется на фотоумножителе, где она преобразуется в электрический сигнал, величина которого пропорциональна интенсивности точки света. Выход фотоумножителя подается на видеоканал, где он усиливается и привязывается к фиксированным уровням напряжения (+15 и —25 *в*) и используется в последующих логических блоках, находящихся в электронном регистрирующем блоке. В большинстве быстродействующих считывающих системах автоматическая регистрация исключительно полезна при определении плохого заполнения и больших пометок на документе при компенсации наклона читаемой информации и при точном делении слогов на вертикальные зоны для целей правильного анализа. Для обеспечения такой автоматической регистрации применяются специальные электронные схемы. Многие из них в настоящее время находятся в стадии разработки или уже широко используются. Г. Х. Новик

11058. Вычислительная машина читает микрофильм (Computer reads microfilm), Electron. Inds and Tele-Tech., 1957, **16** № 11, 82—83, 155 (англ.)

По инициативе Бюро погоды (США), где имеется свыше 300 млн. перфокарт, Национальное бюро стандартов построило ФОСДИК II — быстродействующее электронное устройство, просматривающее снятые на микрофильм перфокарты, отыскивающее карты с нужной информацией и репродуцирующее последние снова в виде перфокарт для последующего ввода в вычислительную машину. Специальная камера служит для съемки перфокарт на 16-миллиметровую пленку с уменьшением в 24 раза. Размеры вдоль короткой стороны карты сокращаются при этом в два раза сильнее, чем вдоль длинной, чтобы представить прямоугольные пробивки в виде квадратиков. В каждой 100-футовой катушке содержится 13 000 изображений. Просмотр микрофильма осуществляется с помощью электронно-лучевой трубки, с экрана которой световое пятно фокусируется линзой на микрофильм, за которым расположен фотоэлемент. Управление единственным электронным лучом и интерпретация фотоэлектрических сигналов осуществляются электронными схемами, которые оказываются здесь гораздо проще, чем в случае устройств параллельного действия. По сравнению с такими устройствами достигается скорее улучшение конструкции, чем повышение скорости, хотя последняя и оказывается гораздо большей, чем у механических перфорационных машин. К другим преимуществам микрофильма относятся: 1) сокращение объема каталога более чем в 100 раз; 2) возможность задания весьма сложных условий выбора; 3) легкое и дешевое репродуцирование; 4) визуальный контроль данных и условий хранения с помощью аппарата для чтения микрофильма; 5) продолжительная сохранность данных. В. П. Черенин

11059. К вопросу о «читающих» устройствах электронных трансмиттеров. Пугач А. Б., Савицкий Ю. И., Тумановский Е. И., Тр. Секции проводн. связи. Укр. респ. правл. Научно-техн. о-ва радиотехн. и электросвязи, 1958, вып. 3, 63—66

Приводится краткий обзор фотоэлектронных считывающих устройств трансмиттеров, работающих с лентой пятизначного кода. Рассматриваются некоторые особенности схемы считывающих устройств: 1) схема с постоянным источником света, когда коммутируются фотоэлементы; 2) схема с несколькими источниками света, которые поочередно включаются распределителем; 3) схема, в которой элементы распределителя сами являются источниками света. А. С. Вавилова

11060. Магнитные логические схемы для быстродействующего переходного устройства перфокарты — магнитная лента. Блох, Полсен (Magnetic core logic in a high-speed card-to-tape converter. Bloch E., Paulsen R. C.), IRE Trans. Electron. Comput., 1959, 8, № 2, 169—181 (англ.)

Невысокая стоимость, хорошая надежность и легкость обслуживания привели к выбору магнитных элементов в описываемом переходном устройстве. В качестве основной детали служит магнитный сердечник со следующими параметрами $B_r = 2000$ *гс*, $B_s = 2200$ *гс*, $S = 1$ эрстед-мксек., $H_c = 1{,}1$ эрстед. Приводятся графики кривой намагничивания выходного напряжения и времени переключения в зависимости от ампервитков перемагничивания. Рассмотрены два возможных режима работы магнитных элементов — режимы суммирования токов и суммирования напряжения. Основной магнитной схемой, из которой можно получить все остальные логические схемы, является схема передачи. Это действие осуществляется за период 16,3 мксек. Приведены принципиальные схемы следующих логических элементов: инвертора, ИЛИ, НЕ—ИЛИ, И, НЕ—И, $X \cdot \overline{Y}$, $\overline{X} + Y$. Частота срабатывания элементов около 200 *кгц*, т. е. задержка в схеме передачи кода равна 5 мксек. Система импульсного питания — двухфазная. Источник питания ламповый и имеет следующие данные: передний фронт импульса тока 0,1—0,5 мксек., амплитуда 1,0—2,2 *а*, обратное напряжение 150 *в*. Показано, как на основе элементарных ячеек можно составить более сложные логические цепи: ИЛИ с разветвлением, динамический триггер, пересчетная схема, ИЛИ с исключением, цепь задержки. В двух больших функциональных схемах дополнительно даны считывающие устройства фирмы «ИБМ», в которых предполагается установить разработанные элементы на магнитных сердечниках. Дано сравнение устройств с существующей диодно-ламповой логикой и с проектируемой логикой на магнитных элементах по количеству деталей (см. таблицу):

Детали	Диодно-ламповый вариант	Вариант с магнитными элементами
Лампы вакуумные	475	200
Лампы-тиратроны	100	10
Кулачки	40	7
Реле	40	14
Диоды	1190	600

Имеются фото конструкций элементов, блоков и всего устройства в целом. А. Ф. Смирнов

11061. Новое быстродействующее печатающее устройство для самой быстродействующей в мире электронной вычислительной машины (New high speed printer for world's fastest computer), Automat. Control, 1959, 10, № 2, 68—71 (англ.)

До последнего времени в качестве выходных устройств на машине НОРК использовались построитель кривых (имеющий скорость построения 10 000 точек в 1 сек.), характрон и два модифицированных печатающих устройства ИБМ-407, обеспечивающих строчную запись информации с небольшой скоростью. Новое быстропечатающее устройство является устройством, которое позволяет осуществлять быстродействующую печать большого объема информации, а также позволяет производить графический вывод. Это устройство может печатать отдельные слоги со скоростью 15 *кгц* с большим выбором формата и вспомогательных знаков, и, кроме того, оно действует как построитель кривых в прямоугольных координатах. Быстропечатающее устройство состоит из характрона, который преобразует кодированные сигналы в числовые и буквенные слоги и располагает их затем на экране трубки, двух камер, направленных на экран, счетчиков разрядов и строк, которые определяют положение слога на экране, и цепей управления, которые определяют слог на матрице, останавливая счетчики. Выход характрона записывается на 35-миллиметровую пленку на одной или обеих камерах, производящих съемку со скоростью 10 кадров в 1 сек. при плотности кадров 30 на 1 *м*. Каждая кассета содержит 70 *м* пленки, которая после съемки и проявления может просматриваться кадр за кадром или может быть использована для печати на бумагу. Одновременно предусмотрена возможность автоматического проявления пленки непосредственно в самом печатающем устройстве и проектирования изображения на специальный экран. При печати производится контроль передачи информации с помощью контроля четности. Г. Х. Новик

11062. Некоторые типы систем для преобразования цифрового кода в перемещения. Балтрушевич А. В., Научн. докл. высш. школы. Электромехан. и автоматика, 1958, № 3, 188—198

Рассматриваются общие принципы построения преобразователей цифровых величин в угловые и линейные перемещения. В разделе цифровых следящих систем приводятся описания функциональной схемы преобразователя и двух типов датчиков: кодового и накопительного. Для кодовых датчиков даны основные понятия о кодах Грея и Баркера, их сравнительные характеристики и варианты технического исполнения. В качестве примера датчика накопительного типа приводится датчик с вращающимся барабанчиком и подвижной головкой, связанной с выходным валом. Отмечается возможность построения выходных следящих систем с измерением приращений и измерением полных значений преобразуемых числовых величин, в связи с чем приводятся рекомендации.

В разделе преобразователей с шаговыми электродвигателями отмечаются характерные особенности построения выходных устройств по разомкнутой схеме, простота исполнения и возможность накопления случайных ошибок. Приводятся данные релейных и синхронных шаговых двигателей.

В заключительной части статьи рассматривается пример позиционного преобразователя линейных перемещений с использованием системы пневматических цилиндров. Приведен перечень технической литературы по данному вопросу. Б. М. Баскаков

11063. Применение транзисторов в вычислительных машинах. Часть III. Применение транзисторов в моделирующих устройствах. Буайе (Application des transistors aux machines à calculer. III-e part. Circuits analogiques à transistors. Boyer P.), Rev. techn. C. F. T. H., 1959, № 30, 39—47 (франц.)

Третья из серии статей (РЖМат, 1960, 5942, 5943), посвященных применению транзисторов в вычислительной технике. В данной статье рассматривается их использование в блоках моделирующих устройств. В частности, описаны схемы и показаны общие виды операционных усилителей и стабилизированных источников питания. Перечислены трудности, возникающие при использовании в указанных блоках электронных ламп, и применяемые способы борьбы с ними. Показаны преимущества применения транзисторов. В приложении производится анализ схемы бездрейфового усилителя. В. В. Васманов

11064. Функциональный генератор с вращающимся диском, предназначенный для моделирующих устройств. Янг, Александер, Шветман (Rotating-disk function generator for analog computers. Young Mary Ellen, Alexander W. Merle, Schwetman Herbert D.), Rev. Scient. Instrum., 1959, **30** № 5, 318—322 (англ.)

Дается краткий обзор метода генерирования функций зависимых и независимых переменных на моделирующих устройствах и описывается функциональный генератор, разработанный для моделирования произвольных функций времени. Генератор состоит из источника света (6-вольтовая автомобильная лампочка с рассеивающим цилиндром из бумаги), профилированного по радиусу алюминиевого или картонного диска и фотоумножителя, расположенного внутри светового экрана со щелью длиной 2 и шириной 0,1 *см*. Щель устанавливается по радиусу диска, который со скоростью 5 об/сек вращается синхронным электродвигателем согласованно с периодическим включением вычислительной машины, работа которой обеспечивается функциональным генератором. При вращении диск модулирует световой поток, попадающий через щель на фотоумножитель, причем закономерность изменения потока определяется радиальным профилем диска. Выходное напряжение фотоумножителя (лампы GL-931-A), изменяемое в соответствии с изменениями падающего на него потока, представляет заданную функцию времени и подается в схему машины. В качестве примеров рассмотрены диски для ввода функции: $f(t)=at$; $f(t)=at+b\sin wt$; $f(t)=at^2+b$. Анализируются возможные источники погрешностей генератора: конечность ширины щели и площади источника света, смещения щели по радиусу и в сторону, изменения чувствительности фотоумножителя и яркости источника света и др. Общая точность генерирования функции составляет 4% при частоте 4 *гц*, за исключением точности участков вблизи точек разрыва функции, на которых сказывается конечность ширины щели, дающие максимальную крутизну фронта импульса при скорости вращения 5 об/сек порядка 0.62 *мксек*. Отмеченные максимальные погрешности составляли 4—10%. Библ. 13 назв. И. Д. Алимов

11065. Моделирующее устройство для инженера (Solid-state analog computer suits individual engineering needs), Control Engng, 1959, **6**, № 6, 137 (англ.)

Краткое сообщение о транзисторном моделирующем устройстве типа PACE-10 настольной конструкции, выпущенной фирмой «Electronic Assosiates Inc.» весом 36 *кг*

(без принадлежностей); площадь, занимаемая им, несколько более площади, занимаемой обыкновенной электрифицированной пишущей машинкой. Первая, основная модель этого устройства, стоящая 4000 долл., может производить 10 сложений или вычитаний, четыре интегрирования и позволяет регулировать 10 параметров. Вторая, более сложная модель, ценой 9000 долл., может производить 20 сложений или вычитаний, 10 интегрирований, два умножения или деления, дает возможность изменять 24 параметра, позволяет ввод двух неаналитических функций. Вторая модель может решать четыре уравнения второго порядка одновременно. Основой этих моделей являются усилители постоянного тока на транзисторах. В первой модели используются 10, во второй 20 усилителей. Два таких усилителя, смонтированные в одном блоке, занимают на передней панели площадь 48 *см*². Дрейф нуля стабилизирован прерывателем. Усиление при разомкнутой петле обратной связи $40 \cdot 10^6 \div 50 \cdot 10^6$. Каждый усилитель может давать выходное напряжение ± 12 *в* на нагрузке 500 *ом* и не повреждается при полном коротком замыкании. Точность вычислений 0,1%. Устройства рекомендуются для решения широкого круга задач. Л. В. Кутуков

11066. Моделирующие устройства ETL III, ETL IV, ETL V. Такахаси Сигэру, Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1958, 22, № 12, Дэнсики иносу, № 107, 4—5 (японск.)

11067. Малогабаритные моделирующие устройства фирмы «Хитати» ALP-1 и WAC-301, получившие Гран-при. Икэдзава Синъити, Дэнси когё, Electronician, 1959, 8, № 2, 162—168 (японск.)

11068. Необходимые условия устойчивости математических моделей для решения систем алгебраических и трансцендентных уравнений с тремя и более неизвестными методом подбора корней. Лебедев А. Н., Изв. высш. учебн. заведений, Приборостроение, 1958, № 6, 38—49

Рассматривается обобщенная схема математической модели для решения системы трех алгебраических или трансцендентных уравнений методом подбора вещественных и единственных корней в заданной области X_i. Модель имеет 3 линии обратной связи, входы и выходы которых могут коммутироваться переключателем, образуя 6 вариантов модели. Выбор варианта осуществляется в зависимости от того, в каком случае модель будет наиболее чувствительна к воздействию линий обратной связи, а сходимость процесса подбора корней наиболее быстрой. Если в различных частях области X_i должны быть выбраны различные варианты, то необходим автоматический переключатель, который, однако, может быть заменен дополнительным счетно-решающим устройством. При этом заданная система уравнений заменяется равносильной системой. Рассмотрены необходимые условия устойчивости модели и быстрой сходимости процесса для всех вариантов. Метод может быть применен для решения системы из большего числа уравнений. И. К. Волков

11069. Исследование алгебраических уравнений при помощи моделирующих установок. Эльясберг В. М., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 6, 756—761 (рез. англ.)

Предложен простой метод исследования алгебраических уравнений на моделирующих установках, основанный на воспроизведении заданного полинома как решения определяющего его дифференциального уравнения. Метод позволяет непосредственно определять вещественные и мнимые корни алгебраических уравнений, приближенно оценивать значения комплексных корней, а также исследовать динамические системы на устойчивость при помощи критерия Михайлова. Резюме автора

11070. Автоматическое устройство для решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с ядром типа $k(t-s)$. Васильев В. Г., Научн. докл. высш. школы, Электромехан. и автоматика, 1958, № 4, 36—38

Приводится блок-схема устройства, использующая три линейных усилителя постоянного тока и пассивный четырехполюсник, для моделирования интегрального уравнения вида $sf(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t k(t-x)\varphi(x)\,dx$, где $f(t)$, $k(t)$ — заданные функции, а s, λ — заданные вещественные параметры. Параметры s, λ определяют коэффициенты усиления линейных усилителей, ядро $k(t)$ — передаточную функцию четырехполюсника, а $f(t)$, $\varphi(t)$ являются соответственно входными и выходными величинами модели. Приводится выражение для мгновенной погрешности определения функции $\varphi(t)$ в случае учета инерционности усилителей. Указывается, что вместо двух линейных усилителей постоянного тока в схеме модели могут быть использованы системы, состоящие из амплитудного модулятора, усилителя переменного тока и фазочувствительного детектора.

В. Е. Шаманский

11071. Вычислительная установка для расчета полей электронно-оптических систем. Дер-Шварц Г. В., Нетребенко К. А., Изв. АН СССР. Сер. физ., 1959, 23, № 4, 506—510

Приведены основные сведения о вычислительной установке, предназначенной для расчетов электрических и магнитных полей, обладающих вращательной симметрией. Расчет сводится к решению краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Описаны структурная схема установки, сеточный электроинтегратор, автоматическая измерительная и регистрирующая аппаратура и цифровое интегрирующее устройство.

В. В. Васманов

11072. Машина для отсчета и регистрации ординат кривых. Фийон (Machines à dépouiller les enregistrements. Fillon François), Automatisme, 1959, 4, № 6, 226—231 (франц.)

Результаты экспериментальных исследований в авиации и других областях часто регистрируются фотопутем на длинных лентах. Обычно применяется многоканальная запись, при которой на ленте параллельно записывается ряд часто пересекающихся друг с другом кривых. Определение значений записанных в виде кривых параметров для последующей математической обработки результатов наблюдений сводится к измерению ординат кривых, что требует трудоемкой и кропотливой работы. Описывается установка для полуавтоматической обработки записей на лентах регистрирующих приборов. Установка содержит отсчетное устройство, выполненное в виде плоского стеклянного, подсвечиваемого снизу, наклонного стола. На поверхности стола, снабженного двумя взаимно пересекающимися визирами, закрепляются обрабатываемые ленты. Перемещениями визиров визирная точка совмещается с точками кривой, по которой требуется определить величину параметра. Определенная таким образом величина автоматически фиксируется на перфокарте или перфоленте. Для перфорации используется отдельный электрически связанный с визирным устройством перфоратор. Установки подобного типа успешно используются во французских авиационных исследовательских учреждениях уже многие годы для обработки лент большинства широко распространенных самописцев. В. В. Васманов

11073. Моделирующее устройство для определения кривизны зоны захвата. Кохонен, Иванто (An analogue device for determination of buckling. Kohonen Teuvo, Ivanto Osmo. Suomalais. tiedeakat. toimituks. 1958, Sar. AVI, № 14, 13 pp., ill.) (англ.)

Описан новый метод определения кривизны зоны захвата (B) для цилиндрического термореактора с произвольным числом управляющих стержней. В качестве исходного используется волновое уравнение равновесия потока Ф тепловых нейтронов полого гомогенного реактора

$$\nabla^2\Phi(r) + B^2\Phi(r) = 0. \quad (1)$$

Если активная зона реактора содержит управляющие стержни, то в результате наложения соответствующих граничных условий уравнение (1) имеет дискретный спектр собственных значений B^2, наименьшее из которых B^2_1 практически дает нужное решение. Для сложной геометрии активной зоны аналитическое решение (1) весьма затруднительно. Имеется, однако, класс конфигураций, а именно цилиндрические реакторы со стержнями, параллельными их образующим, для которого решение (1) сводится к решению двухразмерной задачи

$$\nabla^2 F(x, y) + \alpha^2 F(x, y) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha^2 = B^2 - \beta^2$; $\beta = \frac{\pi n}{H}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, H — высота активной зоны. Значения α^2 получаются измерением основных резонансных частот мембранного резонатора, форма которого копирует сечение активной зоны реактора. Резонатор представляет собой равномерно натянутую резиновую мембрану толщиной 0,4 мм. Эффект управляющих стержней вводится фиксированием мембраны в местах расположения стержней. Используя звуковой генератор и динамическую подвижную систему, вызывают вибрации мембраны и измеряют наименьшую резонансную частоту. Уравнение мембраны

$$\nabla^2 u(\rho) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u(\rho) = 0, \quad (3)$$

где $u(\rho)$ — амплитуда колебаний, ω — угловая частота, c — постоянная мембраны.

Комбинация уравнений (2) и (3) дает простую формулу

$$B^2 = \left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2, \quad (4)$$

где f_0, f — нижние резонансные частоты соответственно для модели полого реактора и реактора с управляющими стержнями. Погрешность измерений, отнесенная к расчетным данным для нескольких конкретных сечений, не превысила 2%. Простота конструкции позволяет применять модель также и для демонстрационных целей.

И. К. Волков

11074. Электромеханические аналогии. Баллиган (Les analogies électro-mécaniques. Balligand E.), Ann. Gembloux, 1959, **65**, № 3, 253—269 (франц.)

Рассмотрен ряд (в порядке нарастающей сложности) систем из пассивных механических элементов и дано их математическое описание. Показаны описываемые теми же уравнениями электрические системы, являющиеся аналогами механических. Отмечается, что метод аналогий распространяется и на системы с активными элементами.

В. В. Васманов

11075. Щелевые гидроинтеграторы. Кузьменко Л. В., Научн. докл. высш. школы. Электромех. и автоматика, 1958, № 2, 85—93

Дан критический анализ различных принципов моделирования переменных по времени процессов и обоснованы преимущества щелевого гидроинтегратора. Дано подробное описание этого прибора и указаны его эксплуатационные характеристики. Для решения пространственных задач с нестационарными условиями разработан пространственный щелевой интегратор. Описаны его основные узлы, показавшие удовлетворительную работу при макетных испытаниях.

В. В Васманов

11076. Моделирующее устройство для интегрирования произведений. Пенни, Мак-Хьюго (Analogue computer for the solution of product integrals. Penny F. D., McHugo J. W.), J. Scient. Instrum., 1959, **36**, № 4, 173—179 (англ.)

Описана конструкция вычислительного прибора, предназначенного для интегрирования произведений графически заданных функций. Прибор содержит лентопротягивающее и интегрирующее устройства. Последнее выполнено в виде дискового функционного интегрирующего механизма.

В. В. Васманов

11077. Контроль работы счетно-аналитических машин. Хафт (Prüfung von Rechenvorgängen in elektrischen Rechenmaschinen. Haft Guntram), Elektronik, 1959, 8, № 2, 55—57 (нем.)

Указаны причины, вызывающие необходимость контроля работы счетно-аналитических машин (ошибки оператора, ошибки программирования и сбой в работе блоков и механизмов машин). Перечислены известные способы контроля и новый способ, предлагаемый автором.

В. В. Васманов

11078. Схемы настройки счетно-аналитических машин (Problème électro-comptable IBM. Dispositif de séparation en groupes indépendants des unités de sélection et de séquence), Rev. mécanogr., 1956, **10**, № 110, 24—26 (франц.)

Рассмотрены варианты настройки машины ИБМ-77 для бухгалтерских расчетов. Приведены примеры группирования данных и соответствующей настройки, позволяющей сократить трудоемкость вычислений на 50%.

В. В. Васманов

11079. Электромеханика в счетных машинах. Валь (Elektromechaniker—ein neuer Lehrberuf in der Büromaschinen-Industrie. Wahl R.), Neue Techn. Büro, 1959, **3**, № 10, 241—243 (нем.)

Отмечается, что электромеханика прочно вошла в конструкцию клавишных вычислительных машин и другого конторского оборудования. Показаны общие виды электромеханических узлов агрегатированной счетно-пишущей машины «Мерседес» и содержащиеся в ней элементы (шаговые искатели, реле, конденсаторы и т. д.). Указывается на особую важность подготовки квалифицированных механиков по конторскому оборудованию, хорошо знакомых с электромеханическими элементами.

В. В. Васманов

11080. Логарифмическая линейка для подсчета средней освещенности улиц при различном расположении источников света. Рох (Eine Rechenscheibe für die Straßenbeleuchtung. Roch Josef), Lichttechnik, 1959, **11**, № 10, 535—537 (нем.)

11081. Точная логарифмическая линейка. Демен (Loga-Präzisionsrechenscheiben. Daemen W.), Aluminium Suisse, 1959, 9, № 5, 174—176 (нем., франц.)

11082. Электронные вычислительные машины. Кранич (Le calcolatrici elettroniche. Kranjc Aldo), Coelum, 1959, **27**, № 11-12, 169—176 (итал.)

Статья общего характера.

11083. Электронный дифференциальный анализатор. Мак-Лауд (The EDA. McLeod John), Instrum. and Control Systems, 1959, **32**, № 10, Part 1, 1532—1534 (англ.)

Статья общего характера.

11084. Использование дифференциального анализатора для решения проблем гидравлики, связанных с гидроэлектрическим оборудованием. Мессерль (Utilisation d'un analyseur différentiel pour résoudre des problèmes hydrauliques posés par des aménagements hydro-électriques. Messerle H. K.), Houille blanche, 1956, **11**, № 6, 813—836 (франц.)

11085. Введение в теорию множеств, основанную на простых числах, применительно к электронным вычислительным машинам. Саблие (Introduction à une théorie des ensembles basée sur les nombres premiers assimilable par les calculateurs électroniques. Sabliet Samuel), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 1, 35—38 (франц.)

См. РЖЭ, 1957, № 17, 33715.

11086. Цифровые вычислительные машины в авиации и военно-морском флоте. Буше (Les calculatrices arithmétiques dans l'aviation et la marine militaire.

Boücher M. H.), Bull. Assoc. techn. maritime et aéronaut., 1956, № 55, 101—119. Discuss., 120—121 (франц.)

См. РЖЭ, 1958, № 8, 13943.

11087. Связь с большими вычислительными машинами. Манли (Communicating with large-scale computers. Manley J. M.), Bell Labs Rec., 1959, 37, № 10, 381—386 (англ.)

В популярной форме описывается процесс решения задачи на вычислительной машине. Сообщается о разработанной фирмой «Белл» системе записи программ ФОРТРАН, применяемой на машинах ИБМ-704 и ИБМ-650. А. Н. Чуйкин

11088. Введение в технику электронных запоминающих устройств. Рунге (Einführung in die elektronische Speichertechnik. Runge W. T.), Fernmelde-Prax., 1959, 36, № 13, 505—519 (нем.)

Статья является докладом проф. Рунге, прочитанным им перед обществом журналистов, содержит популярное изложение работы различных запоминающих устройств, соображения о процессах мышления в головном мозгу и сильно упрощенное рассмотрение физических процессов в мозгу, основанное на предположении, что нерв — это элемент, имеющий только два состояния. М. И. Гринев

11089. Список литературы по вопросам математического моделирования (по вычислительным машинам непрерывного действия) за 1957 г. Сост. Вильдт Е. О., Ландсберг Р. С., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 11, 1547—1558; № 12, 1699—1711

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

11090. Обзор прогресса и тенденции разработки и использования автоматической обработки данных в деловых и руководящих системах управления Федерального правительства по состоянию на декабрь 1957 г. (Survey of progress and trend of development and use of automatic data processing in business and management control systems of the Federal Government, as of December 1957), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, 2, № 4, 22—26 (англ.)

Первая большая автоматическая система обработки деловых данных была разработана и предложена правительству США в 1951 г. С этого момента использование таких систем в работе Федерального правительства непрерывно расширяется. По состоянию на декабрь 1957 г. установлена 121 электронная система для обработки деловых и аналогичных данных. Годовая арендная стоимость используемого оборудования составила свыше 20 млн. долл. и свыше 9 млн. долл. было израсходовано на закупку оборудования. Кроме того, 86 машин было принято к установке различными министерствами и агентствами. 60 других электронных систем обработки данных планируются к установке. На 31 декабря 1957 г. в Министерстве обороны, где наиболее широко используются электронные системы, было установлено 85 электронных вычислительных машин. В гражданских министерствах и ведомствах основное применение больших цифровых машин получило в специализированных областях, связанных с начислением заработной платы, с оплатой чеков казначейства, с подготовкой статистических и финансовых годовых отчетов. Большая часть используемых правительством в настоящее время электронных устройств была установлена в 1956—1957 гг. Поэтому некоторые из них используются не в полном объеме, а другие — модифицированы при начальной установке. Однако многие системы эксплуатировались полностью. Работы, которые выполняются электронными машинами, могут быть разделены на две широкие категории:

1. Обработка большого объема данных, где основное внимание обращается на уменьшение стоимости на единицу обрабатываемой информации.

2. Обработка большого объема данных, где во главу угла ставится руководящее управление. Эти системы, вначале широко применяемые в Министерстве обороны, обрабатывают информацию и дают отчеты, которые непосредственно влияют на систему управления.

Величина и сложность правительственных систем обработки данных быстро повышаются, благодаря развитию технологии, увеличению населения и других моментов, лежащих в сфере обслуживания правительственными учреждениями. В настоящее время ежегодно обрабатывается свыше 25 биллионов различного рода документов. Необходимость быстрого получения точных и координированных данных становится все более острой проблемой в период быстрых изменений технологических процессов. Электронные вычислительные машины применяются только там, где возможно их применение с точки зрения рентабельности, удобства использования и возможностей управления. Г. Х. Новик

11091. Вычислительные машины — «клерки» помогают управлять воздушным движением (Computer «clerks» help to control air traffic), Manag. and Business Automat., 1959, 2, № 1, 6—7 (англ.)

Сообщается об установке в аэропортах Нью-Йорка и Вашингтона вычислительных машин УНИВАК, которые принимают и запоминают планы полета самолетов, сообщаемые из точек вылета, вычисляют предварительные данные о времени пролета контрольных ориентиров маршрута и времени прибытия на аэродром назначения и печатают эти данные в виде таблички. На табличке указываются тип самолета, его скорость, ожидаемое время прибытия в точку назначения и в 6—7 контрольных точек, высота и прочие данные о маршруте. Ввод в машину данных, получаемых по радио, осуществляется при помощи печатающих аппаратов и перфорационных машинок. Ежедневно в этих аэропортах прилетает и вылетает до 3000 самолетов. За счет применения вычислительных машин в июле 1959 г. ручная обработка данных сократилась на 20% и предполагалось, что эта цифра будет повышена до 50%. В конце лета 1959 г. предполагалась установка таких машин в Питтсбурге, Кливленде и Бостоне. И. Д. Алимов

11092. Электронная обработка данных в банковском деле (Elektronische Datenverarbeitung im Bankbetrieb), Techn. Rundschau, 1959, 51, № 43, 45, 47, 49 (нем.)

Статья посвящена использованию машины УНИВАК-УКТ (UNIVAC-UCT) в швейцарском банке. Машина ведет бухгалтерию, составляет описок доходов, ведет текущие счета и т. д. Машина может печатать выдержки из счетов на английском, французском и немецком языках.

11093. Оценка контроля работы тепловой электростанции посредством цифровой вычислительной машины. Ритчингс, Саммерс (Evolution of computer controlled power generation. Ritchings F. A., Summers W. A.), Automation, 1959, 6, № 11, 90—95 (англ.)

Фирмой «Дэйстром» (Daystrom) была построена цифровая вычислительная машина МАРК (MARC—Monitor and Results Computer), установленная на станции Стерлингтон в США. Система содержит цифровое опрашивающее устройство, устройство выявления аварий, цифровое печатающее и вычислительное устройства. Устройство в целом может производить следующие расчеты: 1) Расход топлива агрегатом как в данный момент, так и среднечасовой или за какой-либо меньший промежуток времени; 2) Оптимальный, или наилучший из возможных, расход топлива агрегатом для данной нагрузки, температуры охлаждающей воды и существующей температуры окружающего воз-

духа; 3) Расход топлива станцией; 4) Энтальпию пара и воды для баланса тепла; 5) к. п. д. котла; 6) Производительность конденсатора; 7) Производительность теплообменника; 8) Работу градирни, если таковая имеется; 9) Работу турбогенератора; 10) Перерасход энергии собственных нужд; 11) Среднее значение давления, температуры пара и т. д. за 1 час. или же за сутки; 12) Суммарный расход питательной воды, газа, киловатт-часов и т. д.; 13) Коррекцию измерительных приборов для калибровки, ошибки, температуры и давления; 14) Скорость изменения температуры корпуса турбин.

Оборудование позволяет печатать на выходные пишущие машинки любое число переменных через заранее установленные интервалы (мощность, напряжение, ток, расход, давление, температуру, уд. вес и т. д.). Нормально запись производится с интервалом 1 час. Оборудование позволяет осуществлять опрос (обегание) в случае аварийного состояния любого желаемого числа переменных в дополнение к любому или всем выводимым на печать или выполняемым вычислениям со скоростью от 5 до 10 точек в 1 сек. Опрос может включать температуры металла отдельных точек котла и турбины, подшипников и вспомогательного оборудования, давления и прочие температуры в случае необходимости. Система автоматического контроля также производит проверку собственной точности вычислений и преобразований непрерывных величин в цифровой код за каждый цикл обегания. Предусмотрена возможность ручного вызова на печать или на аварийную печать абсолютных значений от одной до трех независимо выбранных переменных, всех переменных или всех аварийных установок. Помимо этого, по ручному вызову можно печатать все регистрируемые данные в любой момент между нормальными выводами на печать. Машина может выдавать сигнал от измерений соответствующих точек станции на миниатюрный самописец.

Система МАРК освобождает персонал от работы по вычислению режимов работы оборудования. Система также: 1) обеспечивает запись статистики, включая усредненные или интегральные данные в наиболее удобной для использования форме, 2) улучшает точность и надежность регистрации данных, 3) помогает в осуществлении контроля, 4) повышает возможность управлять станцией с заменой персонала в случае необходимости, 5) снижает вероятность аварий оборудования путем определения тенденции к изменению режима, 6) снижает работы по текущему ремонту и уменьшает необходимость периодических специальных испытаний турбин и котлов. Срок окупаемости установленного на станции оборудования 10 лет. А. Н. Сухов

11094. Применение цифровых вычислительных машин для расчета электрических систем. Репс (Digital computers for distribution systems. Reps D. N.), Electr. Engng, 1958, **77**, № 8, 708—713 (англ.)

Разбираются вопросы применения быстродействующих вычислительных машин для расчета электрических систем. Указывается, что большие затраты времени на программирование и высокая стоимость «машинного времени» делают выгодным решение задач, требующих просчета большого количества вариантов по одной программе. Приводится пример подготовки решения одной из задач расчета электрической передающей линии, включая составления программы с использованием системы автоматического программирования ФОРТРАН. Дана блок-схема программы решения задачи выбора наиболее экономичного варианта передачи энергии, разработанной для машины ИБМ-701. Подготовка перфокарт для решения задачи занимает около часа, счет идет 1 мин. На очереди стоят работы по использованию машин для решения задач оптимизации параметров сетей с целью обеспечения необходимых нагрузочных характеристик: по замене расчетных столов постоянного и переменного тока соответствующими программами анализа возможных неисправностей и увеличения надежности цепей. В дальнейшем круг задач, решаемых на вычислительных машинах, будет увеличиваться.

Ю. И. Торгов

11095. Итерационные методы изучения нагрузки потока. Ван-Несс (Iteration methods for digital load flow studies. Van Ness James E.), Power Apparat. and Systems, 1959, № 43, 583—586. Discuss., 586—588 (англ.)

Рассматривается задача распределения мощности в сложной электрической цепи и изучается сходимость решения методом узлов. Рассматриваются 6 вариантов решения данной задачи с использованием вычислительной машины ИБМ-650. Варианты отличаются друг от друга количеством итераций (21—87), временем, требующимся на одну итерацию (9—23 сек.), и количеством команд в программе вычислений (325—464).

В. Д. Савицкий

11096. Применение электронной цифровой вычислительной машины к проектированию линий связи для передачи на большие расстояния. Канэко, Хатта, Симада (Kaneko Kihachirō, Hatta Tōru, Shimada Shozō), Хитати хёрон, Hitachi hyoron, 1958, спец. вып. № 28, 25—31 (японск.)

11097. Вычислительные машины в энергетике. Хартман, Шнецлер (Computers serve power systems. Hartmann D. P., Schnetzler M. A.), Allis-Chalmers Electr. Rev., 1959, **24**, № 3, 7—9 (англ.)

11098. Применение современных вычислительных устройств в строительстве паровых турбин. Млудек (Die Anwendung moderner Rechenverfahren im Dampfturbinenbau. Mludek H.), Energietechnik, 1959, **9**, № 11, 491—493 (нем.)

11099. Моделирующие устройства и их применение в химической промышленности. Хеннинг (Analogregnemaskinen og dens anvendelser i kjemisk industri. Hennig Tore), Tekn. ukebl., 1959, **106**, № 42, 931—938 (норв.; рез. англ.)

11100. Электронная вычислительная машина в дорожном строительстве. Шурман (The electronic computer in highway engineering. Schureman L. R.), J. Highway Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1959, **85**, № 3, Part 1, 37—61 (англ.)

11101. Изображение хода работы при помощи электронной машины с программным управлением. Бисдорф (Darstellung des Arbeitsablaufs bei einer programmgesteuerten elektronischen Rechenanlage. Bisdorf W.), Z. Erzbergbau und Metallhüttenwesen, 1959, **12**, № 4. 156—158 (нем.)

Рассматривается применение современных цифровых машин для решения задачи о получении максимальной прибыли при эксплуатации рудных месторождений. При решении используется следующее уравнение прибыли: $B(n) = (E - a_0)R - a_1 n - c_0 RA(n) - c_1 nA(n)$, где $B(n)$ — общая прибыль от месторождения в зависимости от числа лет разработки (руб.), E — выручка (руб/m), $A(n)$ — годовая норма амортизации и выплаты процентов, R — общие запасы месторождения (m), n — число лет эксплуатации, a_0 — пропорциональная стоимость производства (руб./m), a_1 — постоянная стоимость производства (руб./год), c_0 — пропорциональная стоимость механизмов (руб./m, лет), c_1 — постоянная стоимость механизмов (руб.). При решении вышеприведенного уравнения ищется минимум трех последних членов суммы, что дает максимум $B(n)$. В статье приведена блок-схема программы для решения подобной задачи и рассмотрен пример. Д. А. Поспелов

11102. Научные расчеты и цифровые вычислительные машины. Сиокава (Shiokawa S.), Ом. Дэнки

дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1959, **46**, № 4, 33—41 (японск.)
Статья общего характера.

11103. Сложные расчеты и электронные вычислительные машины. Робертс (Complex calculations and electronic computers. Roberts N. P.), Civil Engng and Public Works Rev., 1959, **54**, № 634, 459—460 (англ.)
Статья общего характера.

11104. Применения электронной вычислительной машины ИБМ-604/1 для извлечения корней произвольной степени. Караччоло (Impiego del calcolatore elettronico 604/1 IBM per il calcolo delle radici di gualsiasi grado. Caracciolo Carlo), Schede perfor. e calcolo elettron., 1958, 5, № 26, 55—60 (итал.)

11105. О применении электронного дифференциального анализатора для нахождения корней полинома. Нар (On the application of an electronic differential analyser for finding the roots of a polynomial. Nag B. R.), Indian J. Phys., 1958, 32, № 5, 212—217 (англ.)

11106. Моделирование на вычислительной машине границ видимости. Форд, Айзаксон, Петел (Computer terrain simulation for line-of-sight calculations. Ford Lester R., Jr, Isaacson H. S., Pethel F. C.), Operat. Res., 1959, 7, № 4, 478—482 (англ.)

Предложен аналитический метод построения границ видимости на топографических картах, использующий координаты и высоту над уровнем моря наблюдателя и узлов прямоугольной сетки. Результаты вычислений на машине ИБМ-709 сравниваются с обычным ручным методом расчета. О. М. Калинин

11107. Применение автоматических вычислительных машин в геодезии. Малонь, Валка (Použití samočinného počítače v geodézii. Maloň Stanislav, Válka Oldřich), Geod. a kartogr., obzor, 1959, **5**, № 10, 189—194 (чешск.)

11108. Решение некоторых задач наземной стереофотограмметрической съемки по методу электрического моделирования. Скобелев А. Т., Тр. Моск. ин-та инж. землеустройства, 1959, вып. 3, 175—188

11109. Использование цифровых вычислительных машин для вычисления коэффициентов аберрации. Форд (Use of a digital computer for the calculation of aberration coefficients. Ford P. W.), J. Opt. Soc. America, 1959, **49**, № 9, 875—877 (англ.)

11110. Применение цифровых вычислительных машин для инженерных расчетов. Чалмерс (Engineering design by digital computers. Chalmers B. J.), Research, 1959, **12** № 10-11, 390—394 (англ.)
Статья общего характера.

11111. Расчет обтекания радиолокационной антенны и быстродействующие вычислительные машины. Олсон (The radome and the high-speed digital computer. Olson K. H.), Automat. Control, 1959, **11**, № 4, 71—74 (англ.)

11112. Общий подход к применению цифровых машин для получения переходных процессов. Лего, Сы (A general approach for obtaining transient response by the use of a digital computer. Lego P. E., Sze T. W.), Commun. and Electron., 1959, № 40, 1031—1036 (англ.)

Представлены две логические схемы программы для цифровой машины ИБМ-704 для вычисления переходных процессов линейных систем автоматического регулирования или автоматического контроля. Одна из схем осуществляет вычисление переходного процесса, основываясь на обратном преобразовании Лапласа, другая на использовании интегрального преобразования Фурье.

Первая программа позволяет вычислить переходный процесс, когда передаточная функция системы является рациональной дробью вида $Q(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, причем степень знаменателя должна быть $\leqslant 30$ и кратность полюсов < 4. Вторая программа может работать, когда известна либо передаточная функция системы (причем эта передаточная функция может быть трансцендентной), либо частотная характеристика системы. Вторая программа предусматривает два вида этих исходных данных для вычисления переходного процесса.

Авторы указывают на преимущество нахождения переходных процессов на цифровых машинах по сравнению с графическими методами. Л. М. Голубева

11113. Предварительное исследование характеристик системы регулирования аэродинамической трубы с помощью моделирующих устройств. Хербст, Николс, Кей, Миллер (Predicting the performance of a wind tunnel regulating system using an analog computer. Herbst R., Nichols J. O., Keay F. W., Miller R. W.), Applic. and Ind., 1959, № 44, 248—252 (англ.)

От системы регулирования скорости асинхронного вращения электродвигателя, приводящего во вращение многоступенчатый компрессор трубы, требуются высокая устойчивость и быстродействие. Выполнение этих требований затруднено наличием нелинейностей в характеристиках элементов системы и невозможностью подбора параметров основных элементов регулирующей системы и корректирующих цепочек. Поэтому при конструировании такой системы регулирования особенно необходимо проведение предварительного исследования ее предполагаемых характеристик с помощью моделирования на вычислительной машине. При моделировании имеется также возможность уточнить характер и параметры элементов обратной связи и корректирующих цепочек, предназначенных для повышения быстродействия и устойчивости. Описывается моделирование на аналоговой вычислительной машине такой системы регулирования, состоящей из рототрола (электромашинного усилителя с критическим самовозбуждением), электродвигателя постоянного тока, ограничителя силы тока, ограничителя скорости возрастания полной мощности, тахогенератора обратной связи, регулятора скорости вращения, диодного ограничителя сигнала регулятора скорости и усилителя суммарного сигнала, подаваемого на обмотку возбуждения рототрола. Усиленный рототролом сигнал подается в якорную обмотку двигателя постоянного тока, который перемещает пластины жидкостного реостата, включенного в цепь роторной обмотки асинхронного двигателя, скорость вращения которого регулируется. Приводится структурная схема системы и схема ее моделирования. В приложениях выводятся передаточные функции элементов системы. На экспериментально полученных осциллограммах переходных процессов показывается влияние различных корректирующих цепочек. И. Д. Алимов

11114. Вычислительное устройство для определения наивыгоднейшего режима резания. Васильев Д. Т., Фицнер Л. Н. В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 362—374

Определение оптимальных режимов резания при механической обработке металлических изделий производится на основании решения ряда систем уравнений, для чего используются специальные вычислительные устройства, простые в обращении и дающие ответ не более чем через 30 сек. Описываемое вычислительное устройство предназначено для решения трансцендентных уравнений типа: $1 = a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot a_3^{b_3} \ldots a_n^{b_n}$ и состоит из комбинации линейных и логарифмических потенциометров и нульиндикатора. Потенциометры вычислительного устройства, обеспечивающие логарифмическую зависимость выходного напряжения от смещения движка,

имеют специальную намотку. Колебания напряжения (± 30%) источника питания вычислительного устройства практически не влияют на величину результирующей погрешности. Все устройство конструктивно оформлено в виде чемодана. А. А. Крюков

11115. Моделирующее устройство для нахождения оптимального пути в системе связи. Рапапорт, Эйбрамсон (An analog computer for finding an optimum route through a communication network. Rapaport H., Abramson P.), IRE Trans. Communs Syst., 1959, 7, № 1, 37—42 (англ.)

Обсуждаются возможные методы решения задач типа задачи о нахождении кратчайшего пути между двумя заданными точками в сложной сети связей. Предлагается моделирующее устройство для решения таких задач на основе создания физической модели рассматриваемой схемы. В качестве аналога узлов схемы используются реле в специфическом включении; аналогом связей между узлами является связь через электромеханическую схему задержки; величина времени задержки для данной связи задается в соответствии с весовым коэффициентом (например, длиной линии связи или ее пропускной способностью и т. п.) реальной линии связи. Решение задачи начинается с возбуждения начального узла модели. Возбуждение распространяется по линиям с различными задержками. Достижение возбуждения данного узла фиксируется включением индикаторной лампочки. По достижении конечного узла сигнальное напряжение снимается, и оптимальный путь определяется визуально по горящим лампочкам. Приводится описание основных компонент модели: узлового реле, схемы задержки и индикации, наборной выносной панели и пр. Ф. П. Тарасенко

11116. Применение автоматических цифровых вычислительных машин для выполнения проектных работ. Брук И. С., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 3, 141—150

В Институте электронных управляющих машин АН СССР на протяжении нескольких лет проводилась работа по использованию цифровых вычислительных машин для проектных работ. На имеющейся в институте машине М-2 решен ряд задач, относящихся к разработке проектов металлургических печей (совместно с институтом «Сталь-проект»); к проектированию металлических конструкций (институт «Проектстальконструкция»); разработан ряд программ для решения электротехнических задач, возникающих при проектировании энергетических систем и их режимов; решены некоторые задачи, связанные с разработкой проектов использования газовых месторождений и др. Кратко описываются некоторые задачи и приводятся блок-схемы программ.

11117. Применение цифрового программного управления для производственных операций. Роснов (Application of numerical control to manufacturing operations. Rusnov Peter. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1959, № PROD-13, 8 pp., ill.) (англ.)

Фирма «Warner-Swasay», разработавшая позиционные системы «Tele-Probomat» и «Pilot-Probomat», провела ряд исследований для определения преимуществ, ограничений и возможностей цифрового программного управления. Системы работают по данным, записываемым на стандартную 8-дорожечную перфоленту шириной 25,4 *мм*, и обеспечивают точность в 0,1 *мм* на всей площади стола размером 460×610 *мм*. В системе «Tele-Probomat» датчики обратной связи выполнены в виде потенциометров грубой и точной установки, связанных с ходовым винтом станка муфтами сцепления, отключаемыми при установке в требуемую позицию. Перемещения осуществляются электродвигателями грубой и точной установки, подключаемыми к ходовому винту муфтами сцепления через зубчатые передачи. Двигатели управляются сервоприводами по сигналам команды и данных обратной связи. В системе «Pilot-Probomat», где схема измерения не связана с ходовым винтом, вначале производится грубая установка с точностью ближайшего дюйма (25,4 *мм*) при помощи измерительной линейки, имеющей штифты, расположенные через 25,4 *мм*, и защелки, заходящей в контакт с требуемым штифтом. Точная установка осуществляется точным сервоприводом, перемещающим каретку салазок при помощи прецизионного винта длиной 25,4 *мм*. Фирма использовала позиционные системы, помимо сверления отверстий, также для изготовления эталонных профильных кулачков. Программа обработки одного из кулачков, применяемого в текстильной промышленности, состояла из 720 точек, расположенных через 0,5° по контуру кулачка. При обработке на сверлильном станке была получена точность 0,025 *мм*. Стоимость изготовления снизилась на 35% по сравнению с обработкой на фрезерном станке с цифровым программным управлением. Позиционные системы можно использовать для точного автоматического контроля готовых изделий. Указывается на целесообразность изготовления простых изделий на фрезерных станках с цифровым управлением, так как программа обработки простая и требуются несложные приспособления, а при фрезеровании ограничиваться одним проходом, давая максимальную нагрузку на фрезу. Эффективность цифрового программного управления зависит от планирования производства и полной загрузки самого станка. С. П. Кузнецов

11118. Устройство управления системы «Нумерикорд». Мур (The Numericord machine-tool director. Moore Gerald T.), Proc. East. Joint Comput. Conf. (1957, Washington, D. C.), New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 6—10 (англ.)

Приводятся основные схемы устройства, преобразующего коды цифровой информации, считываемой с программной перфоленты в фазоимпульсные сигналы, записываемые на магнитную ленту, применяемую для автоматического управления пятикоординатным фрезерным станком. В системе принята линейная интерполяция криволинейной траектории движения центра фрезы. Данные для отработки одного прямолинейного участка траектории группируют в команду, где указываются величины перемещений по координатам числом импульсов (один импульс соответствует перемещению примерно на 0,003 *мм*), знаки перемещений (направление движения) и время отработки команды, равное 200; 100; 50; 10; 5; 2; 1 или 0,5 сек. Максимальная величина перемещения, задаваемая в команде, 10 *м*. Коды команды, записанные на перфоленте двоично-десятичным кодом, при считывании переводятся в код 5211 (приводится таблица кода) и поступают на магнитный регистр, состоящий из 172 сердечников, с которого затем передаются на магнитный регистр линейного интерполятора, где коды перемещений преобразуются в последовательность импульсов, число которых пропорционально заданным величинам перемещений (применяется учетверение), при помощи выходных импульсов с триггеров счетчика интерполятора. Код времени отработки определяет открытие одного из вентилей счетчика интерполятора, на которые подаются импульсы частотой 16 *кгц* от генератора. При коде 200 сек. импульсы подаются на первый разряд счетчика, при коде 100 сек.— на второй и т. д. По этой причине максимальные перемещения задаются только при коде времени 200 сек. Полученные последовательности импульсов подаются на декодирующую схему, состоящую из шести счетчиков (каждый с коэффициентом пересчета 800). На вход первого счетчика поступают импульсы частотой 160 *кгц* от задающего генератора, а на вход других — импульсы со своей схемы синхронизации, на которую подаются импульсы с генератора и соответствующей координа-

ты интерполятора. Схема синхронизации пропускает на вход счетчика импульс с интерполятора и задерживает на полпериода (частоты 160 *кгц*) импульс генератора при положительном знаке координаты или пропускает импульс с генератора и не пропускает вообще импульс с интерполятора при отрицательном знаке. Частота выходных сигналов с каждого счетчика изменяется на ±20 *гц*, при максимальной частоте импульсов с интерполятора (16 *кгц*), относительно сигналов первого счетчика (200 *гц*). Сигналы с выходов счетчиков записываются на магнитную ленту и в схеме управления станком преобразуются в командное напряжение сельсинов, управляющих элементами станка. С. П. Кузнецов

11119. Цифровая следящая система для автоматического программного управления механизмом нажимного устройства реверсивного прокатного стана. Озерной В. М., Розенберг Г. С., Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 11, 1528—1536 (рез. англ.)

Дан сравнительный анализ систем следящего электропривода, используемого для автоматического перемещения верхнего валка стана. Описана цифровая система управления электропривода, обеспечивающая установку валка с точностью ±0,1 *мм* (рабочий ход 400 *мм*) при быстрой и легкой смене программы, записываемой в двоичном коде на металлическом круглом диске в виде круглых отверстий. Устройство считывания программы построено на германиевых фотодиодах. Предложен вариант диска с кодом Грея, изготовленный из органического стекла, на котором кодовый узор нанесен фотохимическим способом. Описаны принципиальные схемы основных блоков. Приведены результаты испытаний макета. В. В. Васманов

11120. Устройства управления производственными процессами в Советском Союзе. Ушаков (Soviet trends in computers for control of manufacturing processes. Ushakov V. B.), Instrum. and Automat., 1959, **32**, № 1, 102—105 (англ.)

Краткое описание принципа работы и состава аппаратуры разработанного в Советском Союзе устройства управления газовой печью. Описан принцип обеспечения оптимального режима процесса. В. В. Васманов

11121. Применение электронных вычислительных машин в управлении производством. Нелсон (Electronic computers management application. Nelson Richard L.), J. Amer. Soc. Naval Engrs, 1959, **71**, № 2, 295—298 (англ.)

Статья общего характера.

11122. Цифровые системы управления. Тэрао (Terao M.), Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1959, **46**, № 4, 14—19 (японск.)

Статья общего характера.

11123. Навигационные вычислительные устройства. Уфлер, Оноре (Les calculateurs de navigation. Ufler H. J., Honoré E.), Navigation (France), 1959, **7**, № 28, 337—345 (франц.)

Статья общего характера.

11124. «Комак» — эффективная карторазкладочная система для хранения и поисков информации. Тауб (The Comac: an efficient punched card collating system for the storage and retrieval of information. Taube Mortimer), Preprints papers Internat. Conf. Scient. Informat. (Washington, D. C., 1958). Washington, D. C., Nat. Acad. Sci. — Nat. Res. Council, 1958, V/419—V/428 (англ.)

Связи между элементами информации и описывающими их терминами могут отражаться двумя способами: или коды терминов группируются для каждого кода элемента информации, или наоборот. Соответственно этому поиски нужных элементов информации по совокупности терминов вопроса могут производиться на обычных счетно-перфорационных машинах либо с помощью сортировки и выборки, либо с помощью раскладки. Для сравнения этих способов рассматривается фиктивный каталог из 1 000 000 элементов информации, описываемых в среднем 20 терминами, где общее число терминов равно 10 000. Первый способ осуществляется на обычной сортировальной машине или машине ИБМ-101 при фиксированном расположении терминов в элементах информации и вопросах (локальный код) или на специальной машине, предложенной Луном (Luhn), в случае нелокального кода. В последней машине используются вопросные карты, на которых термины записаны в коде, обратном тому, который используется для записи терминов на перфокартах каталога. При прохождении последних над вопросной картой происходит полное затемнение полей, содержащих совпадающие термины, что регистрируется фотоэлементами. Предположив, что на каждой карте можно расположить двадцать терминов и что просмотр ведется со скоростью 1 000 карт в 1 мин., получим время поиска, равное $16\frac{1}{2}$ часам, если только каталог не подразделяется на взаимно исключающие классы. При использовании второго способа и обычной картоскладочной машины пришлось бы отвести для миллиона элементов информации, снабженных двадцатью терминами каждый, 20 млн. перфокарт, разбитых на 10 000 групп (по общему числу терминов). Сравнение двух групп по 2000 карт для поисков элементов информации, отвечающих сразу на два термина вопроса, потребовало бы теперь уже только около 10—20 мин. при скорости каждого подающего устройства машины 240 карт в 1 мин. Кроме увеличения объема каталога, здесь имеются и другие неудобства: необходимость расположения карт в каждой группе в строго определенном порядке и возврата отобранных карт на свои места. «Комак» в значительной степени устраняет эти недостатки — коды элементов информации уже не располагаются на отдельных картах, а сами карты не удаляются из массива, так как совпадающие коды пробиваются на другой карте. Получившаяся карта может затем сравниваться с картами из третьей группы в случае трех терминов в вопросе и т. д. Возврата карт здесь не требуется, а возможность размещения в нашем случае 37 кодов на карте приводит к сокращению в 37 раз предыдущего массива (540 550 карт вместо 20 млн.). При сравнении по одному коду из каждой группы сохраняется требование упорядоченного расположения кодов, в противном случае это требование снимается, однако само устройство делается гораздо сложнее.

В. П. Черенин

11125. Искусственный язык для электронных устройств (Kunstsprache für Elektronenanlagen), Elektronik, 1959, **8**, № 3, 92 (нем.)

В Патентном управлении США разрабатывается язык для механизированных поисков патентов, общее число которых достигает 7 млн. Каждое слово этого языка «со связывающими понятиями» состоит из искусственного корня, к которому могут добавляться приставки и суффиксы. Примером корня может служить «упружесть», где объединяются понятия упругости и жесткости. Вскоре будет выпущен первый сборник, содержащий около 150 таких корней. Создание такого машинного языка вызвано неоднозначностью и многословностью обиходной речи. Так, Ньюман (S. M. Newman) исследовал зависимость значений многочисленных английских предлогов от контекста и пришел к необходимости замены их новыми стандартными и однозначными связывающими понятиями. Выявлено уже 25 таких понятий.

В. П. Черенин

11126 Д. Об автоматизации проектирования технологических карт механической обработки при помощи электронных вычислительных машин. Гильман А. М., Автореф. дисс. канд. техн. н., Ин-т точной механ. и вычисл. техн. АН СССР, М., 1959

См. также: 10701, 10997.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абалышникова Л. М. 11051
Абдинова А. Б. 10462, 10464
Агранович З. С. 10288
Аксентьев Л. А. 10212, 10242
Акушский И. Я. 11096
Александрян Р. А. 10338
Алексеев Г. А. 10743
Андрієвська М. Г. 10805
Андриевский Ф. П. 10801 К
Андронов И. К. 9896
Аринь Э. И. 10171
Артюшенко Л. М. 10467
Арутюнян Н. Х. 10338
Атанасов А. А. 10391
Ахундзадэ М. Ј. 10432, 10535

Б

Бабкин В. И. 10623
Байда Э. Н. 10416
Балтрушевич А. В. 11062
Баранцев Б. Г. 10347
Баранцев Р. Г. 10398
Бари Н. К. 10175
Барсуков К. А. 10439
Басс Ф. Г. 10731, 10733
Башмаков М. И. 9998
Беленький С. З. 10465
Белинский П. П. 10235
Беляев П. Ф. 10623
Беляев Ю. К. 10624
Берджесс Д. А. 9949
Березанский Ю. М. 10316
Березина Л. Я. 10804
Берман Д. Л. 10187, 10506
Бессмертных Г. А. 10585
Бляшке В. 9865, 9866
Бобров А. А. 10168
Бойков Г. П. 10453
Бонч-Бруевич В. Л. 10593
Бородачев Н. М. 10413
Бронштейн И. Н. 9939 К
Брудный Ю. А. 10189
Брук И. С. 11116
Брыков А. И. 9907
Булабаев Т. 9827
Булыгина Е. В. 10476

В

Вада Х. 11053
Вайнберг Д. В. 10247
Вайнберг М. М. 10578, 10580
Вальдман А. П. 10283
Валявко В. В. 11049
Ван Го-цзюнь 10547
Ван Сян-хао 10072
Василенко О. Ю. 10460, 10461
Васильев А. М. 10871
Васильев В. Г. 11070
Васильев Д. Т. 11114
Венков Б. А. 9961
Виденский В. С. 10197
Вильдт Е. О. 11089
Вильнер И. А. 11003
Вишик М. И. 10572
Войцеховская К. Ф. 10433
Вольмир А. С. 10419
Вольперт А. И. 10360
Вороньец К. 10396
Вороновская Е. В. 10198, 10199

Г

Гавеля С. П. 10356, 10358
Гаврилюк В. Т. 10174 К
Галев Л. 10908
Ганзбург И. М. 10193, 10194
Гейдельман Р. М. 10808
Гельман И. В. 10472
Гельфанд И. М. 10274
Гильман А. М. 11126 Д
Глушко В. П. 10329
Гноенский Л. С. 10262
Гольдберг А. А. 10221
Гольдман М. А. 10591
Гончаров В. П. 10119
Гопенгауз И. Е. 10189
Гординг Л. 10336
Гофман Ш. М. 10954
Грабарь М. И. 10302
Грацианская Л. 9828
Гробов В. О. 10386
Грушин В. В. 10170
Гулисашвили Т. А. 10820 К
Гумеров Ш. А. 10377
Гуревич С. Г. 10177
Гусаченко Г. М. 10349

Д

Давыдов А. К. 9932 К
Дарбинян С. С. 10385
Делоне Б. Н. 10903
Демидович Б. П. 9927 К
Денисов Н. Г. 10742
Дер-Шварц Г. В. 11071
Чжавадов М. Н. 10334
Джеймс И. М. 10143, 10144
Джрбашян М. М. 10338
Дивеев Р. Х. 10674 К
Диканова З. Т. 10586
Днестровский Ю. Н. 10444
Добрушин Р. Л. 10641
Драпкін А. Б. 10357
Дынкин Е. Б. 10642

Ж

Жаутыков О. А. 9877
Жихарь Н. А. 10569
Журавлев Ю. И. 10106

З

Завьялов Ю. С. 10379
Зайков Р. 10594
Зандер М. К. 10171
Занегин А. Ф. 10819 К
Зверев В. А. 10742
Зубов В. И. 10299
Зыков А. А. 10084

И

Иваненко И. П. 10465
Иванов В. В. 10976
Иванов В. Н. 10298
Икэдзава С. 11067
Ильин В. А. 10332
Ионин В. К. 10237
Исакова Е. К. 10345
Истратов В. И. 10787 К

Й

Йон Ф. 10362 К
Йонэяма 10692

К

Кабанова В. 10301
Кадец М. И. 10550
Казьмин Ю. А. 10206
Камалов М. К. 10676 К
Каменомостская С. Л. 10403
Канер Э. А. 10733
Канэко 11096
Капланский И. 10105 К
Карацу 10709
Касьянков П. П. 10441
Каченовский М. И. 9938 К
Качуровский Р. И. 10578
Квітка О. Л. 10425
Кеда Н. П. 10948
Кириллов А. А. 9904
Кириллов Н. Е. 11024
Козлов В. Ф. 10437
Козлов Ю. М. 10730
Колмогоров А. Н. 9916 К
Кон-Фоссен С. Э. 10919 К
Копылов Г. И. 10379
Корнейчук Н. П. 10192
Костомаров Д. П. 10444
Кострикин А. И. 10046 Д
Котова Л. Н. 10926
Кравцов В. Г. 10016
Красненьков В. И. 10244
Крачковский С. Н. 10591
Кречмар В. А. 9933К
Кривошеин Л. Е. 10263
Крылов В. И. 10946
Крылов Н. Н. 10816 К
Кубилюс И. П. 9959
Кудрявцев В. А. 9927 К

Кузнецов Б. Г. 10382
Кузнецов Л. И. 10381
Кузьменко Л. В. 11075
Кузьминов В. 10032
Куликовский А. Г. 10402
Куршин Л. М. 10240
Кэ Чжао 9969, 9971

Л

Лаврентьев М. А. 10236
Лай Вань-цай 10218
Лакс П. Д. 10337
Ландсберг Р. С. 11089
Лебедев А. Н. 11068
Левинсон Н. 10355
Леонтьев А. Ф. 10205
Ливартовский И. В. 10292
Ли Вэнь-цин 10588
Ли Го-пин 10210
Линник Ю. В. 9942, 9959
Линский В. С. 11027
Ли Янь 9858
Лобандиевский П. И. 10816 К
Лузин Н. Н. 9895 К
Лукомская А. М. 9846 К
Луценко И. Е. 10570
Любич Ю. И. 10558
Люстерник Л. А. 10572
Лыкова О. Б. 10289
Ляшко І. І. 10243

М

Майер Р. 10454 К
Максимов Ю. И. 10623
Малышев А. В. 9824
Мамедбейли Г. Д. 9867
Маневич В. А. 10802, 10814
Манин Ю. И. 10059
Маренкова А. Ф. 10397
Маркман В. В. 10459
Маруяма 9860
Махмудов Ю. А. 11034
Маховиков В. И. 10427
Мацуда 10700
Медведев Ф. А. 9876
Меркулов В. В. 10438
Мешалкин Л. Д. 10636
Мешков А. И. 10428
Миранда К. 10365 К
Мисник В. П. 10468
Мисюркеев И. В. 10579
Митропольский Ю. А. 10287, 10297
Михайлов В. 10343
Михлин С. Г. 10518
Моденов П. С. 9935 К
Монастырский М. Л. 10220
Морозов Н. Ф. 10430
Мочалин А. И. 10449, 10450
Мэн С. А. 10816 К

Н

Набэсима 10215
Назарчук М. М. 10389
Нерсесян А. Б. 10466
Нетребенко К. А. 11071
Николаев П. В. 11004
Новоселов В. С. 10380, 10384
Норкин С. Б. 9914, 9915

О

Озерной В. М. 11119
Окумура 10682
Олейник О. А. 9904
Оноги 10721
Островский И. В. 10228

П

Пагурова В. И. 11011 К
Паламодов В. П. 10305
Панкратов А. А. 9929 К
Папакирьякопулос С. Д. 10150
Пентковский М. В. 11002
Персидский С. К. 10294
Поволоцкий А. И. 10575
Подловченко Р. И. 11019
Полак Л. С. 9875
Положій Г. М. (Положий Г. Н.) 10363 К, 10457
Полубаринова-Кочина П. Я. 10393
Польский Н. И. 10389
Проценко Д. Ф. 10160
Пугач А. Б. 11059
Пу Дэ-цянь 10217
Пясковський Б. В. 9856

Р

Радченко А. Н. 11044
Рашковић Д. 10480
Ривкинд Я. И. 10584
Рогинский В. Н. 10120 К
Розенберг Г. С. 11119
Розенвассер Е. Н. 10392
Розенкноп И. З. 9999
Ростовцев Ю. Г. 10735
Рубцов В. М. 10421
Русаков С. А. 10022
Рязанов Е. В. 10405

С

Сабинин Л. В. 10869, 10873
Савицкий Ю. И. 11059
Санин А. И. 9909—9911
Сато 10214, 10712
Сафонов С. А. 10047 Д
Свекло В. А. 10420
Семендяев К. А. 9939 К
Серр 10061, 10891
Се Хуэй-чунь 10227
Симада 11096
Симидзу 9859
Симонов В. П. 10324
Симонов Н. И. 9874
Сиокава 11102
Склянский А. Л. 10370
Скобелев А. Т. 11108
Скрыдлов В. Н. 10807
Смирнов В. И. 9922 К
Смогоржевський О. С. 10806
Смоловик И. И. 10421, 10426
Солодовников А. С. 10035
Спаньер Э. Г. 10146
Старченко Л. П. 9958
Субханкулов М. А. 9946
Суворов Г. Д. 10237, 10238
Суворовский П. П. 10953
Сучилин А. М. 10995
Сюкияйнен В. А. 10420

Т

Такахаси С. 11066
Талдыкин А. Т. 10567
Тарабасов Н. Д. 10246
Тиман А. Ф. 10194
Титчмарш Е. К. 10330
Тодоров И. 10276
Томић М. 10176
Трагутман Н. Ф. 10817 К
Трушин Г. И. 10861
Тумановский Е. И. 11059
Тумаркин С. А. 10387
Тутаев Л. К. 10811 К
Тэрао 11122

У

Уайтхед Д. Г. 10145, 10146
Угодчиков А. Г. 10247
Умибэ 10720
Ус В. И. 11025
Уфлянд Я. С. 10404, 10424

Ф

Фаддеев Д. К. 9998
Файнштмидт В. Л. 10200
Фарзетдинов М. М. 10452
Федорченко И. М. 9845
Феллер В. 10321
Филиппов В. И. 11044
Фицнер Л. Н. 11114
Флатто Л. 10355
Фрейдман П. А. 10080

Х

ХайруллинИ.Х. 10203
Халилов З. И. 10936
Хапланов М. Г. 10209, 10251 Д
Харасахал В. Х. 10270
Харламова Е. И. 10378
Хатта 11096
Хацет Б. И. 9902
Хейман У. К. 10216
Хигути 10992
Хули 9947

Ц

Цареградский И. П. 10607
Ценов И. В 10188
Цлаф Л. Я. 9899
Цубербиллер О. Н. 10797 К
Цукаути 10714

Ч

Чекмарев И. Б. 10404
Чекмарев Т. В. 10354
Черкасов А. Н. 10253
Чернов Ю. П. 10880
Честнат Г. 10454 К
Четаев Д. Н. 10411
Чжан Бао-линь 10002
Чикин Л. А. 10222

Ш

Шахов Ю. Н. 9960
Шереметьев М. П. 10241
Шилов Г. Е. 9919 К
Шишмарев И. А. 10332
Шмидов Ф. И. 10167
Шмульян Ю. Л. 9902, 10563
Шрейдер Ю. А. 11018

Щ

Щепетев А. Н. 10422

Э

Эйдус Д. М. 10326
Эльясберг В. М. 11069

Ю

Юй Цзя-юн 10195
Юровский А. В. 10252
Юсупов А. 9901

Я

Ябэ 10691
Ягудаев Б. 9901
Янь Дунь-цзе 9857

A

Abian S. 10477
Abramson P. 11115
Abreu Faro M. J. 10648
Ackoff R. L. 10683
Aczél J. 10030, 10031, 10859
Ádám A. 9994
Aegerter M. J. 10978
Agostinelli C. 10361
Agostini A. 9863
Agrawal B. D. 10539, 10540
Akaike H. 10646
Alavi Y. 10536
Alcain Partearroyo R. 10767
Alexander W. M. 11064
Allais M. 10673
Alman J. 11042
Alpár L. 9829
Al-Salam W. A. 10523
Amitsur S. A. 10049, 10050
Ancmon E. M. 11008
Andersen N. 11039
Anderson F. W. 10560
Andreoli G. 10260
Angheluță T. 10490
Anis A. A. 10740
Ansbacher F. 10526
Aoyama H. 10672, 10748
Apostol T. M. 9950
Aprile G. 10938
Aragnol A. 10896, 10898
Aramă O. 10922
Arrow K. J. (ed.) 10724 K
Ascher M. 10970
Askovitz S. I. 10999
Aubert K. E. 10082
Azpeitia A. G. 10202

B

Bachet C.-G. 9893K
Badell Portuondo E. 10838
Baer R. 10014
Bagley R. W. 10510
Bailey W. N. 10528, 10532
Bajcsay P. 10264
Baldacci R. F. 10415
Ballhausen C. 11008
Balligand E. 11074
Barbanti A. 10783 K
Barlotti A. 10825
Barner M. 10843
Barnes L. A. 10107
Bartholomew G. E. 10942
Barton D. E. 10659, 10749
Bass J. 10399, 10754
Baticle Ed. 10603
Bauer F. L. 10986
Baumgartner L. 10044 K
Baur A. 10796 K
Beach L. A. 10471
Becker O. 9853 K
Beckmann M. 10696
Beer S. 10716
Bellman R. 10271, 10273, 10295, 10496, 10940
Berg L. 10162
Berge C. 10156 K, 10157 K
Berger P. 9883
Berghuis J. 10984
Bergman C. I. 11052
Berman G. 10085
Berni A. 10779
Berstein I. 10137
Bertaut F. 10652
Bertolini F. 10159
Bertolino M. 9936 K
Bertram G. 10582, 10924, 10925, 10929
Bessière F. 10695
Beth E. W. 9836
Béthoux P. 10736
Bharucha-Reid A. T. 10644
Bhate D. H. 10671
Bialy H. 10581
Bieri H. 10917
Biermann K.-R. 9869
Bisdorf W. 11101
Bjerhammar A. 10083
Blaauw G. A. 11012
Black G. 10690
Blair R. L. 10560
Blanc Lapierre A. 10753
Blaschke W. 10856
Blau J. H. 10708
Blij F. 9967
Bloch E. 11060
Boas R. P., Jr 10169
Bochner S. 10619
Böhm J. 10809
Bompiani E. 10795K
Boniforti A. 11047
Bononcini V. E. 10500 K
Borg S. F. 10770 K
Boron P. E. 11030
Boruvka O. 10254
Bottema O. 10004
Bottenbruch H. 11016
Botts T. A. 10499 K
Boucher M. H. 11086
Bouix M. 10551
Bouzitat J. 10718
Boyer P. 11063
Bradley A. D. 9861
Brambilla F. 10722
Branges L. de 10566
Brauer F. 10255
Breny H. 10643
Bricard R. 9920 K
Brinck I. 10564
Brîndeu N. L. 10375
Broido D. 11041
Brokate K. 11022
Brooks F. P., Jr 11013
Browder F. E. 10573
Brown R. R. 10981, 10982
Buchdahl H. A. 10879
Buchholz H. 10446
Buck R. C. 10678
Burger E. 10006
Burnat M. 10328

C

Calabi E. 10313
Caldwell G. C. 10966
Calistru C. 9898
Campanato S. 10353
Campbell R. 10525
Campos Ferreira J. 10042
Caracciolo C. 11104
Cardot Cl. 10117
Carlitz L. 9983, 10534
Carr J. W., III 10921
Carstoiu J. 10395
Cartan H. 10009, 10907
Carter R. W. 10011
Cesari L. 10173
Četković S. (Red.) 9931 K
Chacon R. V. 10638
Chakraborty S. K. 10412
Chalmers B. J. 11110
Chandra K. R. 9968
Chang L. C. 10663
Charles B. 10015
Châtelet A. 10091
Chatterjea S. K. 10522
Chelărescu Al. 9898
Cheney W. 10971
Chen Jing-jun 9943
Chen Kien-kwong 10243
Cherep de Guber R. 10846
Cherry I. 10940
Chevalley C. 10055
Chisini O. 9864, 10815 K
Chorafas D. N. 10727 K
Chow W. M. 10991
Chowdhury P. 10434
Chowla S. 9950
Christeller S. 10964
Christian U. 10234
Churchill R. V. 10367 K
Cîmpan F. 9871
Cinquini-Cibrario M. 10303
Clark D. F. 10683
Clenshaw C. W. 10990
Climescu Al., 10095
Cohn P. M. 10078
Collom P. W., Jr 11014
Conlan J. 10342
Connell E. H. 10136
Conte S. D. 10941
Cooke K. L. 10275
Copeland A. H., Sr 10596
Coppel W. A. 10269
Corduneanu C. 10290, 10341
Corlăteanu V. 9898
Cornea A. 10230
Corrêa de Mattos H. 9841
Cossu A. 10874
Cowell W. R. 10036
Cox D. R. 10746
Crawley P. 10094
Croes G. A. 10684
Cuciuc M. 10307
Cuesta N. 9873
Cuthill E. H. 10956

D

Dadić Ž. 9870
Daemen W. 11081
Daish H. H. R. 9925 K
Dal Buono U. 10781K
Dalenius T. 9831
Danjon A. 9888
Dantzig T. 9891 K
Danzer L. 10912
Darling D. A. 10639, 10640
Das Gupta S. R. 10469, 10470
Davenport H. 9882
David F. N. 10749
Davies R. O. 9974
Davis C. 10154
Dean R. A. 10094
Debnath L. 9948
Degen W. 10843
De Kerf J. L. 11038
Delcourte M. 9981
Del Punta V. 10685
Descamps R. 10738
Devresse A. 10799 K
Diaz J. B. 10348
Diefenbach L. 10045 Д
Dinghas A. 10463
Di Pasquale L. 9868
Dixmier J. 10033
Doležal V. 10265
Dolton T. A. 10451
Döring H. 10750
Drăgan I. 10335, 10339
Drahos I. 10763
Duffieux P. M. 10985
Dugué D. 10609
Dutta M. 9948
Duval R. 10998
Dyer E. 10092

E

Egervary E. 10031
Ehlers F. E. 10938
Ehresmann Ch. 10906
Ehrhart E. 9964
Eichler M. 10001
Ellis D. 10090, 10099
Embleton W. 9925 K
Enderlein G. 9832
Enriques F. 9848 K
Erdös P. 9952, 9954, 9956, 10608, 10904
Estève M. 9894 K
Etienne J. 10323
Everett H. 10679

F

Fanjat de Saint-Font A. 10980
Fan Ky 10552
Farcas T. 9898
Farnell A. B. 10958
Faust W. R. 10471
Favard J. 10179
Fejes Tóth L. 10904
Fenyő I. 10538
Fernández de Trocóniz A. 10108
Ficken F. A. 10373
Fieber H. 10371, 10372
Fillon F. 11072
Finch P. D. 10737
Firsman S. I. 10710
Fischer B. 11036
Fisz M. 10606, 10651 K, 10663
FitzPatrick P. J. 9879
Fladt K. 9900
Flanagan C. 10963
Fleckenstein J. O. 9892 K
Ford L. R., Jr 11106
Ford P. W. 11109
Forsythe G. E. 10970, 10994
Franklin J. N. 10933
Franklin Ph. 10249 K
Fréchet M. 9847 K, 9941 K, 10667
Frenkiel F. H. 10670
Freudenthal H. 10905
Frisch R. 10686
Fröhlich A. 10086
Fromme T. 11017
Fullerton R. E. 10173

G

Gaiu E. 9990
Gál I. S. 10130
Galbură G. 10821
Gallarati D. 10831
Gattegno C. 9992 K
Gautschi W. 10514
Geddes A. 10056
Geffroy J. 10664
Gehatia M. 10741
Geissler D. 10884

Gergely E. 10909, 10916
Gheorghiu Gh. Th. 10847
Ghermanesco M. 10455
Ghircoiaşiu N. 10502
Gierl A. 9955
Gilbert R. C. 10568
Gillman L. 10561
Ginatempo N. 10789
Godeaux L. 10828, 10829
Gołąb S. von 10895
Goldberg R. R. 10178
Goldberg S. I. 10914
Goldie A. W. 10073
Goldman L. 10066
Goldstein A. A. 10971
Goñi Peralta P. de 10774
Goodstein R. L. 9976
Goodwin E. T. 11007
Göring E. 10983
Gorup G. v. 11006
Gottschalk W. 10155
Gottschling E. 10232
Gottlieb I. 10887
Gould H. W. 10478
Grätzer G. 10097
Green H. G. 10823
Griffin H. D. 10665
Grinich V. H. 11050
Groşanu I. 10375
Gross O. 10973
Grummich F. 9951
Guillotin R. 9970
Guinand A. P. 10479
Gumbel E. 10675 K
Gupta H. C. 10629, 10630

H

Haas I. 11050
Haft G. 11077
Hahn W. 10293
Haimovici M. 10311, 10312, 10756, 10757
Hájek J. 10656
Hammer L. 10074
Hanani H. 9972
Hannon H. 9913
Harary F. 10122, 10125
Harris C. C. 10989
Harris W. A., Jr 10291
Hartman S. 9953, 10034
Hartmann D. P. 11097
Härtter E. 9985
Hasumi M. 10239
Hayman W. K. 10211
Heath H. F., Jr 11054
Hegenberg L. H. B. 10503
Heider L. J. 10089
Heinrich H. 10960
Heise W. 11015
Hejcman J. 10129
Hejwowski J. 10507
Heller I. 10687
Hellman M. J. 9996
Helson H. 10186
Hennig T. 11099
Heppes A. 10913
Herbst R. 11113
Heuer G. A. 10602
Higuchi K. 10992
Hinton W. R. 10761
Hiong King-lai 10207
Hiraoka T. 10121
Hirschfeld R. A. 10677
Hiż H. 9842
Hodge P. G., Jr 10421
Holladay J. C. 10681
Holmberg B. R. 10760
Homma T. 10151
Honoré E. 11123
Hoop A. T. 10442
Horadam A. F. 10803
Horálek V. 10729
Horne J. G., Jr 10038
Hornecker G. 10975
Hornyik L. 10763
Hoskin N. E. 10930
Hosszú M. 10763
Howard R. L. 10109
Hradecký F. 10818 K
Hrmová R. 10040
Hsu Chen-jung 10900
Hsu L. C. 10195, 10947
Huber A. 10322
Hummel P. M. 10484
Hurwicz L. (ed.) 10724 K
Hwang Cheng-chung 10864

I

Iacob C. 9930 K
Ihm P. 10949
Iino R. 10576
Ikeda I. 10394
Imre M. 10918
Ingarden R. S. 10768
Ionescu-Bujor C. 10780 K
Isaacson H. S. 11106
Isbell J. R. 10037
Iséki K. 10261
Ishiguro K. 10180
Ivanto O. 11073
Iwasawa K. 10058

J

James Gl. (ed.) 9917 K
Johnson S. M. 10973
Jones J., Jr 10279
Jordan P. 10888 K
Jurkat W. B. 10632, 10633

K

Kac M. 10613, 10640
Kaiser H. 10771 K
Kalik C. 10352
Kamke E. 10327, 10364 K
Kampé de Fériet J. 10600, 10670
Kanagasabapathy P. 9965
Kanno K. 10182
Kaplansky I. 10104 K
Katchalski E. 10741
Kawashima G. 10635
Keay F. W. 11113
Kemeny J. G. 10637, 10680
Kertész A. 10071
Kesten H. 10616
Kimball A. W. 10657
Kimball G. E. 10717
Kindle J. H. 10800 K
King E. N. 11030
Kiss L. 9862
Kleinfeld E. 10100
Klír J. 10111, 10112
Knight R. 9926 K
Knobloch H.-W. 9997
Kobayashi S. 10833
Kobbenheyer T. 10443
Koch R. J. 10134
Ko Chao 9969, 9971
Kochendörffer R. 10020
Kogure M. 10653
Kohls C. W. 10561
Kohn J. J. 10309
Kohonen T. 11073
Kolchin E. 10064, 10068
Kolmogorov A. 10376
Komaki Y. 10013
Kondo K. 10400
Koopman B. O. 10595
Koopmans T. C. 10696
Korous J. 9923 K
Krabbe G. L. 10556
Kraft C. 10660
Krajňáková D. 10041
Král J. 10166
Kranjc A. 11082
Krelle W. 10723 K
Kreyszig E. 10857 K
Krňan F. 10039
Krull W. 10069
Kshirsagar A. M. 10745
Ku Y. H. 10546
Kubo T. 10219
Kuniyoshi H. 10048
Künzi H. 10225, 10226, 10723 K
Kurzweil J. 10265

L

Laasonen P. 10961
Labosne A. 9893 K
Ladyzhenskaia O. A. 10319
Lafon J.-P. 10060
Laha R. G. 10604
Lai Wan-tzei 10218
Lamouche A. 9854 K
Lamprecht E. 10053
Lang S. 10054, 10064, 10835 K, 10836 K
Lange F. H. 10541
Lange O. 10726 K
Langer R. E. 10259
Larsen H. D. 9906
Lauffer R. 10840
Lauler L. J. 11032
Laurenti F. 10778
Lauwerier H. A. 10318
Lawton B. 9957
Leach E. 10657
Leader S. 10128
Leavitt W. G. 10077
Ledermann W. 9966
Lee Wen-ching 10588
Lees M. 10932
Leeuwen L. C. A. 10075
Lefschetz S. 9887, 10833
Lego P. E. 11112
Legoupil J. 10625
Legras J. 10972
Leitner A. 10410
Lelek A. 10132
Lelong-Ferrand J. 10893
Leminger O. 10776
Lense J. 10498 K
Lenz H. 10915
Lepson B. 10471
Lesieur L. 10832
Levine N. 10165
Lévy P. 10618
Lietzmann W. 10782K
Lindenberg W. 10102
Lint J. H. 9945
Lions J.-L. 10553
Lipka I. 10764
Lipschutz M. 10617
Littlewood J. E. 10369
Liu Ta-Chung 10703
Lodezzano G. 10785 K
Loève M. 10620
Łojasiewicz S. 10549
Lomholt A. 9934 K
Look K. H. 10865
Löttgen U. 10133
Lowan A. N. 10935
Lubbock J. K. 10647
Ludford G. S. S. 10348, 10448
Luebbert W. F. 11014
Luke D. 10775
Lunelli L. 10837 K
Lydall H. F. 10705
Lyra C. B. 10149

M

Maaß D. 10910
Maass H. 9963
McCarthy P. J. 10285
McConnell A. J. 9885
McCoy N. 10070
McHugo J. W. 11076
McKnight J. D. 10510
McLeod J. 11083
McManus M. 10706
Mac Nerney J. S. 10554
McShane E. J. 10499 K
Magnus W. 10007
Mąkowski A. 9987
Maley C. E. 10996
Maloň S. 11107
Mangeron D. 9898
Manley J. M. 11087
Marathe C. R. 10005
Marchaud A. 10755
Marcus F. 10848
Marczewski E. 10542
Mardešić S. 10131
Marimont R. B. 10979
Marinescu G. 10548
Marquet S. 10436
Masotti Biggiogero G. 10815 K
Mathews P. M. 10752
Matsushima Y. 10096
Matusita K. 10661
Maury G. 10063
Maxfield J. E. 10963
Meder J. 10508
Meixner J. 10410, 10520
Melzak Z. A. 10902
Meschkowski H. 10501 K
Messerle H. K. 11084
Mettler E. 10383
Metzger R. W. 10725K
Michael W. A. 10939
Michel P.-H. 9890 K
Michieli I. 9851 K
Mihăileanu N. 10890
Mihăilescu T. 10844, 10851
Mikulík M. 10093
Miles E. P., Jr 10351
Miller R. W. 11113
Milne W. E. 10923
Mirra C. 10784 K
Mises R. 10649 K
Mishkin E. 10527
Mişicu M. 10414
Mitra M. 10401
Mitrinović D. S. 10256, 10409
Mludek H. 11098
Mocanu P. 10872
Moesner A. 9977, 9978
Moisil Gr. C. 10769
Moore E. F. 10115
Moore G. T. 11118
Moran S. 10025—10029
Morgenstern D. 10662
Morikawa H. 10052

Morimoto H. 10280
Moser J. 10267
Moser L. 9903
Mostafa A. Abdelkader 10257
Mott J. L. 10622
Motzkin T. S. 10126, 10190
Mourier E. 10650 K
Mullins W. W. 10751
Muracchini L. 10894
Murakami S. 10899
Murgescu V. 10870
Murnaghan F. D. 10974
Myller A. 10773

N

Nag B. R. 11105
Nagano T. 10866, 10868
Nagell T. 9980
Nakayama T. 10081
Nanjundiah T. S. 10486
Narayana T. V. 10601
Nariboli G. A. 10429
Naslin P. 10987
Nečas J. 10418
Nelson R. L. 11121
Neumann B. H. 10021
Neyman J. 10597
Nichols J. O. 11113
Nickel K. 10931
Nicolae R. 10794
Nicolescu A. 10849
Nienburg R. 11056
Nijenhuis A. 10862
Nomura Y. 10447
Norman R. A. 10719
Northcott D. G. 10057, 10062
Nottrot R. 10860
Novák J. 9835

O

Obretenov A. 10610
O'Brien J. P. 10268
Olaru V. 10320
Olkin I. 10495
Olson K. H. 11111
Ong R. S. 10406
Opial Z. 10277, 10278
Orlicz W. 10557
O'Rourke R. C. 10471
Ostrowski A. M. 10511
Otto E. 9924 K
Ou-Yang Chang 10213

P

Pailloux H. 10374
Pakshirajan R. P. 10612
Pál Á. 10368
Palais R. S. 10897
Palas F. J. 10524
Palermo F. P. 10147
Papić P. 10127
Papuc D. I. 10850
Parameswaran M. R. 10504
Parker E. T. 9995
Parzen E. 10605
Passelecq D. 10952
Pati T. 10181
Paulsen R. C. 11060
Payne L. E. 10308
Pazderski G. 10010
Pei M. L. 10928
Peierls R. E. 10390
Pelzer W. 10853
Pennisi L. 10201
Penny F. D. 11076
Petersson H. 10233
Pethel F. C. 11106
Phillips A. W. 10669
Phipps P. 11042
Pi Calleja P. 10161
Piccard S. 10023
Picone M. 10158, 10458
Piechocki W. 10435
Pierce R. S. 10088
Pinl M. 10877
Pistoia A. 10704
Plander I. 10266
Pleijel Å. 10325
Polak J. J. 10703
Polidori C. 9928 K
Poncini F. 10842
Pondělíček B. 10098
Popoviciu T. 10481
Popper K. R. 10598
Porges A. 10488
Pöschl K. 9850 K
Possner L. 10977
Poveda Ramos G. 10388
Predeleanu M. 10423
Preisendorfer R. W. 10590
Priday C. J. 9973
Prior L. E. 10823
Proschan F. 10690
Pylarinos M. O. 10845

Q

Quilghini D. 10765

R

Rádl J. 10818 K
Raghavan S. 9944
Ramakrishnan A. 10627, 10628, 10752
Ramanujan O. S. 10505
Rapaport H. 11115
Raschewski P. K 10759 K
Rashevsky N. 9843, 9844
Rausch F. 11021
Raymond F. H. 11020
Rayner K. 11035
Rédei L. 10012
Redheffer R. M. 10331
Reed M. B. 10118
Reissig R. 10281, 10282
Reiter H. 10562
Rényi A. 10608
Reps D. N. 11094
Revuz A. 10163
Reynolds R. R. 10923
Reynolds W. C. 10451
Ricci Mazzone F. 10788 K
Rice H. S. 9926 K
Rider P. R. 10654
Riesel H. 9988
Riordan J. 10124
Ritchings F. A. 11093
Ritow I. 10537
Roberts N. P. 11103
Roch J. 11080
Rodriguez G. 10087
Roman I. 10993
Romberg W. 11000
Rosen G. 10882
Rösingh W. H. C. E. 10984
Rossier P. 10777
Rotkiewicz A. 9989
Rowlands G. 10333
Royden H. L. 10229
Rubel L. A. 10224
Rubin H. 10644, 10668
Rudin M. E. 10153
Runge W. T. 11088
Rusnov P. 11117
Ryll-Nardzewski C. 10034
Rzewuski J. 10881

S

Sabidussi G. 10123
Sabliet S. 11085
Sachs H. 10473
Saichin A. 10965
Sailor D. E. 11032
Saks S. 10250 K
Salié H. 9975
Salini U. 10786 K
Saltzer C. 10544
Samarski A. A. 10366 K
Samelson H. 10003
Sanderson 10152
Sándor I. 10793
Sankaranarayanan R. 10431
Santaló M. 9912
Santini P. 10497 K
Santos Reís F. 10812
Sasaki Sh. 10892
Sasayama H. 10901
Sawyer W. W. 9908, 10456
Sce M. 10837 K
Schafer R. D. 10000
Schechter E. 10927
Schell E. D. 10689
Schiller J. K. 9984
Schlögl F. 10306
Schmid L. A. 10519
Schmidt E. T. 10097
Schmidt H. 10771 K
Schmidt J. 10583
Schmidt W. 9962
Schnell E. 10611
Schnetzler M. A. 11097
Schoenfeld L. 10491
Schreiner A. 10772 Д
Schuff H. K. 10101
Schureman L. R. 11100
Schützenberger M. P. 10734
Schwartz L. 10626
Schwarz E. 10852
Schwarz S. 10041
Schwetman H. D. 11064
Schwinger J. 10592, 10885
Seebeck C. L. Jr 10484
Segre B. 9884, 10824, 10826
Seidenberg A. 10065, 10067
Seidl L. 10111, 10112, 10114
Seika M. 10245
Senju S. 10713
Serre J.-P. 10103 K
Serrin J. 10766
Seshu S. 10118
Severi F. 10834 K
Shannon C. E. 10115
Shapiro P. 10471
Sharma A. 10791
Sharma K. C. 10533
Sheldon J. W. 10920, 10955
Shieh Hui-chun 10227
Shields A. 10092
Shingo T. 10951
Shukla H. S. 10530, 10531
Shuler K. 10300
Shuleshko P. 10474, 10475
Sibuya M. 10655, 10728
Sikkema P. C. 10191
Sikorski R. 10555
Silaș Gh. 10375
Silva Filho M. 9911 K
Silverman R. 9993, 10085
Singh V. N. 10529
Sjöberg B. 10634
Sjoblom L. 10101
Smith W. L. 10746
Smithies F. 10076
Snell J. L. 10637
Solari M. E. 10740
Spencer D. C. 10309
Srivastava K. N. 10283
Stamate I. 10493, 10494
Stancu D. D. 10943 — 10945, 10969
Stasheff J. 10148
Staude H. 9832
Steinfeld O. 10071
Steinhaus H. J. 10542
Stetter H. J. 10986
Stone M. H. 9838
Straus E. G. 10116
Strubecker K. 10858K
Struik D. J. 9885K
Struik R. R. 10018
Sudan G. 9991
Summers W. A. 11093
Sunouchi G. 10183
Suschowk D. 10511
Svoboda A. 10113
Svoboda K. 10167
Swanson C. A. 10571
Sword J. H. 9955K
Synge J. L. 10389K
Szarski J. 10359
Szász F. 10044
Sze T. W. 1111
Szelągowski F. 10448
Szmydt Z. 10286
Szymański P. 10839

T

Tahta D. G. 10790
Takaku K. 10447
Takano K. 10614
Takasu T. 10878
Tallini G. 10827
Tanimura M. 10315
Tashiro Y. 10875
Taube M. 11124
Templeton D. H. 10744
Teodorescu I. D. 10886
Teodorescu P. P. 10417
Terracini A. 10854
Tersoff A. I. 11057
Thèbault V. 9970
Theodorescu R. 10645
Thompson G. L. 10680
Thorndike L. 9880, 9881
Thorne R. C. 10258
Tillmann H. G. 10231
Ting Lu 10545
Tintner G. 10688
Titchmarsh E. C. 10314
Tomiyama J. 10574
Toro T. 10445
Trajdos-Wróbel T. 9918 K
Tranter C.J. 10515
Trench W. F. 10934
Tricomi F. G. 11005
Tsang N. F. 10546
Tschupik J. 10813
Tsujimoto H. 10135, 10587
Tsuzuki T. 10081

Tucker H. G. 10668
Tuero M. 10116
Tugulea V. 10489
Turrittin H. L. 10291
Tychonoff A. N. 10366 K

U

Uffler H. J. 11123
Ungureanu Gh. 9898
Urbanik K. 9956
Ushakov V. B. 11120
Utz W. R. 10284
Uzawa H. 10707, 10724 K

V

Vacca M. T. 10408
Vakselj A. 10008
Válka O. 11107
Van Ness J. E. 11095
Vanstone J. 9979
Varadarajan V. S. 10599
Varga R. S. 10956, 10957
Varshney O. P. 10184, 10185
Veelken R. 11045
Veer J. 10699
Vejvóda O. 10296
Vermes P. 10509
Vescan T. T. 10887
Vidal Abascal E. 10758
Vidav I. 9937 K
Vidéky E. 10762
Vigassy L. 10792
Villa M. 10810 K, 10830
Vincensini P. 10855
Vincze I. 10487
Vitner Č. 10853
Vito L. de 10350
Vodička V. 10517
Vogel A. 9940 K
Vredenduin P. G. J. 9872

W

Wagner K. 10133
Waal R. 11079
Wallace A. H. 10051
Walsh J. L. 10190
Walter E. 10750
Walter W. 10317
Wang Gwo-Jjunn 10547
Wang Shiang-haw 10072
Ward M. 9982
Watson G. N. 10492
Waugh F. V. 10697
Waugh W. A. O.-N. 10739
Weeg G. P. 10110
Weil A. 9837
Weinberger H. F. 10346, 10937
Weisner L. 10516
Weiss G. 10577
Weiss M. 10204
Weiszmann A. 10876, 10887
Wells C. P. 10304, 10520, 10536
Whiteley R. B. 11032
Whittaker J. V. 10043
Whittle P. 10631
Whyburn W. M. 10275
Widder D. V. 10340
Wielandt H. 10019
Wiener N. 9852 K
Wierzbiński St. 10967
Wigntman A. S. 10589
Wilf H. S. 10959
Wilkinson J. H. 10950, 10962
Williams E. 10351
Williams R. F. 10172
Williams R. H. 11040
Williams W. E. 10440
Williamson M. H. 10747
Wilson D. 11042
Windley P. F. 11023
Wing G. M. 10940
Wiśniewski F. 10543
Wittich H. 10225, 10226
Wloka J. 10272
Wojtowicz J. 11001
Wolf A. A. 10546
Wolf F. 10555
Wolfe P. 10702
Wolodkewitsch N. 10968
Wunderlich W. 10841
Wynn P. 10512, 10513

Y

Yacoub K. R. 1001
Yanovitch M. 1099
Yih Chia-Shun 1040
Young L. C. 1016
Young L. H. 1103
Young M. E. 1106

Z

Zaanen A. C. 1055
Zadeh L. A. 1073
Zágánescu M. 10445, 10883
Zassenhaus H. 1007
Zeckendorf E. 998
Zeitlin D. 10485
Zelen M. 10665
Zerner M. 10510
Zisman M. 10138—10142
Zondek B. 10920
Zoroa P. 10615, 1071
Zsoldos L. 10911
Zulauf A. von 10482, 10483
Zygmund A. 10250 K

Опечатки к РЖ „Математика" № 9 за 1960 г.

Реферат	Строка	Напечатано	Должно быть
11046	17-я снизу	щения к памяти по сравнению с запоминающим	шины, построенные с использованием ряда новых идей

Технический редактор Г. А. Шевченко